Прикладная математика и механика. Том 44, 1980

УДК 532.72

ОДНА ЗАДАЧА ТИПА СТЕФАНА, ВОЗНИКАЮЩАЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПРОЦЕССОВ РАСТВОРЕНИЯ И ПЕРЕНОСА СОЛЕЙ В ГРУНТЕ

В. Е. Клыков, В. Л. Кулагин, В. А. Морозов

(Калинин, Москва)

Рассматривается краевая задача для параболического уравнения, коэффициенты которого с некоторого момента времени терпят разрыв вдоль заранее неизвестной подвижной линии. Такая задача описывает, в частности, растворение и вынос веществ в основании гидротехнических сооружений, промывку засоленных зёмель и др. Характерной особенностью рассматриваемых процессов является наличие двух стадий его протекания. В течение первой стадии растворение происходит во всей области фильтрации, а вторая стадия характеризуется зарождением и расширением с течением времени зоны полного растворения вещества из твердой фазы. Подобные задачи рассматривались ранее в [1–3].

В работе предложен численный метод решения этой задачи с помощью метода конечных разностей. Доказано существование и единственность решений конечно-разностных задач и приведен итерационный процесс для их нахождения, доказана его сходимость. Установлена также сходимость решений конечно-разностных задач к решению исходной дифференциальной задачи при стремлении шагов сетки к нулю, что является одновременно доказательством существования этого решения.

1. Перейдем к постановке задачи, которую для удобства рассмотрим применительно к промывке засоленных грунтов. Пусть имеется однородный слой грунта глубины L, в толще которого находятся вредные соли как в твердом, так и в жидком состоянии. Предположим, что с поверхности подается промывная вода, в которой также могут иметься соли, концентрация которых в растворенном состоянии $c_* > 0$. Будем предполагать, что возникающие при этом солевой и фильтрационный потоки одномерны и направлены параллельно оси x, а началом отсчета является поверхность грунта. Если распределение твердых солей в начальный момент таково, что их количество возрастает с глубиной или остается постоянным то, спустя некоторое время после начала промывки, около поверхности грунта образуется область полного растворения солей. Эта область отделена от области, в которой содержатся соли в твердой фазе, заранее неизвестной подвижной границей, которую обозначим $l(t)$ (t — время). Обозначим, кроме того, искомые концентрации растворенных и твердых солей соответственно $c(x, t)$ и $N(x, t)$. Тогда, согласно [3], функции $c(x, t)$, $N(x, t)$, $l(t)$ определяются из следующих уравнений:

$$
\begin{aligned}
&(1.1)\qquad m_2 c_t = D c_{xx} - v(t)\, c_x - N_t \\
&\qquad\qquad N_t = -\gamma\,(c^* - c)
\end{aligned}
$$

$$0 < x < L, \quad 0 < t \leqslant t^*; \quad l(t) < x < L, \quad t > t^*$$

$$m_1 c_t = D c_{xx} - v(t) c_x$$
$$N(x, t) \equiv 0, \quad 0 < x < l(t), \ t > t^*$$
$$c(x, 0) = c^*, \quad N(x, 0) = N_*(x) > 0$$
$$D c_x(0, t) = v(t)(c(0, t) - c_*), \quad c_x(L, t) = 0, \ t > 0$$
$$c(l(t) - 0, t) = c(l(t) + 0, t), \quad c_x(l(t) - 0, t) = c_x(l(t) + 0, t)$$
$$N(l(t) + 0, t) = 0, \ t > t^*, \quad t^* = \min\{t\colon N(0, t) = 0\}$$

Здесь m_1, m_2 — эффективная пористость грунта, D — эффективный коэффициент диффузии, $v(t)$ — скорость фильтрации, γ — коэффициент скорости растворения, c^* — концентрация предельного насыщения, c_* — концентрация растворенных солей в поступающей в грунт воде. Нижние индексы у искомых функций обозначают производные по переменным x и t.

Для задачи (1.1), описывающей первую стадию процесса $0 < t \leqslant t^*$, справедливо следующее утверждение [4,5]:

Лемма 1. Пусть выполнены следующие предположения:

$$m_2 > 0, \quad D > 0, \quad \gamma > 0, \quad c^* > c_* > 0, \quad v^* \geqslant v(t) \geqslant v_0 > 0$$
$$v(t) \in C^1[0, T], \quad v'(t) \geqslant 0, \quad N_*(x) \in C^1[0, L], \quad N_*'(x) \geqslant a > 0$$

Тогда существует единственный момент $t^* > 0$, такой, что при $0 < t \leqslant t^*$ существует единственное классическое решение задачи (1.1), причем справедливы оценки

$$c_* \leqslant c(x, t) < c^*; \quad 0 \leqslant c_x(x, t) \leqslant K_0; \quad 0 < a \leqslant N_x(x, t) \leqslant A$$
$$\alpha_0 \leqslant c_t(x, t) \leqslant 0$$

Здесь A, K_0, α_0 — константы, зависящие от коэффициентов задачи.

Будем далее изучать только вторую стадию ($t > t^*$). Возьмем за начало отсчета времени момент $t = t^*$, а в качестве начальных условий — функции $c_0(x) = c(x, t^*)$, $N_0(x) = N(x, t^*)$. Заметим, что для них справедливы оценки леммы 1. Рассмотрим задачу (1.1) в указанных предположениях.

Определение. Решением задачи (1.1) ($t > t^*$) будем называть тройку функций $c(x, t)$, $N(x, t)$, $l(t)$, таких, что $c(x, t)$, $N(x, t)$ непрерывны в $Q_T = [0, L] \times [0, T]$, удовлетворяют уравнениям, начальным и правому краевому условию из (1.1) в классическом смысле, а левому краевому условию — в смысле $\lim_{x\to 0} D c_x(x, t) = v(t)(c(0, t) - c_*)$. Условие сопряжения производной c_x на кривой $l(t)$ выполняется в смысле

$$\lim_{\varepsilon\to 0} | c_x(l(t) - \varepsilon, t) - c_x(l(t) + \varepsilon, t) | = 0$$

Функция $l(t) \in C[0, T]$ удовлетворяет уравнению $N(l(t), t) = 0$.

2. Для обоснования существования решения этой задачи перейдем сначала к конечно-разностной задаче, для которой докажем существование и единственность решения, а затем покажем, что последовательность решений конечно-разностных задач сходится к решению исходной задачи (1.1) при стремлении шага сетки к нулю.

Рассмотрим последовательность сеток

$$w_p = \{x_i = ih_p, \quad t_j = \sum_{k=1}^{j} \tau_k, \quad i = 0, \ldots, M, \quad j = 1, \ldots, M\}$$

Здесь τ_k выбираются в соответствии с методом ловли подвижной границы в узел сетки [6]. Выбирая неявную четырехточечную схему, получим следующую конечно-разностную задачу:

$$\begin{aligned} &m_1 (c_i^j)_t = D (c_i^j)_{xx} - v^j (c_i^j)_x, \quad i = 1, \ldots, j-1 \\ &m_2 (c_i^j)_t = D (c_i^j)_{xx} - v^j (c_i^j)_x + \gamma (c^* - c_i^j), \quad i = j+1, \ldots, M-1 \\ &(N_i^j)_t = -\gamma (c^* - c_i^j), \quad i = j, \ldots, M \\ &D (c_1^j)_x = v^j (c_0^j - c_*), \quad (c_M^j)_x = 0, \quad c_i^0 = c_0 (x_i), \quad i = 0, \ldots, M \\ &(c_j^j)_x = (c_{j+1}^j)_x, \quad N_j^j = 0, \quad j = 1, \ldots, M \\ &(c_i^j)_x = (c_i^j - c_{i-1}^j) / h, \quad (c_i^j)_{xx} = (c_{i+1}^j - 2c_i^j + c_{i-1}^j) / h^2, \quad (c_i^j)_t = \\ &= (c_i^j - c_i^{j-1}) / \tau_j \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\tau_j = N_j^{j-1} / (\gamma (c^* - c_j^j)), \quad j = 1, \ldots, M \tag{2.2}$$

Последнее уравнение получено из уравнения $(N_j^j)_t = -\gamma (c^* - c_j^j)$ с учетом условия $N_j^j = 0$.

Получим ряд априорных оценок для решений задачи (2.1) — (2.2).

Лемма 2. Пусть

$$D > 0, m_1 > 0, m_2 > 0, \gamma > 0, c^* > c_* > 0, v^* \geqslant v^j \geqslant v_0 > 0$$

Тогда справедлива оценка

$$c_* \leqslant c_i^j \leqslant c^*, \quad i = 0, \ldots, M, \ j = 1, \ldots, M$$

Доказательство следует из принципа максимума [7].

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 2 и, кроме того,

$$v^j \geqslant v^{j-1}, \quad j = 1, \ldots, M, \quad \gamma > v^* K_0 / (c^* - \overset{\circ}{c}_M)$$

$$K_0 = (1 + v^* h / D)^M v^* c^* / D$$

Тогда справедливы оценки

$$(c_i^j)_t \leqslant 0, \ 0 \leqslant (c_i^j)_x \leqslant K_0, \ i = 0, \ldots, M, \ j = 1, \ldots, M$$

Доказательство проведем по индукции. Из леммы 1 имеем

$$0 \leqslant (c_i^\circ)_x \leqslant K_0, \quad D (c_i^\circ)_{xx} - v^\circ (c_i^\circ)_x + \gamma (c^* - c_i^\circ) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, M-1$$

Покажем, что $(c_i^1)_t \leqslant 0$. От противного, пусть

$$\max_{i=0,\ldots,M} (c_i^1)_t = (c_{i_0}^1)_t > 0$$

Рассмотрим следующие случаи:

1) $2 \leqslant i_0 \leqslant M-1$. В этом случае получим следующее противоречивое неравенство:

$$0 < m_2 (c_{i_0}^1)_t = D (c_{i_0}^1)_{xx} - v^1 (c_{i_0}^1)_x + \gamma (c^* - c_{i_0}^1) \leqslant D (c_{i_0}^\circ)_{xx} - v^\circ (c_{i_0}^\circ)_x + \\ + \gamma (c^* - c_{i_0}^\circ) - (v^1 - v^\circ) (c_{i_0}^\circ)_x \leqslant 0$$

2) $i_0 = 1$. В этом случае из (2.1) следует

$$(c_1^\circ)_{xx} = -\tau_1 ((c_1^1)_t)_{xx} \geqslant 0$$

С другой стороны, из индуктивного предположения и условий леммы имеем

$$D (c_1^\circ)_{xx} \leqslant v^\circ (c_1^\circ)_x - \gamma (c^* - c_1^\circ) \leqslant v^* K_0 - \gamma (c^* - \overset{\circ}{c}_M) < 0$$

что также приводит к противоречию.

3) При $i_0 = 0$ и $i_0 = M$, используя граничные условия, опять получаем противоречие. Следовательно, $(c_i^1)_t \leqslant 0$.

Предположим теперь, что при $j = 1, \ldots, n$ искомые неравенства выполнены, и докажем их справедливость при $j = n + 1$.

Начнем с доказательства неравенства $(c_i^n)_x \geqslant 0$. Предположим противное:

$$\min_{i=0,\ldots,M} (c_i^n)_x = (c_{i_0}^n)_x < 0$$

Используя далее индуктивное предположение и уравнения (2.1), получаем противоречие при любом значении $i_0 \in [0 : M]$. Это означает, что $(c_i^n)_x \geqslant 0$ для всех $i = 0, \ldots, M$.

Для доказательства неравенства $(c_i^n)_x \leqslant K_0$ воспользуемся левым граничным условием из (2.1) и получим

$$(c_1^n)_x \leqslant v^* (c^* - c_*) / D$$

Кроме того, из индуктивного предположения имеем

$$m_2 (c_i^n)_t = D\,[(c_{i+1}^n)_x - (c_i^n)_x] - v^n (c_i^n)_x + \gamma (c^* - c_i^n) \leqslant 0$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$(c_i^n)_x \leqslant (1 + v^* h / D)^M v^* c^* / D$$

Наконец, аналогично доказательству оценки $(c_i^1)_t \leqslant 0$ найдем, что $(c_i^{(n+1)})_t \leqslant 0$.

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 3 и c_{1i}^n, c_{2i}^n — решения задачи (2.1) при $\tau_n = \tau_{1n}$, $\tau_n = \tau_{2n}$ соответственно.

Тогда, если $\tau_{2n} > \tau_{1n}$, то $c_{2i}^n \leqslant c_{1i}^n$, $i = 0, \ldots, M$.

Для доказательства рассмотрим разность $z_i^n = c_{2i}^n - c_{1i}^n$.

Функция z_i^n удовлетворяет следующим уравнениям:

$$m_i z_i^n / \tau_{1n} + (c_{1i}^n)_t (\tau_{1n} / \tau_{2n} - 1) = D (z_i^n)_{xx} - v_2^n (z_i^n)_x - \gamma_i z_i^n -$$
$$- (v_2^n - v_1^n) (c_{1i}^n)_x$$
$$i = 1, \ldots, n - 1, \quad m_i = m_1, \quad \gamma_i = 0$$
$$i = n + 1, \ldots, M - 1, \quad m_i = m_2, \quad \gamma_i = \gamma$$
$$(z_n^n)_{xx} = 0, \quad D (z_1^n)_x = v_2^n z_0^n + (v_2^n - v_1^n) (c_{10}^n - c_*), \quad (z_M^n)_x = 0$$

Проводя рассуждения от противного и учитывая оценки лемм 2, 3, получаем, что $z_i^n \leqslant 0$, $i = 0, \ldots, M$, и, следовательно, $c_{2i}^n \leqslant c_{1i}^n$.

Лемма 5. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда справедливы оценки

$$0 < H_0 \leqslant \tau_j / h \leqslant H^*, \quad j = 1, \ldots, M; \quad 0 < a \leqslant (N_i^j)_x \leqslant$$
$$\leqslant K_2, \quad i = 0, \ldots, M$$
$$N_j^{j+1} \geqslant ah > 0$$

Здесь константы H_0, H^*, K_2 не зависят от τ_j, h.

Действительно, из уравнения $(N_i^j)_t = -\gamma (c^* - c_i^j)$ имеем

$$N_i^j - N_i^\circ = - \sum_{k=1}^{j} \tau_k \gamma (c^* - c_i^k) \tag{2.3}$$

$$(N_i^j)_x = (N_i^\circ)_x + \sum_{k=1}^{j} \tau_k \gamma (c_i^k)_x$$

Пользуясь уравнением (2.2) для τ_j, получим

$$\frac{\tau_j}{h} = \left[(N_j^\circ)_x + \sum_{k=1}^{j-1} \tau_k \gamma (c_j^k)_x\right] \Big/ (\gamma (c^* - c_j^j)) \tag{2.4}$$

Отсюда сразу вытекает нижняя оценка $\tau_j / h \geqslant a / \gamma c^*$. Для получения верхней оценки τ_j / h выведем следующее неравенство:

$$\frac{\tau_j}{h} \leqslant \left(A + \gamma K_0 \sum_{k=1}^{j-1} \tau_k\right) \Big/ (\gamma (c^* - \overset{\circ}{c}_M))$$

Запишем это неравенство в виде

$$t_j \leqslant (1 + hK_0 / (c^* - c_M{}^\circ))\, t_{j-1} + hA / (\gamma (c^* - c_M{}^\circ))$$

Опираясь на это неравенство, получим следующую оценку:

$$t_j \leqslant (1 + hK_0 / (c^* - c_M{}^\circ))^{j-1} A / \gamma K_0 \leqslant C_1$$

Теперь необходимые оценки непосредственно следуют из равенств (2.3) — (2.4).

Лемма 6. Пусть выполнены условия леммы 3 и $(v^j - v^{j-1}) / \tau_j \leqslant P$. Тогда существует такое $K_1 < 0$, что

$$(c_i^j)_t \geqslant K_1, \quad i = 0, \ldots, M, \quad j = 1, \ldots, M$$

причем K_1 не зависит от h, τ_j.

Доказательство проводится по индукции. Из леммы 1 имеем оценку

$$m_2\alpha_0 \leqslant D (c_i^\circ)_{xx} - v^\circ (c_i^\circ)_x + \gamma (c^* - c_i^\circ), \quad \alpha_0 < 0$$

Докажем, что $(c_i^1)_t \geqslant \alpha_1$, где

$$\alpha_1 < \min \{(m_2\alpha_0 - PK_0\tau_1) / (m_2 + \gamma\tau_1), \quad -P (c^* - c_*) / v_0\}$$

Предположим противное:

$$\min_{i=0,\ldots,M} (c_i^1)_t = (c_{i_0}^1)_t < \alpha_1$$

Сначала рассмотрим случай $i_0 = 1$. Имеем $D (c_1^1)_{xx} = 0$ и $D (c_1^\circ)_{xx} - v^\circ (c_1^\circ)_x + \gamma (c^* - c_1^\circ) \geqslant m_2\alpha_0$. Отсюда

$$\tau_1 D (-(c_1^1)_t)_{xx} - v^\circ (c_1^\circ)_x + \gamma (c^* - c_1^\circ) \geqslant m_2\alpha_0 \tag{2.5}$$

$$(c_1^1)_t - (c_0^1)_t \geqslant h^2 (m_2\alpha_0 - \gamma c^*) / (D\tau_1)$$

С другой стороны, из граничных условий в (2.1) имеем

$$(c_1^1)_t - (c_1^\circ)_t = [v^1\tau_1 (c_0^1)_t + (v^1 - v^\circ)(c_0^\circ - c_*)]\, h / (D\tau_1) \tag{2.6}$$

Из (2.5) — (2.6) при достаточно малом $h > 0$ получаем неравенство

$$0 \leqslant (m_2\alpha_0 - \gamma c^*)(h / \tau_1 - v^1h^2 / D\tau_1) + (c^* - c_*)(v^1 - v^\circ) / \tau_1 + v^1\alpha_1 \leqslant$$
$$\leqslant P (c^* - c_*) + v^\circ\alpha_1$$

Однако в силу выбора α_1 $P (c^* - c_*) + v^\circ\alpha_1 < 0$, т. е. полученное неравенство противоречиво. Случай $i_0 \neq 1$ также приводит к противоречию. Следовательно, $(c_i^1)_t \geqslant \alpha_1$.

Предположим теперь, что для всех $k = 1, \ldots, n - 1$ выполнено неравенство $(c_i^k)_t \geqslant \alpha_k$, и покажем, что $(c_i^n)_t \geqslant \alpha_n$, где $\alpha_n < 0$ выбирается из условия

$$\alpha_n < \min \left\{ \frac{m_2\alpha_{n-1} - PK_0\tau_n}{m_2 + \gamma\tau_n}, \quad -\frac{v^*K_0}{m_1}, \quad -\frac{2(2\gamma c^* + v^*K_0)}{m_1 - m_2}, \quad \alpha_n^* + \right.$$
$$\left. + \frac{m_2\alpha_{n-1} - \gamma c^*}{D\tau_n} h^2 \right\}$$

$$\alpha_n^* < \min \{\alpha_{n-1} - PK_0\tau_n / m_1, \quad -P (c^* - c_*) / v_0\}$$

Заметим сначала, что $(c_i^n)_t$ при $i = 0, \ldots, n-2$ не может достигать локального минимума, меньшего α_n^*. Это доказывается от противного с учетом уравнений и граничных условий (2.1).

Покажем теперь, что $(c_i^n)_t \geqslant \alpha_n$ для всех $i = 0, \ldots, M$.

Предположим, что

$$\min_{i=0,\ldots,M} (c_i^n)_t = (c_{i_0}^n)_t < \alpha_n$$

Так как $\alpha_n < \alpha_n^*$, то этот минимум в силу предыдущего замечания не может достигаться при $i_0 = 0, \ldots, n-2$. Рассмотрим оставшиеся случаи:

а) $i_0 = n-1$. Имеем $D(c_{n-1}^n)_{xx} = m_1(c_{n-1}^n)_t + v^n(c_{n-1}^n)_x$ и $D(c_{n-1}^{n-1})_{xx} = 0$. Тогда в силу выбора $\alpha_n < 0$

$$0 \leqslant \tau_n D((c_{n-1}^{n-1})_t)_{xx} = m_1(c_{n-1}^n)_t + v^n(c_{n-1}^n)_x < m_1\alpha_n + v^*K_0 < 0$$

Из полученного противоречия следует, что этот случай невозможен.

б) $i_0 = n$. В этом случае $D(c_n^n)_{xx} = 0$, $D(c_n^{n-1})_{xx} = m_2(c_n^{n-1})_t + v^{n-1}(c_n^{n-1})_x - \gamma(c^* - c_n^{n-1})$. Отсюда следует неравенство

$$0 \leqslant (c_{n-1}^n)_t - (c_n^n)_t \leqslant (-m_2\alpha_{n-1} + \gamma c^*)h^2/(D\tau_n) \tag{2.7}$$

Докажем, что $(c_{n-1}^n)_t \leqslant (c_{n-2}^n)_t$. Предположим, что $(c_{n-1}^n)_t > (c_{n-2}^n)_t$. Тогда из (2.7) имеем

$$\min_{i=0,\ldots,n-2}(c_i^n)_t \leqslant (c_{n-2}^n)_t < (c_{n-1}^n)_t \leqslant (c_n^n)_t + (-m_2\alpha_{n-1} + \gamma c^*)h^2/D\tau_n < \alpha_n^*$$

Однако $(c_i^n)_t$, как было отмечено ранее, не может достигать при $i = 0, \ldots, n-2$ минимума, меньшего α_n^*. Следовательно, сделанное предположение неверно и в действительности $(c_{n-1}^n)_t \leqslant (c_{n-2}^n)_t$.

Имеем далее

$$D(c_{n-1}^{n-1})_{xx} = 0, \quad D(c_{n-1}^n)_{xx} = m_1(c_{n-1}^n)_t + v^n(c_{n-1}^n)_x$$

Вычитая первое равенство из второго, получаем

$$[(c_n^n)_t - (c_{n-1}^n)_t]D\tau_n/h^2 = [(c_{n-1}^n)_t - (c_{n-2}^n)_t]D\tau_n/h^2 + m_1(c_{n-1}^n)_t + v^n(c_{n-1}^n)_x$$

Отсюда с учетом (2.7) и неравенства $(c_{n-1}^n)_t \leqslant (c_{n-2}^n)_t$ получаем

$$m_2\alpha_n - \gamma c^* \leqslant m_2\alpha_{n-1} - \gamma c^* \leqslant [(c_n^n)_t - (c_{n-1}^n)_t]D\tau_n/h^2 \leqslant m_1\alpha_n + (-m_2\alpha_n + \gamma c^*)m_1h^2/(D\tau_n) + v^*K_0$$

Из этого неравенства вытекает следующее:

$$[m_1 - m_2 + m_1m_2h^2/(D\tau_n)]\alpha_n \leqslant \gamma c^* + m_1\gamma c^*h^2/(D\tau_n) + v^*K_0$$

Учитывая выбор α_n, при достаточно малом $h > 0$ получаем противоречивое неравенство. Следовательно, $(c_i^n)_t \geqslant \alpha_n$, $i = 0, \ldots, M$. Отсюда вытекает существование константы $K_1 < 0$, такой, что $(c_i^n)_t \geqslant K_1$, $i = 0, \ldots, M$, $n = 1, \ldots, M$.

3. Исследуем теперь вопрос о существовании решения задачи (2.1) — (2.2).

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда существует единственное решение задачи (2.1) — (2.2).

Доказательство. Предположим сначала, что τ_j, $j = 1, \ldots, M$ известны. Тогда решение задачи (2.1) — (2.2) может быть получено в явном виде с помощью метода прогонки [7], причем это решение единственно и непрерывно зависит от τ_j. Покажем теперь, что существует τ_j, удовлетворяющее уравнению (2.2). Рассмотрим для этого функцию

$$\Phi(\tau) = \tau - N_j^{j-1} / (\gamma (c^* - c_j^j))$$

При $\tau \to 0$ в силу леммы 5 $\lim_{\tau\to 0} \Phi(\tau) < 0$, а при достаточно больших $\tau > 0$ — $\Phi(\tau) > 0$. Отсюда вследствие непрерывности функции $\Phi(\tau)$ существует τ_j^*, такое, что

$$\tau_j^* = N_j^{j-1} / (\gamma (c^* - (c_j^j)^*))$$

Докажем единственность τ_j^*, $j=1, \ldots, M$. Пусть $j = 1$ и предположим, что существует два решения задачи (2.1) — (2.2): τ_1^*, c_{1i}^1, N_{1i}^1; τ_1^{**}, c_{2i}^1, N_{2i}^1, причем для определенности $\tau_1^* < \tau_1^{**}$.

Тогда, учитывая лемму 4, получаем

$$0 < \tau_1^* - \tau_1^{**} = N_1^\circ / (\gamma (c^* - c_{11}^1)) - N_1^\circ / (\gamma (c^* - c_{21}^1)) =$$
$$= N_1^\circ (c_{21}^1 - c_{11}^1) / (\gamma (c^* - c_{21}^1)(c^* - c_{11}^1)) \leqslant 0$$

Таким образом получено противоречие. К противоречию приводит и случай $\tau_1^* > \tau_1^{**}$. Следовательно, $\tau_1^* = \tau_1^{**}$. По индукции аналогично устанавливается, что $\tau_j^* = \tau_j^{**}$, $j = 2, \ldots, M$. Теорема доказана.

Остановимся подробнее на вопросах численного решения задачи (2.1) — (2.2).

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$m_1 (c_{in}^{(s)})_t = D (c_{in}^{(s)})_{xx} - v^n (c_{in}^{(s)})_x, \quad i = 1, \ldots, n-1$$
$$m_2 (c_{in}^{(s)})_t = D (c_{in}^{(s)})_{xx} - v^n (c_{in}^{(s)})_x + \gamma (c^* - c_{in}^{(s)}), \quad i = n+1, \ldots, M-1$$
$$D (c_{1n}^{(s)})_x = v^n (c_{0n}^{(s)} - c_*), \quad (c_{Mn}^{(s)})_x = 0, \quad (c_{nn}^{(s)})_{xx} = 0$$
$$(c_{in}^{(s)})_t = (c_{in}^{(s)} - c_{in-1}^{(s)}) / \tau_n^{(s)}, \quad (c_{in}^{(s)})_x = (c_{in}^{(s)} - c_{i-1n}^{(s)}) / h$$

Очередное приближение $\tau_n^{(s+1)}$ определяется по формулам

$$\tau_n^{(s+1)} = (a_{s+1} + b_{s+1}) / 2$$
$$A_s = N_n^{n-1} / (\gamma (c^* - c_{nn}^{(s)})) < \tau_n^{(s)}, \quad a_{s+1} = a_s, \quad b_{s+1} = \tau_n^{(s)}$$
$$A_s \geqslant \tau_n^{(s)}, \quad a_{s+1} = \tau_n^{(s)}, \quad b_{s+1} = b_s$$
$$\tau_n^{(0)} = N_n^{n-1} / \gamma c^*, \quad a_1 = N_n^{n-1} / \gamma c^*, \; b_1 = N_n^{n-1} / \gamma (c^* - c_{nn}^{(0)})$$

Функция $c_{in}^{(s+1)}$ при заданном $\tau_n^{(s+1)}$ вычисляется с помощью метода прогонки.

Теорема 2. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда рассмотренный итерационный процесс сходится к решению задачи (2.1) — (2.2).

Доказательство. Существование решения τ_n, c_i^n, $i = 0, \ldots, M$, следует из теоремы 1. Докажем, что $\tau_n \in [\tau_n^{(s)}, A_s]$. Предположим для определенности, что $\tau_n \leqslant \tau_n^{(s)}$. Имеем

$$A_s - \tau_n = N_n^{n-1} / (\gamma (c^* - c_{nn}^{(s)})) - N_n^{n-1} / (\gamma (c^* - c_n^n))$$

Из леммы 4 следует, что $c_{nn}^{(s)} \leqslant c_n^n$, и поэтому $A_s - \tau_n \leqslant 0$ или $A_s \leqslant \tau_n$. Случай $\tau_n \geqslant \tau_n^{(s)}$ рассматривается аналогично. Таким образом, либо $\tau_n^{(s)} \leqslant \tau_n \leqslant A_s$, либо $A_s \leqslant \tau_n \leqslant \tau_n^{(s)}$. Покажем далее, что для любого $s \geqslant 1$, $\tau_n \in [a_s, b_s]$. В самом деле, при $s = 1$

$$\tau_n^{(0)} = a_1 = N_n^{n-1} / \gamma c^* \leqslant N_n^{n-1} / (\gamma (c^* - c_n^n)) = \tau_n$$

С другой стороны, так как $\tau_n \geqslant \tau_n^{(0)}$, то в силу леммы 4

$$\tau_n - b_1 = \tau_n - \frac{N_n^{n-1}}{\gamma(c^* - c_{nn}^{(0)})} = \frac{N_n^{n-1}(c_n^{\ n} - c_{nn}^{(0)})}{\gamma(c^* - c_n^{\ n})(c^* - c_{nn}^{(0)})} \leqslant 0$$

Таким образом, $\tau_n \in [a_1, b_1]$.

Предположим теперь, что $\tau_n \in [a_s, b_s]$, и докажем, что $\tau_n \in [a_{s+1}, b_{s+1}]$. Действительно, если $\tau_n \geqslant (a_s + b_s)/2 = \tau_n^{(s)}$, то из доказанного следует $A_s \geqslant \tau_n \geqslant \tau_n^{(s)}$; выберем $a_{s+1} = \tau_n^{(s)}$, $b_{s+1} = b_s$. В результате $\tau_n \in [a_{s+1}, b_{s+1}]$. Если $\tau_n \leqslant (a_s + b_s)/2$, то $A_s \leqslant \tau_n \leqslant \tau_n^{(s)}$, и выбираем $a_{s+1} = a_s$, $b_{s+1} = \tau_n^{(s)}$. Как и ранее, получаем $\tau_n \in [a_{s+1}, b_{s+1}]$. Таким образом, τ_n, $\tau_n^{(s)} \in [a_s, b_s]$ $s \geqslant 1$.

Поскольку по построению $b_s - a_s \to 0$ при $s \to \infty$, то получаем $\tau_n^{(s)} \to \tau_n$ при $s \to \infty$. Так как c_{in} непрерывно зависит от $\tau_n^{(s)}$, то при $s \to \infty$ $c_{in}^{(s)} \to c_i^{\ n}$, $i = 0, \ldots, M$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены условия:

$$m_1 > m_2 > 0,\ D > 0,\ v^* \geqslant v^j \geqslant v_0 > 0,\ 0 \leqslant (v^j - v^{j-1})/\tau_j \leqslant \leqslant P$$

$$\gamma > v^* K_0 / (c^* - c_M^{\circ}),\ c^* > c_* > 0$$

Тогда существует единственное решение исходной задачи (1.1).

Доказательство. Рассмотрим последовательность сеток w_p, $h_p \to 0$ при $p \to \infty$. Для каждой сетки доопределим функции c_i^j, $(c_i^j)_x$, $(c_i^j)_{xx}$, $(c_i^j)_t$, N_i^j, $(N_i^j)_t$ линейным образом [8] на все Q_T и обозначим их соответственно $c^p(x, t)$, $y^p(x, t)$, $r^p(x, t)$, $s^p(x, t)$, $N^p(x, t)$, $R^p(x, t)$.

Определим, кроме того, ломаную

$$l^p(t) = jh + (t - t_j)h/\tau_j,\quad t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1},\quad j = 1, \ldots, M$$

Из леммы 5 следует, что $\{l^p\}$ компактна в $C[0, T]$, и, следовательно, существует подпоследовательность l^{p_k}, которая равномерно сходится к $l^{\circ}(t) \in C[0, T]$.

С помощью бернштейновских оценок [8] получаем, что $\{c^p\}$, $\{y^p\}$, $\{r^p\}$, $\{s^p\}$ компактны в областях $G_{1\delta} = \{(x, t) : \delta \leqslant x \leqslant l^{\circ}(t) - \delta,\ \delta \leqslant \leqslant t \leqslant T\}$ и $G_{2\delta} = \{(x, t) : l^{\circ}(t) + \delta \leqslant x \leqslant L - \delta,\ \delta \leqslant t \leqslant T\}$, а $\{N^p\}$, $\{R^p\}$ — в $G_{2\delta}$, где $\delta > 0$ — любое достаточно малое число. Отсюда вытекает существование такой подпоследовательности номеров, которую также обозначим p_k, что c^{p_k}, y^{p_k}, r^{p_k}, s^{p_k} сходятся соответственно к некоторым $c^{\circ}(x, t)$, $y^{\circ}(x, t)$, $r^{\circ}(x, t)$, $s^{\circ}(x, t)$ в любой внутренней точке Q_T, $x \neq l^{\circ}(t)$, причем равномерно в $G_{1\delta}$, $G_{2\delta}$ для любого достаточно малого $\delta > 0$. Аналогично [8] получаем, что

$$y^{\circ}(x, t) = c_x^{\circ}(x, t),\ r^{\circ}(x, t) = c_{xx}^{\circ}(x, t),\ s^{\circ}(x, t) = c_x^{\circ}(x, t)$$

Аналогично доказывается, что N^{p_k}, R^{p_k} сходятся равномерно к $N^{\circ}(x,t)$, $N_t^{\circ}(x, t)$, $l^{\circ}(t) \leqslant x \leqslant L$. Как и в [8], получаем, что $c^{\circ}(x, t)$, $N^{\circ}(x, t)$ удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям и краевым условиям в (1.1).

Из лемм 2, 3, 5, 6 вытекает, что $\{c^p\}$ компактна в Q_T, и поэтому $\{c^{p_k}\}$ сходится равномерно в Q_T к $c^{\circ}(x, t) \in C(Q_T)$, т. е. первое условие сопряжения на $l^\circ(t)$ выполняется в классическом смысле. Из этих же лемм имеем, что N^{p_k}, R^{p_k} равномерно в $[l^\circ(t), L] \times [0, T]$ сходятся к N°, $N_t^\circ \in C$. Последовательность $\{y^p\}$ компактна в $C[0, L]$ при любом фиксированном $t \in [0, T]$, что следует из лемм 3, 6, и, следовательно, $y^{p_k}(x, t_0)$ сходится равномерно к $c_x(x, t_0)$ для любого $t_0 \in [0, T]$. Отсюда, в частности, следует выполнение условия сопряжения для c_x° на $l^\circ(t)$. Наконец, учитывая условие $N_j^j = 0$ и сходимость $\{N^{p_k}\}$ и $\{l^{p_k}\}$, получаем, что $N^\circ(l^\circ(t) + 0, t) = 0$.

Таким образом, тройка $c^\circ(x, t)$, $N^\circ(x, t)$, $l^\circ(t)$ является решением задачи (1.1'). Единственность этого решения доказывается методом сжатых отображений. Теорема доказана.

Авторы благодарят Ф. П. Васильева за советы и внимание к работе.

Поступила 24 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Веригин Н. Н.* О кинетике растворения солей при фильтрации воды в грунтах. В сб.: «Растворение и выщелачивание горных пород». М., Госстройиздат, 1957.
2. *Шульгин Д. Ф., Машарипов Р.* Прогнозирование на ЭВМ солевого режима засоленных почвогрунтов при промывках. Узбекск. геол., 1971, вып. 2.
3. *Веригин Н. Н., Машарипов Р., Шульгин Д. Ф.* Растворение и вымывание солей из водонасыщенных грунтов. Вестн. с/х науки, 1977, № 1.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967.
5. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа. Успехи матем. наук, 1962, т. 17, № 3.
6. *Будак Б. М., Васильев Ф. П., Успенский А. Б.* Разностные методы решения некоторых краевых задач типа Стефана. В сб.: «Численные методы в газовой динамике», Изд-во МГУ, 1965, вып. 4.
7. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М., «Наука», 1977.
8. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М., Физматгиз, 1961.