Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 532.516

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ БЮРГЕРСА

В. В. Шелухин

(Новосибирск)

Рассматривается краевая задача для уравнений Бюргерса сжимаемой жидкости. Доказывается существование периодического решения, которое получается как предел решений начально-краевых задач, когда момент задания начальных данных стремится к минус бесконечности.

1. Постановка задачи. Система уравнений вязкого газа превращается в обобщенную систему Бюргерса (см. [1]), если в уравнении сохранения импульса пренебречь градиентом давления. В массовых лагранжевых переменных [2] эта система имеет вид

$$u_t = \mu\,(\rho u_x)_x, \quad v_t = u_x, \quad v = \rho^{-1} \quad (\mu = \mathrm{const} > 0) \tag{1.1}$$

Здесь u — скорость, ρ — плотность, v — удельный объем, μ — коэффициент вязкости газа.

В отличие от известного уравнения Бюргерса и модели турбулентности Бюргерса [3] обобщенная система учитывает сжимаемость газа. Задачи с начальными данными для уравнений (1.1) исследовались в [1, 4, 5]. Цель данной работы — доказать, что если в правой части первого уравнения (1.1) присутствует в качестве слагаемого заданная функция $f\,(x, t)$, периодическая по t с периодом T, то система (1.1) допускает периодическое решение с тем же периодом. Для модели Бюргерса и модели турбулентности Бюргерса факт существования периодических решений установлен в [6–8].

Введем обозначения

$$Q = \{(x, t)\colon x \in (0, M) = \Omega,\ t \in (-\infty, \infty)\} \quad (M = \mathrm{const} > 0)$$
$$\Gamma = \{(a, t)\colon\ a \in \{0, M\},\ \ t \in (-\infty, \infty)\}, \quad \overline{Q} = Q \cup \Gamma$$

Рассмотрим задачу: найти такие периодические по t (с периодом T) функции $u\,(x, t)$, $v\,(x, t)$, чтобы в полосе Q они удовлетворяли в классическом смысле уравнениям (1.2), а на границе области Q соблюдалось условие (1.3):

$$u_t = \mu\,(\rho u_x)_x + f, \quad v_t = u_x, \quad v = \rho^{-1} \tag{1.2}$$

$$u\,|_\Gamma = 0 \tag{1.3}$$

Кроме того, на функцию v накладываются ограничения

$$v\,(x, t) > 0, \quad (x, t) \in \overline{Q} \tag{1.4}$$
$$\int_\Omega v\,(x, t)\,dx = V, \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (V = \mathrm{const} > 0)$$

Величины M, V имеют следующий физический смысл: M — полная масса газа, V — полный объем, занимаемый газом.

Необходимым условием существования периодического решения системы (1.2) служит

$$\int_t^{t+T} f(x,s)\,ds = 0, \quad (x,t)\in\bar Q \tag{1.5}$$

ибо из (1.2) следует

$$f = \frac{\partial}{\partial t}\left(u - \mu\frac{\partial}{\partial x}\ln v\right) \tag{1.6}$$

Поэтому в дальнейшем считаем, что для функции f справедливо условие (1.5). При решении задачи (1.2) — (1.4) (назовем ее П-задачей) воспользуемся схемой, предложенной в [9] для линейных параболических уравнений, т. е. построим решение П-задачи как предел решений начально-краевых задач, когда момент задания начальных данных стремится к $-\infty$. Для этого понадобятся равномерные по времени оценки начально-краевых задач.

2. Оценки начально-краевой задачи. Назовем задачей K следующую задачу:

$$\begin{gathered} u_t = \mu(\rho u_x)_x + f, \quad v_t = u_x, \quad (x,t)\in Q_0 \\ u|_\Gamma = 0; \quad u(x,0)=0, \quad v(x,0) = VM^{-1}\equiv V_0, \quad x\in\bar\Omega \\ (Q_0 = Q\cap(t>0), \quad \Gamma_0 = \Gamma\cap(t\geqslant 0)) \end{gathered} \tag{2.1}$$

Если f — достаточно гладкая функция, то существование на любом интервале времени единственного гладкого решения задачи K с положительной функцией v доказано в [4, 5], причем в зависимости от гладкости f гладкость решения может быть любой. Например, если $f\in H^{\alpha,\alpha/2}(Q_0)$, то

$$u\in H^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(Q_0), \quad v\in H^{1+\alpha,\,1+\alpha/2}(Q_0) \quad (0<\alpha<1)$$

В дальнейшем считаем, что $f\in H^{\alpha,\alpha/2}(\bar Q)$.

Лемма 1. Пусть u, v — решение задачи K. Тогда для функции u справедлива оценка

$$|u|_0 \leqslant (1+V)|f|_0^{1/2} \quad \left(|f|_0 = \sup_{\bar Q_0}|f|, \quad \bar Q_0 = \bar Q\cap(t\geqslant 0)\right) \tag{2.2}$$

Доказательство. Положим

$$\omega_i = 1 + (i-1)V + (3-2i)\int_0^x v(y,t)\,dy, \quad z_i = \frac{u}{\omega_i}, \quad i=1,2$$

Функция z_i есть решение задачи

$$\begin{gathered} [z_{it} - \mu(\rho z_{ix})_x]\omega_i = (2i-3)z_i^2\omega_i + 2\mu\rho z_{ix}\omega_{ix} + f, \quad (x,t)\in Q_0 \\ z_i|_{\Gamma_0} = 0, \quad z_i(x,0)=0, \quad i=1,2 \end{gathered}$$

Применим к ней принцип максимума, учитывая, что $1\leqslant\omega_i\leqslant 1+V$. Имеем

$$(3-2i)z_i \leqslant |f|_0^{1/2} \quad (i=1,2)$$

Отсюда следует оценка (2.2).

В дальнейшем буквой c будем обозначать постоянную положительную величину, которая зависит только от μ, M, V, T и f.

Лемма 2. Пусть u, v — решение задачи K, тогда для функции v имеет место соотношение

(2.3) $$0 < c^{-1} \leqslant v \leqslant c$$

Доказательство. Проинтегрируем (1.6) по t от 0 до произвольного $t > 0$. Из условия (1.5) и оценки (2.2) получаем

(2.4) $$|(\ln v)_x|_0 \leqslant c$$

Далее, в силу интегрального ограничения (1.4) существует $x_0(t) \in \overline{\Omega}$, такое, что $v(x_0(t), t) = V_0$. Поэтому из равенства

$$\ln v = \ln V_0 + \int\limits_{x_0(t)}^{x} \frac{\partial}{\partial x} \ln v dx$$

и оценки (2.4) следует утверждение леммы 2. После этого та же оценка (2.4) дает

(2.5) $$|v_x|_0 \leqslant c$$

Лемма 3. Решение u, v задачи K подчиняется неравенствам

$$\sup_{t\geqslant 0} \int\limits_{\Omega} u_x^2(x, t)\, dx \leqslant c, \quad \sup_{t\geqslant 0} \iint\limits_{Q_{t,t+1}} (u_{xx}^2 + v_{xt}^2)\, dx\, dt \leqslant c$$

$$(Q_{t_1, t_2} = \Omega \times (t_1, t_2))$$

Доказательство. Умножая первое уравнение (2.1) на u скалярно в $L_2(\Omega)$, с помощью ранее полученных оценок заключаем, что

$$\iint\limits_{Q_{t,\, t+1}} u_x^2 dx dt \leqslant c$$

Теперь умножим первое уравнение (2.1) скалярно в $L_2(\Omega)$ на u_{xx}:

(2.6) $$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} I(t) + \mu \int\limits_{\Omega} \rho u_{xx}^2 dx = - \int\limits_{\Omega} (f u_{xx} + \mu \rho_x u_x u_{xx})\, dx, \quad I(t) = \int\limits_{\Omega} u_x^2 dx$$

После того как увеличим правую часть (2.6) с помощью неравенства Юнга и уменьшим левую с помощью оценки (2.3), имеем

(2.7) $$\frac{d}{dt} I(t) + \int\limits_{\Omega} u_{xx}^2 dx \leqslant c \int\limits_{\Omega} (u_x^2 + f^2)\, dx$$

Отсюда следует, что $I(t) \leqslant c$ при $t \in [0, 1]$. Докажем, что это соотношение верно и при $t > 1$. Фиксируем произвольное $t_1 > 1$ и введем достаточно гладкую функцию $\eta(t)$ со свойствами: $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta = 0$ при $t \leqslant t_1 - 1$, $\eta = 1$ при $t \geqslant t_1$, $|\eta'(t)| \leqslant 2$. Умножим (2.7) на η и проинтегрируем от $t_1 - 1$ до t_1. Получаем $I(t_1) \leqslant c$. Ввиду произвольности $t_1 \in (1, \infty)$ первое утверждение леммы доказано, а второе — очевидное следствие (2.7) и (2.1).

Теорема 1. Пусть u, v — решение задачи K. Тогда найдется $\beta \in (0, 1)$, такое, что имеют место оценки

(2.8) $$0 < c^{-1} \leqslant v \leqslant c, \quad |v|_{Q_0}^{(1+\beta)} \leqslant c, \quad |u|_{Q_0}^{(\beta)} \leqslant c$$

$$\sup_{t\geqslant 0} |v|_{Q_{t,t+1}}^{(1+\alpha)} \leqslant c, \quad \sup_{t\geqslant 0} |u|_{Q_{t,t+1}}^{(2+\alpha)} \leqslant c$$

Доказательство. Первое утверждение из (2.8) доказано в лемме 2. Далее, так как

$$\sup_{t\geqslant 0} \sup_{x_1, x_2 \in \overline{\Omega}} |u(x_1, t) - u(x_2, t)|\, |x_1 - x_2|^{-1/2} \leqslant \sup_{t\geqslant 0} \left(\int\limits_{\Omega} u_x^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\sup_{x\in\bar\Omega}\sup_{t_1,t_2\geqslant 0}|v(x,t_1)-v(x,t_2)||t_1-t_2|^{-1/2}\leqslant$$
$$\leqslant c\sup_{t\geqslant 0}\int\int_{Q_{t,t+1}}(v_t^2+v_{xt}^2)\,dxdt+2|v|_0$$

то, учитывая (2.2), (1.6), (2.5) и известную лемму (см. [10], гл. 2, лемма 3.1), получаем второе и третье неравенства (2.8).

Чтобы доказать последние две оценки (2.8), рассмотрим первое уравнение (2.1) как линейное параболическое уравнение для u. Известно [10], что

$$|u|^{(2+\gamma)}_{\bar Q_{0,2}}\leqslant c|f|^{(\gamma)}_{\bar Q_{0,2}},\quad \gamma=\min(\alpha,\beta) \tag{2.9}$$

Умножим первое уравнение (2.1) на введенную выше функцию η, обозначив $z=\eta u$. Тогда, аналогично (2.9), имеем

$$|z|^{(2+\gamma)}_{\bar Q_{t_1-1,\,t_1+1}}\leqslant c\left(|f\eta|^{(\gamma)}_{\bar Q_{t_1-1,\,t_1+1}}+|\eta' u|^{(\gamma)}_{\bar Q_{t_1-1,\,t_1+1}}\right),\quad t_1\geqslant 1 \tag{2.10}$$

Но так как $z=u$ при $t\geqslant t_1$ и

$$|z|^{(2+\gamma)}_{\bar Q_{t_1,\,t_1+1}}\leqslant|z|^{(2+\gamma)}_{\bar Q_{t_1-1,\,t_1+1}}$$

то из (2.10) следует

$$|u|^{(2+\gamma)}_{\bar Q_{t_1,\,t_1+1}}\leqslant c$$

Это неравенство вместе с (2.9) дает

$$|u|^{(2+\gamma)}_{\bar Q_{t,\,t+1}}\leqslant c,\quad t\geqslant 0 \tag{2.11}$$

После этого четвертую оценку из (2.8) можно считать доказанной, если обратиться к формуле (1.6), а доказательство пятой оценки проводится так же, как при получении оценки (2.11).

Следствие. Очевидно, что (c не зависит от t)

$$|u|^{(2+\alpha)}_{\bar Q_{t,\,t+h}}\leqslant c(h),\quad |v|^{(1+\alpha)}_{\bar Q_{t,\,t+h}}\leqslant c(h),\quad t\geqslant 0,\ h>0$$

3. Существование периодического решения. Пусть $\{t_n\}$ — последовательность, такая, что $t_n\to-\infty$ ($n\to\infty$), а $\{Q_n\}$ — последовательность цилиндров. Определим u^n, v^n как классическое в Q_n решение задачи

$$\begin{gathered} u_t^n=\mu(\rho^n u_x^n)_x+f,\quad v_t^n=u_x^n\quad (Q_n=\Omega\times(t_n,\infty))\\ u^n(x,t_n)=0,\ v^n(x,t_n)=V_0,\quad u^n|_{\Gamma_n}=0\quad (\Gamma_n=\Gamma\cap(t\geqslant t_n))\end{gathered} \tag{3.1}$$

Рассмотрим последовательности $\{u^n\}$, $\{v^n\}$ на фиксированном компакте $\bar Q^k=\bar\Omega\times[-k,k]$. Так как при $t_n<-k$

$$|u^n|^{(2+\alpha)}_{\bar Q^k}\leqslant c(k),\quad |v^n|^{(1+\alpha)}_{\bar Q^k}\leqslant c(k)$$

то, пользуясь компактностью вложений

$$H^{i+\alpha,\,(i+\alpha)/2}(\bar Q^k)\to H^{i+\nu,\,(i+\nu)/2}(\bar Q^k)\quad (i=1,2)$$

при $0<\nu<\min\{\alpha,\beta\}$, построим подпоследовательности $\{u_k{}^n\}$, $\{v_k{}^n\}$, такие, что

$$|u_k{}^n-u_k{}^\circ|^{(2+\nu)}_{\bar Q^k}\to 0,\ |v_k{}^n-v_k{}^\circ|^{(1+\nu)}_{\bar Q^k}\to 0\ (n\to\infty) \tag{3.2}$$

для некоторых функций $u_k{}^\circ$, $v_k{}^\circ$, причем будут иметь место оценки

$$\begin{gathered}|u_k{}^\circ|^{(\nu)}_{\bar Q^k}\leqslant c_0,\ |v_k{}^\circ|^{(1+\nu)}_{\bar Q^k}\leqslant c_0,\ 0<c_0^{-1}\leqslant v_k{}^\circ\leqslant c_0\\ u_k{}^\circ\in H^{2+\nu,1+\nu/2}(\bar Q^k),\quad v_k{}^\circ\in H^{1+\nu,(1+\nu)/2}(\bar Q^k)\end{gathered} \tag{3.3}$$

с мажорантой c_0, не зависящей от k. Рассмотрим последовательности $\{u_k{}^n\}$, $\{v_k{}^n\}$ на компакте $\bar{Q}^{k+1}$. Аналогично предыдущему снова можно выделить подпоследовательности $\{u_{k+1}^n\} \subset \{u_k{}^n\}$, $\{v_{k+1}^n\} \subset \{v_k{}^n\}$, такие, что при замене k на $k+1$ имеют место соотношения (3.2) и оценки (3.3). Очевидно, что построенные пары $\{u_k{}^\circ, v_k{}^\circ\}$, $\{\overset{\circ}{u}_{k+1}, \overset{\circ}{v}_{k+1}\}$ совпадают в $\bar{Q}^k$.

Действуя и далее подобным образом, для любого компакта $\bar{Q}^k$ построим последовательности $\{u_k{}^n\}, \{v_k{}^n\}$ и функции $u_k{}^\circ$, $v_k{}^\circ$, обладающие свойствами (3.2), (3.3) и

$$u_k{}^\circ = \overset{\circ}{u}_{k+1},\ v_k{}^\circ = \overset{\circ}{v}_{k+1}, \quad (x, t) \in \bar{Q}^k \tag{3.4}$$

причем $u_k{}^n$, $v_k{}^n$ — решение задачи (3.1) при некотором t_n, зависящем от k.

Определим функции u°, v° следующим образом:

$$u^\circ(x, t) = u_k{}^\circ(x, t), \quad v^\circ(x, t) = v_k{}^\circ(x, t), \quad (x, t) \in \bar{Q}^k$$

Тем самым, u°, v° определены на всем множестве $\bar{Q}$ и, в силу (3.4), это определение корректно. Покажем, что u°, v° — решение П-задачи. Из (3.2) следует, что функции u°, v° удовлетворяют уравнениям (1.2) на каждом ограниченном множестве Q^k, поэтому u°, v° — классическое решение системы (1.2) на всем множестве Q. Выполнение условий (1.3), (1.4) очевидно. Кроме того, имеют место оценки

$$|u^\circ|_{\bar{Q}}^{(\nu)} \leqslant c_0, \quad |v^\circ|_{\bar{Q}}^{(1+\nu)} \leqslant c_0, \quad 0 < c_0^{-1} \leqslant v^\circ \leqslant c_0 \tag{3.5}$$

Докажем, что u°, v° — T-периодические функции. Так как функции $u_1(x, t) = u^\circ(x, t+T)$, $v_1(x, t) = v^\circ(x, t+T)$ тоже удовлетворяют соотношениям (1.2) — (1.4), то ввиду условия (1.5) имеем

$$u = \mu\rho^\circ v_x - \mu\rho^\circ\rho_1 v_{1x} v, \quad v_t = u_x \quad (u = u^\circ - u_1,\ v = v^\circ - v_1) \tag{3.6}$$

Отсюда

$$w_t = \mu\rho^\circ w_{xx} - \mu\rho^\circ\rho_1 v_{1x} w_x, \quad w|_\Gamma = 0 \left(w = \int_0^x v\, dx\right) \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) можно рассматривать как линейное параболическое относительно w с коэффициентами, нормы Гельдера которых для всей полосы $\bar{Q}$ ограничены. Но для такого уравнения известно [9], что его решение с однородными граничными условиями и ограниченное на всей полосе $\bar{Q}$ может быть только нулевым. Поэтому $w \equiv 0$, а следовательно, и $v \equiv 0$. После этого из (3.6) заключаем, что $u \equiv 0$. Тем самым доказано, что u°, v° — решение П-задачи.

Свойство периодичности функций u°, v° позволяет усилить оценки (3.5). Пусть $Q_T = \Omega \times (0, T)$, тогда из (3.2) следует

$$|u^\circ|_{\bar{Q}_T}^{(2+\nu)} \leqslant c, \quad |v^\circ|_{\bar{Q}_T}^{(1+\nu)} \leqslant c$$

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, получаем

$$|u^\circ|_{\bar{Q}_T}^{(2+\alpha)} \leqslant c, \quad |v^\circ|_{\bar{Q}_T}^{(1+\alpha)} \leqslant c, \quad 0 < c^{-1} \leqslant v^\circ \leqslant c \tag{3.8}$$

Сформулируем окончательный результат.

Теорема 2. Пусть периодическая по t с периодом T функция $f \in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)$ и удовлетворяет условию (1.5). Тогда существует решение задачи (1.2) — (1.4), периодическое по t (с периодом T), для которого имеют место оценки (3.8).

Автор благодарит А. В. Кажихова за внимание к работе.

Поступила 24 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Itaya N.* On the temporally global problem of the generalized Burgers equation. J. Math. Kyoto Univ., 1974, vol. 14, No. 1, p. 129—177.
2. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., «Наука», 1968.
3. *Burgers J. M.* A mathematical model illustrating the theory of turbulence. Advances Appl. Mech., N. Y. Acad. Press, 1948, vol. 1.
4. *Кажихов А. В.* О краевых задачах для уравнений Бюргерса сжимаемой жидкости в областях с подвижными границами. В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 26. Новосибирск, Изд-во ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1976.
5. *Tani A.* On the first initial—boundary value problem of the generalized Burgers equation. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 1974, vol. 10, No. 1, p. 209—233.
6. *Кочина Н. Н.* О периодических решениях уравнения Бюргерса. ПММ, 1961, т. 25, № 6.
7. *Шмулев И. И.* Периодические решения модельного уравнения движения вязкой жидкости. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 3.
8. *Шмулев И. И.* Краевые задачи для модельных уравнений турбулентности. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
9. *Шмулев И. И.* Периодические решения первой краевой задачи для параболических уравнений. Матем. сб., 1965, т. 66, № 3.
10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967.