

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ
КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ
С ВОЛНИСТЫМИ ГРАНИЦАМИ**

Л. П. Возовой, А. А. Непомнящий

(Пермь)

Задача о конвекции в вертикальном слое с гармонически искривленными границами рассматривается методами теории возмущений при малой амплитуде волнистости. Получены решения, применимые как в области устойчивости, как и в надкритической области плоскопараллельного течения. Исследуется устойчивость найденных решений по отношению к некоторому классу ограниченных в пространстве возмущений, не обязательно пространственно-периодических. При этом используется метод амплитудных функций [1], обобщенный на случай искривленных границ. Найдена зависимость критического числа Грасгофа от периода волнистости, определены форма нейтральной кривой для пространственно-периодических движений и область их устойчивости. Установлено, что если период искривления границ близок к длине волны критического возмущения для плоскопараллельного течения или вдвое ее больше, то с ростом числа Грасгофа потери устойчивости не происходит и амплитуда движения меняется непрерывно (ср. [2-4]). Производится сопоставление с результатами численного счета [5].

В работе [6] сделана попытка построить стационарное периодическое движение в слое со слабodeформированными границами в виде рядов по степеням малой амплитуды волнистости. Полученное решение, однако, расходится в окрестности нейтральной кривой плоскопараллельного течения и аппроксимирует неустойчивое движение в надкритической области невозмущенной задачи. Расчет течений при конечной амплитуде волнистости производился методом сеток в [5], где исследовалась также устойчивость течений, но только по отношению к возмущениям с волновыми числами, кратными $2\pi/l$, где l — длина расчетной области.

1. Рассматривается плоское движение жидкости в бесконечном вертикальном слое, на твердых границах которого

$$x = \pm d (1 - \eta \cos k_0 y / d)$$

поддерживаются постоянные разные температуры $T = \mp \Theta$. Систему уравнений конвекции запишем в безразмерных переменных в виде

$$(1.1) \quad \left(L - \frac{\partial}{\partial t} M \right) U + \frac{1}{2} D(U, U) = 0$$

$$U = \begin{pmatrix} \psi \\ T \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \Delta^2 & -G \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & P^{-1} \Delta \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(U_1, U_2) = \begin{pmatrix} \frac{D(\psi_1, \Delta\psi_2)}{D(x, y)} + \frac{D(\psi_2, \Delta\psi_1)}{D(x, y)} \\ \frac{D(\psi_1, T_2)}{D(x, y)} + \frac{D(\psi_2, T_1)}{D(x, y)} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{D(f, g)}{D(x, y)} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$$

Здесь ψ — функция тока, T — температура, P — число Прандтля, G — число Грасгофа, определенное по средней полуширине слоя d и разности температур Θ .

Граничные условия

$$(1.2) \quad x = \pm(1 - \eta \cos k_0 y), \quad T = \mp 1, \quad \psi = \partial \psi / \partial x = 0$$

$$(1.3) \quad y \rightarrow \pm \infty, \quad |\psi| < \infty, \quad |T| < \infty$$

Параметр η в дальнейшем предполагается малым.

2. Построим сначала стационарные решения системы (1.1) — (1.3), удовлетворяющие условию периодичности

$$(2.1) \quad U(x, y + 2\pi / k_0) = U(x, y)$$

Введем преобразование координат, спрямляющее криволинейные границы слоя

$$(2.2) \quad y' = y, \quad x' = x / (1 - \eta \cos k_0 y)$$

В новых переменных краевые условия задаются на плоских границах.

$$(2.3) \quad x' = \pm 1, \quad \psi = \partial \psi / \partial x' = 0, \quad T = \mp 1$$

а уравнения конвекции (1.1) становятся неоднородными и приобретают вид

$$(2.4) \quad LU + \frac{1}{2} D(U, U) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^n \sum_{m=-n}^n (A_{mn} U + \\ + \frac{1}{2} B_{mn}(U, U)) e^{imk_0 y'} \\ A_{-m, n} = \bar{A}_{mn}, \quad B_{-m, n} = \bar{B}_{mn}$$

(далее для краткости штрихи будут опущены). Индексы m и n имеют одинаковую четность.

При $\eta = 0$ для любых G задача (2.3), (2.4) обладает решением, соответствующим плоскопараллельному движению

$$(2.5) \quad \psi_0 = -\frac{G}{24}(1-x^2)^2, \quad T_0 = -x$$

Для умеренных значений числа Прандтля (именно этот случай в дальнейшем будет рассматриваться) данное решение становится неустойчивым по отношению к монотонно нарастающим возмущениям с периодом $2\pi/k$ при превышении порогового значения числа Грасгофа $G_0(k)$; нейтральная кривая $G_0(k)$ имеет минимум $G = G_c$ при некотором $k = k_c$. В области $G > G_c$, кроме решения (2.5), существуют также стационарные решения, периодические по y [7].

При малых $\eta \neq 0$ будем искать решение задачи (2.3), (2.4) в виде ряда по степеням η , выбрав решение (2.5) в качестве нулевого приближения

$$(2.6) \quad U = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n U^{(n)}, \quad U^{(0)} = (\psi_0, T_0)$$

Подставляя разложение (2.6) в (2.3), (2.4), получим в каждом порядке по η неоднородную краевую задачу для определения $U^{(n)}$

$$(2.7) \quad LU^{(n)} + D(U^{(0)}, U^{(n)}) = -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} D(U^{(p)}, U^{(n-p)}) + \\ + \sum_{l=1}^n \sum_{m=-l}^l \left(A_{ml} U^{(n-l)} + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-l} B_{ml}(U^{(p)}, U^{(n-l-p)}) \right) \times e^{imk_0 y}$$

$$(2.8) \quad x = \pm 1, \quad \psi^{(n)} = \partial \psi^{(n)} / \partial x = T^{(n)} = 0 \\ y \rightarrow \pm \infty, \quad |\psi^{(n)}| < \infty, \quad |T^{(n)}| < \infty$$

Индексы m и n в (2.7) имеют одинаковую четность.

Краевая задача (2.7), (2.8) разрешима при любой правой части, если

$$(2.9) \quad G \neq G_0(nk_0), \quad n \geq 1$$

Согласно данным линейной теории устойчивости плоскопараллельного течения, другие ветви нейтральной кривой, лежащие значительно выше по числу Грасгофа и связанные с тепловыми волнами [8] и волнами Толмина—Шлихтинга [9], соответствуют бегущим возмущениям с отличной от нуля частотой. По этой причине их существование не накладывает дополнительных ограничений на разрешимость задачи (2.7).

На кривой $G = G_0(nk_0)$ задача (2.7), (2.8), вообще говоря, не имеет решений, и при приближении G к $G_0(nk_0)$ функция $|U^{(n)}| \rightarrow \infty$. Это обстоятельство, установленное численно [6], обусловлено тем, что при $G = G_0(nk_0)$ краевая задача (2.7), (2.8) обладает нетривиальным решением при нулевой правой части уравнения. Расходимость функции $U^{(n)}$ свидетельствует о некорректности разложения (2.6) по степеням η вблизи нейтральной кривой, где искажение плоскопараллельности движения происходит не только за счет волнистости границ, но и в результате кризиса течения (2.5). Таким образом, в области $G \gtrsim G_0$ амплитуда неплюскопараллельной составляющей движения $\varepsilon \gtrsim \eta$, и при $\eta \rightarrow 0$ искомое решение должно переходить не в плоскопараллельное, а во вторичное течение в слое с плоскими границами.

Если, однако, надкритичность $G - G_0(nk_0)$ и величина η малы, то амплитуда ε должна быть малой. В этом случае решение также может быть построено с помощью разложений по малому параметру, в качестве которого следует, однако, брать не η , а ε .

Ограничимся рассмотрением случаев $G \approx G_0(k_0)$ и $G \approx G_0(2k_0)$. Пусть G лежит в окрестности $G_0(k_0)$. В дальнейшем будем полагать $G - G_0 = O(\varepsilon^2)$ и введем обозначение

$$(2.10) \quad G - G_0 = \varepsilon^2 G^{(2)}$$

Стационарное периодическое решение задачи (2.3), (2.4) будем искать в виде

$$(2.11) \quad U - U^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U^{(n)}, \quad U^{(0)} = (\psi_0, T_0)$$

Связь между величинами ε , η и G представим в форме

$$(2.12) \quad \eta = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \eta^{(n)}(G)$$

Подставляя (2.10) — (2.12) в (2.4) и (2.3), получаем в n -м порядке по ε краевую задачу, из условия разрешимости которой (ортогональности правой части уравнения решению сопряженной задачи) находим коэффициент $\eta^{(n)}$.

При $n = 1$ получаем уравнение, условие разрешимости которого дает $\eta^{(1)} = 0$, а решение имеет вид

$$U^{(1)} = au_1^{(1)}(x) e^{ik_0 y} + \bar{a}u_{-1}^{(1)}(x) e^{-ik_0 y}$$

Нижний индекс соответствует номеру гармоники $e^{imk_0 y}$. Комплексный коэффициент a , величина которого зависит от нормировки функции $u_1^{(1)}$, подлежит определению в следующих порядках.

Аналогично из условия разрешимости уравнений во втором порядке получаем $\eta^{(2)} = 0$, а в третьем находим связь между $\eta^{(3)}$ и a

$$(2.13) \quad JG^{(2)}a - S |a|^2 a + D\eta^{(3)} = 0$$

Явные выражения для коэффициентов J , S и D , представляющих собой скалярные произведения неоднородных правых частей уравнений и решения сопряженной линейной задачи, ввиду их громоздкости не приводятся. Для нахождения функций $u_1^{(1)}$, $u_0^{(2)}$, $u_2^{(2)}$, входящих в эти выражения, использовался метод Рунге — Кутты. Приведем численные значения коэффициентов при $P = 1$, $k_0 = k_c = 1.38$ и нормировке $\operatorname{Re} \vartheta_{-1}^{(1)'} = -1$, где $u_1^{(1)} = (\varphi_1^{(1)}, \vartheta_1^{(1)})$: $J = 0.059$, $S = 2797$, $D = 18.8$.

Умножая (2.13) на ε^3 и вводя обозначение $a_1 = \varepsilon a$, получим приближенное уравнение, связывающее амплитуду неплоскопараллельной составляющей течения a_1 с величиной $G - G_0$ и параметром волнистости границ η

$$(2.14) \quad J(G - G_0) a_1 - S |a_1|^2 a_1 + D\eta = 0$$

Вводя обозначения

$$(2.15) \quad \gamma_0 = G - G_0, \quad Z = a_1 \sqrt{S/J}, \quad \eta_1 = \eta D \sqrt{S/J^3}$$

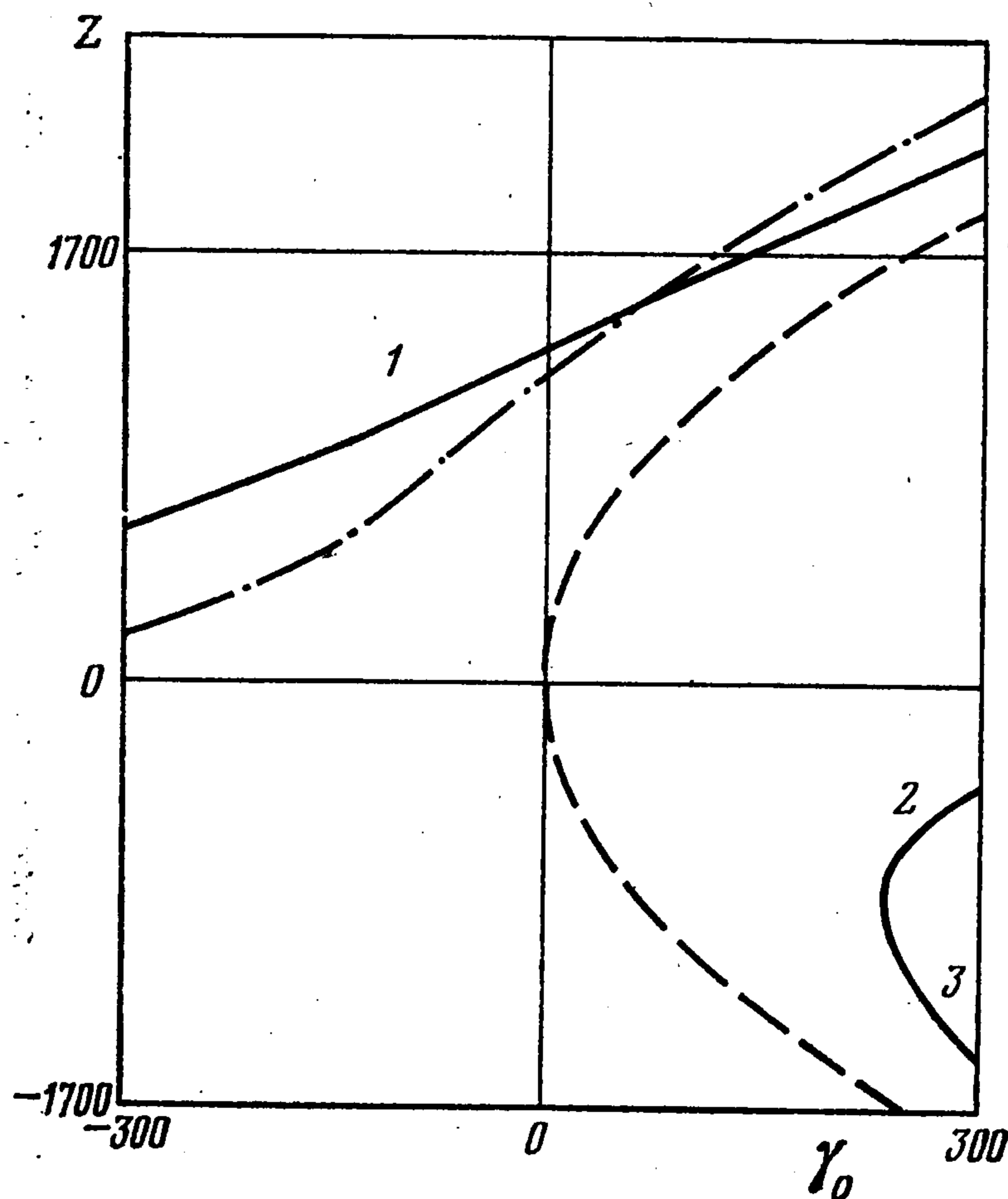
перепишем (2.14) в виде

$$(2.16) \quad \gamma_0 Z - |Z|^2 Z + \eta_1 = 0$$

Данное уравнение носит весьма общий характер. Оно описывает изменение амплитуды критической моды вблизи порога устойчивости при наличии некоторого стационарного внешнего воздействия (в данном случае — искривления границ). Аналогичное уравнение было получено ранее [2-4].

В отсутствие искривления границ ($\eta_1 = 0$) уравнение (2.16) обладает решением $Z = 0$, соответствующим плоскопараллельному течению, а при $\gamma_0 > 0$ — также множеством решений $Z = \sqrt{\gamma_0} e^{i\varphi}$, соответствующих вторичному течению. Фаза φ , определяющая положение центров вихрей относительно стенок слоя, произвольна вследствие трансляционной симметрии задачи.

Искривление границ ($\eta_1 \neq 0$) приводит к снятию вырождения по фазе: остаются только вещественные решения кубического уравнения (2.16). На фиг. 1 приведен график $Z(\gamma_0)$ при $\eta = 0.02$. Для движений, соответствующих ветви 1, центры вихрей расположены в широких участках слоя, для ветвей 2 и 3 — в узких. При $\gamma_0 = 0$ величина $Z = \eta_1^{1/2}$; координаты точки слияния ветвей 2 и 3: $\gamma_0 = 3(\eta_1/2)^{1/2}$, $Z = -(\eta_1/2)^{1/2}$. При больших $|\gamma_0|$ решения уравнения (2.16) отличаются от соответствующих решений при $\eta_1 = 0$ (изображенных на фиг. 1 штриховой линией) на величину $O(\eta_1)$. Штрихпунктирной кривой представлены решения, полученные методом сеток в [5] при тех же значениях параметров задачи, соответствующие ветви 1 (остальные ветви, как будет показано в п. 4, неустойчивы). Различие результатов аналитического и численного расчетов при $G = G_0$ составляет 7%.



Фиг. 1

Рассмотрим теперь стационарные решения задачи (2.3), (2.4) при G , близком к G_0 ($2k_0$). В этом случае функция $U^{(1)}$ в разложении (2.6) остается конечной, т. е. интенсивность первой гармоники остается порядка η . Функция $U^{(2)}$, однако, расходится, поскольку интенсивность второй гармоники при переходе через критическое (для плоскопараллельного течения) число Грасгофа становится много больше η^2 .

Положим

$$(2.17) \quad G - G_0(2k_0) = \varepsilon^2 G^{(2)}$$

и введем разложения

$$(2.18) \quad U - U^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n/2} U^{(n)}, \quad U^{(0)} = (\psi_0, T_0)$$

$$(2.19) \quad \eta = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n/2} \eta^{(n)}$$

Как и прежде, подставим (2.17) — (2.19) в (2.4), (2.3) и будем решать уравнения, получающиеся в каждом порядке по $\varepsilon^{1/2}$. Коэффициенты $\eta^{(n)}$ определяются из условий разрешимости соответствующих уравнений. Оказывается, что в разложении (2.18) первый ненулевой член для второй гармоники имеет $n = 2$, а для первой — $n = 3$. В разложении (2.19) первый ненулевой коэффициент — $\eta^{(3)}$. Опуская детали вывода, приведем

уравнение для амплитуды второй гармоники a_2

$$J (G - G_0 (2k_0)) a_2 - S |a_2|^2 a_2 + D_1 \eta^2 = 0$$

где J и S — те же коэффициенты, что и в уравнении (2.13). Численное значение нового коэффициента $D_1 = -189.7$ при $P = 1$ и $k_0 = k_c / 2$.

Таким образом, при переходе через пороговое число $G_0 (2k_0)$ происходит быстрое нарастание интенсивности второй гармоники, которая уже при $G = G_0 (2k_0)$ становится порядка $\eta^{2/3}$ и превосходит по величине первую гармонику, имеющую порядок η . При этом один из вихрей второй гармоники располагается в широкой области слоя и усиливает основную моду, а второй помещается в узкой области. Описанная картина течения качественно совпадает с получаемой при численном решении методом сеток [5].

3. Перейдем к исследованию устойчивости пространственно-периодических движений, построенных в п. 2. Для нормальных возмущений $V e^{-\lambda t}$, наложенных на стационарное решение U , получаем задачу на собственные значения

$$(3.1) \quad (L + \lambda M)V + D(U, V) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^n \sum_{m=-n}^n (A_{mn}V + \\ + B_{mn}(U, V) + \lambda C_{mn}V) e^{imk_0 y}, \quad V = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} \\ x = \pm 1, \quad \Phi = \partial \Phi / \partial x = \Theta = 0 \\ y \rightarrow \pm \infty, \quad |\Phi| < \infty, \quad |\Theta| < \infty$$

Будем рассматривать класс решений задачи (3.1), представимых в виде

$$(3.2) \quad V(x, y) = W(x, y) e^{iky}, \quad W(x, y + 2\pi / k_0) = W(x, y)$$

аналогично случаю обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [10]. Функции (3.2) реализуют представление дискретной группы трансляций вдоль оси y на расстояния, кратные $2\pi / k_0$, в соответствии с симметрией задачи (3.1). Вещественный параметр k определен с точностью до целого кратного k_0 : $k = K + nk_0$, $|K| \leq k_0 / 2$.

При $\eta = 0$ решения системы (3.1)

$$(3.3) \quad V_0 = w_{00}(x) e^{iky}$$

описывают возмущения в отсутствие волнистости границ. Функция $\lambda_0(k)$ ($\lambda_0 \equiv \lambda |_{\eta=0}$) положительна при $G < G_c$, обращается в нуль в точке $k = k_c$ при $G = G_c$, а при $G > G_c$ — отрицательна внутри некоторого интервала Δk в окрестности k_c .

Решение задачи (3.1) при $\eta \neq 0$ будем искать в виде

$$(3.4) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \eta^n, \quad \lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \eta^n$$

выбрав функцию (3.3) и декремент $\lambda_0(k)$ в качестве нулевого приближения. Тогда фурье-разложение функции V_n имеет вид

$$V_n(x, y) = e^{iky} \sum_{m=-n}^n w_{mn}(x) e^{imk_0 y}$$

В случае, когда для любого $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ выполнено неравенство

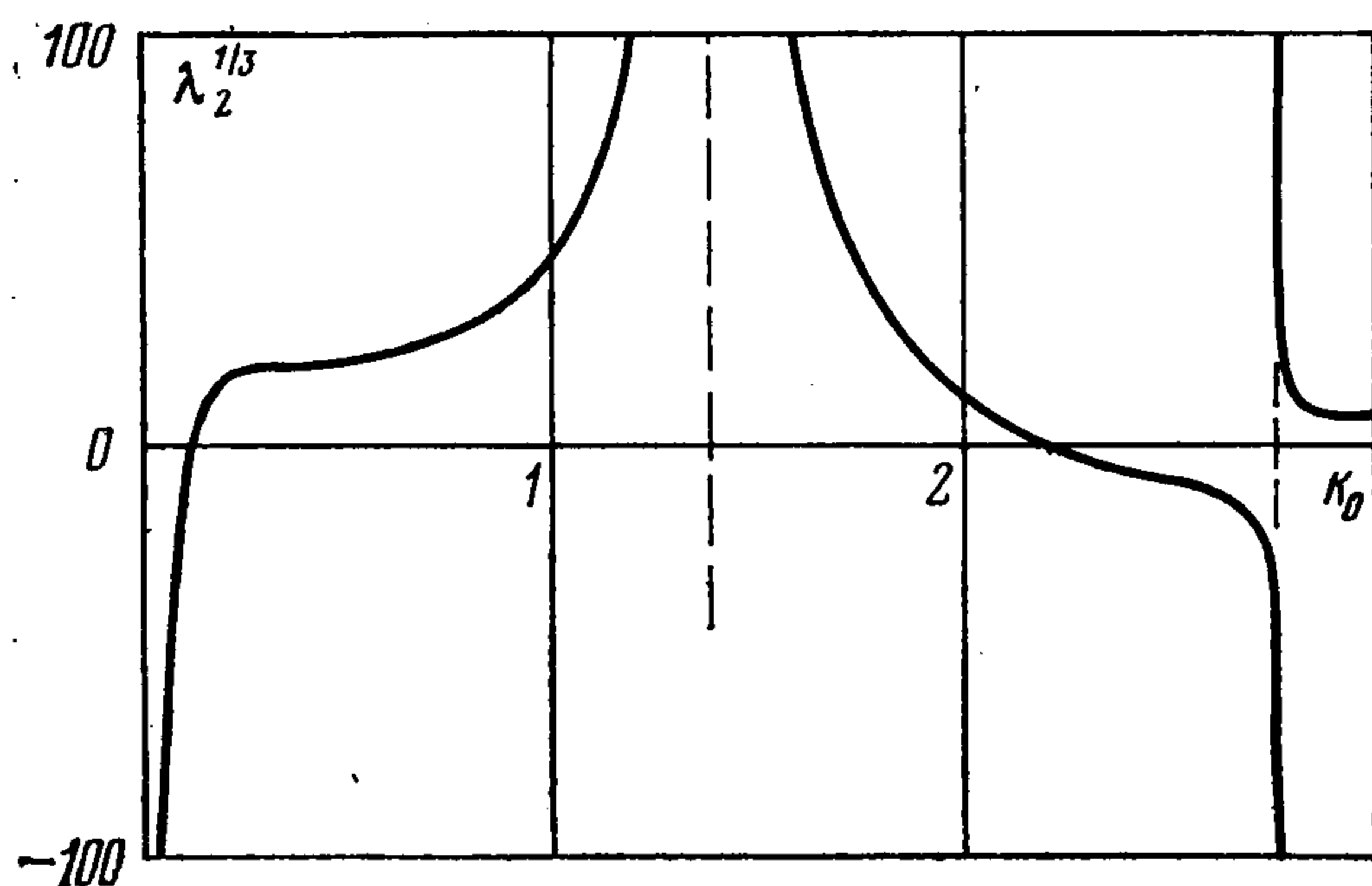
$$(3.5) \quad \lambda_0(k) \neq \lambda_0(k + mk_0)$$

коэффициент λ_n определяется из условия разрешимости уравнения для $w_{n0}(x)$. Можно показать, что для нечетных n коэффициенты $\lambda_n = 0$. Можно убедиться также, что смещение критического волнового числа вследствие искривления границ имеет порядок η^2 . При этом смещение критического числа Грасгофа определяется величиной $\lambda_2(k_c, G_c)$ и равно

$$G - G_c = \frac{\lambda_2(k_c, G_c)}{(d\lambda/dG)_{k_c, G_c}} \eta^2$$

Значениям $\lambda_2 > 0$ соответствует стабилизация, $\lambda_2 < 0$ — дестабилизация течения; при $P = 1$ производная $(d\lambda/dG)_{k_c, G_c} = -0.0235$. Зависимость величины $\lambda_2(k_c, G_c)$ от k_0

изображена на фиг. 2 ($P = 1$).



Фиг. 2

4. Особого рассмотрения требуют случаи $k_0 = 0, k_c$ и $2k_c$, для которых величина λ_2 обращается в бесконечность. Можно показать, что в следующих порядках расходятся коэффициенты λ_{2n} при $k_0 = k_c/n$ и $k_0 = 2k_c/n$. Расходимость λ_{2n} обусловлена следующими причинами. В точках $k_0 = 2k_c/n$ имеет место равенство $\lambda_0(k_c) = \lambda_0(k_c - nk_0)$, что приводит к нарушению условия (3.5) для $k = k_c$. При рассмотрении этих случаев необходимо видоизменение теории возмущений. Нарастание коэффициентов разложения (3.4) при $k_0 \rightarrow 0$ также обусловлено близостью величин $\lambda_0(k)$ и $\lambda_0(k + mk_0)$. В точках $k_0 = k_c/n$ достигается равенство $G_0(nk_0) = G_c$, в результате чего нарушается условие (2.9), и для основного течения разложение (2.6) неприменимо.

Рассмотрим сначала те особые случаи, для которых условие (2.9) выполняется ($k_0 \rightarrow 0$ и $k_0 = 2k_c/n$), где n — нечетное число.

При $k_0 \rightarrow 0$ (т. е. при очень медленном изменении толщины слоя) возмущения, локализованные в широкой части слоя, будут обладать декрементами затухания, близкими к декрементам возмущений плоскопараллельного течения в плоском канале с полушириной $1 + \eta$. Неустойчивость наступает при

$$G = G_c / (1 + \eta)^3$$

т. е. $G - G_c \approx -3\eta G_c$.

При $k_0 = 2k_c$ имеет место равенство $\lambda_0(k_c) = \lambda_0(k_c - k_0)$. В этом случае в качестве функции нулевого приближения следует взять суперпозицию

$$V_0 = c_1 w_{0,0}(x) e^{ik_c y} + c_2 w_{0,-1}(x) e^{-ik_c y}, \quad w_{0,-1} = \bar{w}_{0,0}$$

с неопределенными коэффициентами (см., например, [11]). В следующем порядке условия разрешимости для $w_{1,0}$ и $w_{-1,1}$ дают систему уравнений

$$(4.1) \quad I\lambda_1 c_1 - Fc_2 = 0, \quad Fc_1 - I\lambda_1 c_2 = 0$$

Явные выражения для коэффициентов F и I не приводим; при $P = 1$ и $k_c = 1.38$ имеем $F = -45.5$, $I = 2.56$. Система (4.1) имеет два решения $c_1 = \pm c_2$, для которых $\Phi_0(0, y)$ — соответственно четная и нечетная функция y ; при этом

$$\lambda_1 = \pm F / I$$

Видно, что для четной моды имеет место дестабилизация, поэтому она возбуждается при меньших значениях G , чем нечетная, что согласуется с результатами численного счета [5].

Аналогично можно показать, что при $k_0 = 2k_c / n$ (n — нечетное число) для четной и нечетной мод появляется отличная от нуля λ_n .

Рассмотрим теперь случай, когда $k_0 \approx k_c$. Для значений G , близких к G_c , которые представляют наибольший интерес с точки зрения устойчивости, разложения (2.6) неприменимы, и амплитуда неплоскопараллельной составляющей стационарного движения описывается уравнением (2.14).

Чтобы исследовать устойчивость движения по отношению к возмущениям той же периодичности, что и само течение, достаточно повторить вывод уравнения (2.14), считая амплитуду a функцией медленного времени $\varepsilon^2 t$ (см. [1]). При этом получаем уравнение, которое отличается от (2.14) членом $I \partial a_1 / \partial t$ в правой части (I — тот же коэффициент, что и в уравнениях (4.1)). Используя обозначения (2.15), приведем амплитудное уравнение к виду

$$\partial Z / \partial T = \gamma_0 Z - |Z|^2 Z + \eta_1 \quad (T = Jt / I)$$

Для возмущений $ze^{-\lambda T}$, наложенных на стационарное решение Z_0 , удовлетворяющее (2.16), получаем уравнение

$$\lambda z + \gamma_0 z - 2Z_0^2 z - Z_0^2 \bar{z} = 0$$

Оно имеет два решения

$$z = -\bar{z}, \quad \lambda = Z_0^2 - \gamma_0; \quad z = \bar{z}, \quad \lambda = 3Z_0^2 - \gamma_0$$

Первый тип возмущений, наиболее опасный, соответствует сдвигу фазы функции Z (т. е. пространственному сдвигу всей системы вихрей при сохранении неизменной интенсивности); второй тип — изменению ее амплитуды. Можно убедиться, что устойчива только ветвь 1; ветвь 3 неустойчива по отношению к возмущениям первого типа, а ветвь 2 — к возмущениям обоих типов. Обратим внимание на то, что первый тип возмущений связан с комплексностью функции Z и отсутствует в задачах [2, 4], для которых ветвь 3 устойчива. Вывод об устойчивости ветви 1 и неустойчивости остальных ветвей подтверждается численными расчетами [5].

Перейдем к исследованию устойчивости стационарных движений, соответствующих ветви 1, по отношению к возмущениям общего вида (3.2). Отметим, что метод сеток позволяет рассматривать лишь возмущения с волновыми числами k , кратными величине $2\pi / l$, где l — длина расчетной области. Ситуация, когда параметры k и $2\pi / l$ связаны произвольно, в частности близки, недоступна этому методу.

Поскольку в области $G \approx G_c$ интерес с точки зрения устойчивости представляют только возмущения с волновыми числами, близкими к k_c (т. е. с малыми K), для исследования устойчивости применим метод многих масштабов в форме, предложенной в [1]. Опуская детали вывода, приведем окончательный вид уравнения для амплитудной функции a_1 , зависящей от медленных переменных времени $\varepsilon^2 t$ и координаты εy

$$I \frac{\partial a_1}{\partial t} = R \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2} + J(G - G_c) a_1 - S |a_1|^2 a_1 + D \eta e^{i(k_0 - k_c) y}$$

При $P = 1$ значение нового коэффициента $R = 14.25$. Используя обозначения (2.15), получаем

$$\begin{aligned} \partial Z / \partial T &= \partial^2 Z / \partial Y^2 + \gamma Z - |Z|^2 Z + \eta_1 e^{iK_0 Y} \\ Y &= y \sqrt{J / R}, \quad K_0 = k_0 - k_c, \quad \gamma = G - G_c, \quad T = Jt / I. \end{aligned}$$

Стационарным решениям с периодом $2\pi / k_0$ соответствует амплитудная функция

$$(4.2) \quad Z_0 = r e^{iK_0 Y}, \quad r^3 - (\gamma - K_0^2) r - \eta_1 = 0$$

Для малых возмущений $ze^{-\lambda T}$, наложенных на решение (4.2), получаем уравнение

$$\lambda z + d^2 z / dY^2 + \gamma z - 2Z_0^2 z - Z_0^2 \bar{z} = 0$$

решения которого имеют вид

$$z = ae^{i(K_0+K)y} + be^{i(K_0-K)y}$$

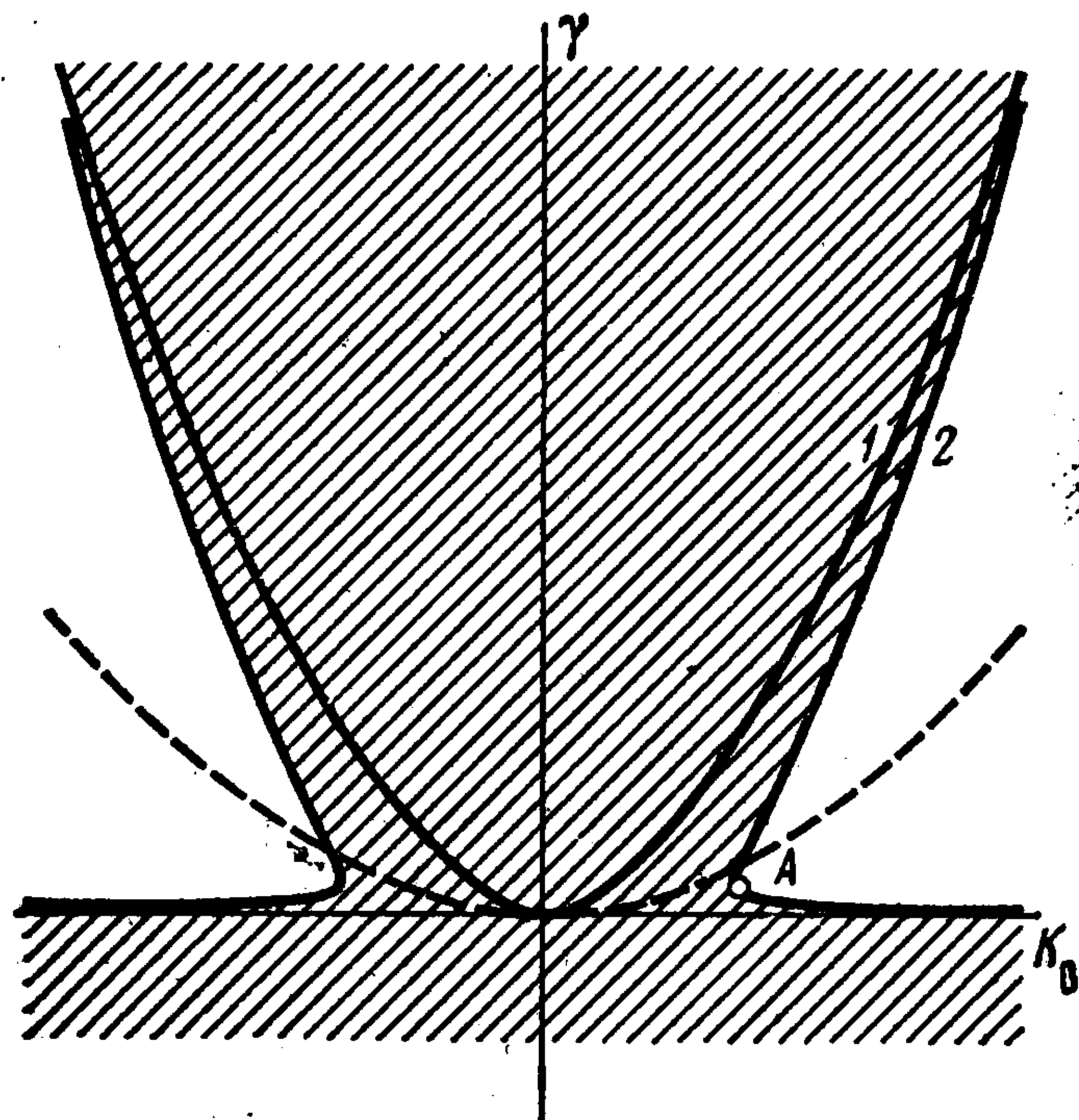
а две ветви декремента описываются формулой

$$\lambda_{\pm} = K^2 + r^2 + \eta_1 / r \pm \sqrt{4K^2 K_0^2 + r^4}$$

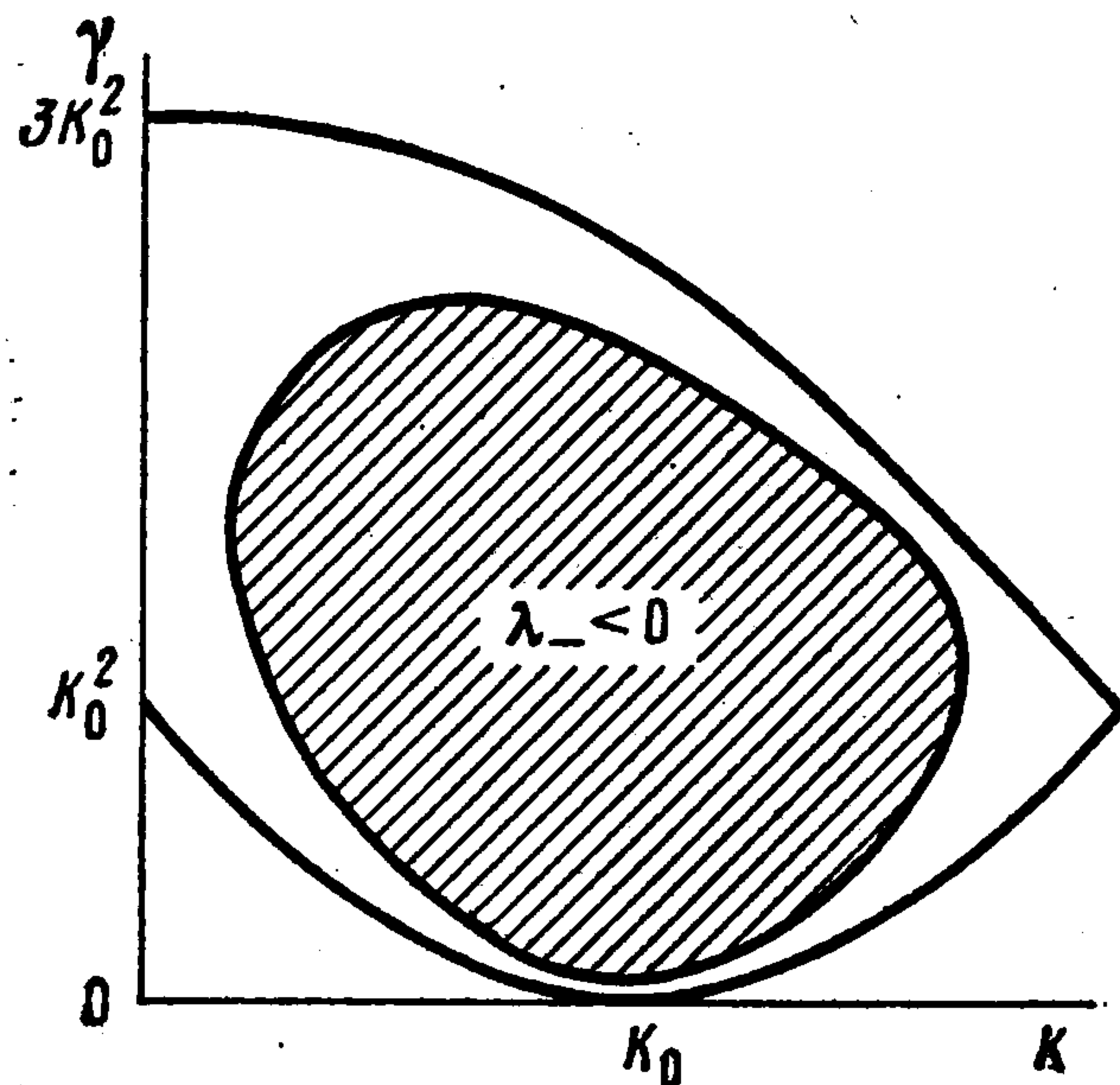
Область устойчивости стационарных периодических движений при k_0 , близких к k_c , заштрихована на фиг. 3; ее граница (линия 2) описывается уравнением

$$\gamma - 2r^2 + r^4 / (4K_0^2) = 0$$

При $\eta \rightarrow 0$ граница устойчивости распадается на две части: $\gamma = 0$ для плоскопараллельного течения, $\gamma = 3K_0^2$ для вторичного течения согласно [12] (кривая 1). Координаты точки A: $K_A^3 = 2.47\eta_1$, $\gamma_A = 0.76 K_A^2$. В интервале $|K_0| < K_A$ при переходе



Фиг. 3



Фиг. 4

через критическое (для плоскопараллельного течения) число Грасгофа G_c потери устойчивости не происходит, и амплитуда движения меняется непрерывно. При $|K_0| > K_A$ с ростом числа Грасгофа периодическое движение сначала теряет устойчивость, а затем снова становится устойчивым. Пунктиром показана нейтральная кривая плоскопараллельного течения.

На фиг. 4 изображена нейтральная кривая (граница $\lambda_- = 0$) для течения с $k_0 = k_c + K_0$ (заштрихована область неустойчивости). При $\eta \rightarrow 0$ кривая распадается на две части: $\gamma = (K - |K_0|)^2$ при $0 < \gamma < K_0^2$ (нейтральная кривая плоскопараллельного течения) и $\gamma = 3K_0^2 - K^2 / 2$, $K = 0$ при $\gamma > K_0^2$ (нейтральная кривая вторичного движения). Интервал неустойчивых волновых чисел максимален при $\gamma = K_0^2$ и обращается в нуль при $\gamma = 3K_0^2$. В области $\gamma > 3K_0^2$ вторичное движение остается устойчивым по отношению к любым плоским возмущениям.

Искривление границ ($\eta_1 \neq 0$) сужает область неустойчивости пространственно-периодических движений в соответствии с фиг. 3.

Анализ устойчивости для случая $k_0 \approx k_c / 2$ аналогичен произведенному выше для $k_0 \approx k_c$, изменяется только связь между η_1 и η — теперь $\eta_1 = O(\eta^2)$.

Авторы благодарят Е. М. Жуховицкого за предоставление темы и внимание к работе, а также Г. З. Гершуни за полезное обсуждение.

Поступила 12 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stewartson K., Stuart J. T.* A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 48, pt 3.
2. *Чернатынский В. И., Шлиомис М. И.* Конвекция вблизи критических чисел Рейлея при почти вертикальном градиенте температуры. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1973, № 1.
3. *Возовой Л. П., Непомнящий А. А.* Конвекция в горизонтальном слое при наличии пространственной модуляции температуры на границах. В сб.: *Гидродинамика*, вып. 7. Пермь, 1974.
4. *Тарунин Е. Л.* Конвекция в замкнутой полости, подогреваемой снизу, при нарушении условия равновесия. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1977, № 2.
5. *Возовой Л. П.* Конвекция в вертикальном слое с волнистыми границами. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1976, № 2.
6. *Watson A., Poots G.* The effect of sinusoidal protrusions on laminar free convection between vertical walls. *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 49, pt 1.
7. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л.* Вторичные стационарные конвективные движения в плоском вертикальном слое жидкости. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1968, № 5.
8. *Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н.* О колебательной неустойчивости плоскопараллельного конвективного движения в вертикальном канале. *ПММ*, 1972, т. 36, вып. 4.
9. *Gotoh K., Satoh M.* The stability of a natural convection between two parallel vertical planes. *J. Phys. Soc. Japan*, 1966, vol. 21, No. 3.
10. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц А. М.* Теоретическая физика, т. 3. Квантовая механика. М., «Наука», 1974.
12. *Непомнящий А. А.* О вторичных конвективных движениях в плоском вертикальном слое. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1975, № 4.