Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.011:534

К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЛЕБАНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. Г. Веретенников, В. Н. Серегин

(Москва)

Развивается метод исследования колебаний нелинейных систем с почти-периодическими коэффициентами, основанный на идеях Г. В. Каменкова [1] построения стационарных решений систем с периодическими коэффициентами и разделения движений. В отличие от [1] предполагается, что при обращении малого параметра μ в нуль характеристическое уравнение системы имеет кроме n пар чисто мнимых корней m нулевых и h корней с отрицательными вещественными частями.

Рассмотрены нерезонансный и резонансный случаи. Получены условия существования стационарных решений по членам первого порядка относительно малого параметра. Приведен пример.

1. Рассматривается задача о существовании и построении стационарных в смысле [1] решений системы, движение которой описывается уравнениями (p_{ik} — постоянные коэффициенты, μ — малый положительный параметр)

$$x_i^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n_1} p_{ik}x_k + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j X_{ij}(x, t) + \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j f_{ij}(t) \tag{1.1}$$

$$(x = x_1, \ldots, x_{n_1};\ i = 1, \ldots, n_1;\ n_1 = 2n + m + h)$$

Здесь правые части представляют собой сходящиеся ряды по параметру μ в исследуемой области изменения переменных $x_1, \ldots, x_{n_1}$ и параметра; X_{ij} $(j = 1, 2, \ldots)$ — многочлены любого конечного порядка с почти-периодическими по t коэффициентами, обращающиеся в нуль при $x_1 = \ldots = x_{n_1} = 0$; $f_{ij}^{\cdot}(t)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ — почти-периодические функции времени. Почти-периодические функции X_{ij} и f_{ij} представимы конечными рядами Фурье с произвольным спектром частот (обобщенные ряды Фурье).

К виду (1.1) может быть приведена любая квазилинейная система, нелинейные члены которой имеют структуру X_{ij}, а коэффициенты при линейных членах являются периодическими функциями одного и того же периода [2]. Известны также различные случаи приводимости к виду (1.1) систем, линейные члены которых имеют почти-периодические коэффициенты [3].

Предположим, что характеристическое уравнение $| p_{ik} - \delta_{ik}\rho | = 0$ имеет n пар чисто мнимых, m нулевых и h корней с отрицательными вещественными частями. Число групп решений, отвечающих нулевым корням, предполагается произвольным. Будем вначале предполагать, что для чисто мнимых корней $\pm i\lambda_s$ ($s = 1, \ldots, n$) выполняется условие отсутствия резонансов

$$\sum_{s=1}^{n} k_s \lambda_s \neq E$$

Здесь k_s и E — целые положительные и отрицательные числа, включая нуль; k_s удовлетворяют условию

$$0 < \sum_s |k_s| \leqslant K$$

Здесь число K определяется показателем наивысшей из форм, входящих в X_{i1}. Значения λ_s будем считать несоизмеримыми со спектром частот почти-периодических коэффициентов и функций, входящих в правые части (1.1) (нерезонансный случай), т. е. для частот λ_s и спектра частот почти-периодических коэффициентов функций X_{i1} и функций f_{i0}, f_{i1} выполняются соотношения, аналогичные приведенным выше. Корни с отрицательными вещественными частями могут быть как простыми, так и кратными с произвольным числом групп решений.

При сделанных предположениях неособенным линейным преобразованием [4] приведем систему (1.1) к виду

$$(1.2)\qquad \begin{aligned}
y_s^{\cdot} &= -\lambda_s z_s + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i Y_{si}(y, z, u, v, t) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \varphi_{si}(t) \\
z_s^{\cdot} &= \lambda_s y_s + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i Z_{si}(y, z, u, v, t) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \psi_{si}(t) \\
u_\alpha^{\cdot} &= \sigma_{\alpha-1} u_{\alpha-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i U_{\alpha i}(y, z, u, v, t) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \theta_{\alpha i}(t) \\
v_j^{\cdot} &= \nu_j v_j + \varkappa_{j-1} v_{j-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i V_{ji}(y, z, u, v, t) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \gamma_{ji}(t)
\end{aligned}$$

$$(y = y_1, \ldots, y_n;\ z = z_1, \ldots, z_n;\ u = u_1, \ldots, u_m;\ v = v_1, \ldots, v_h;\ s = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, h;\ \sigma_0 = \varkappa_0 = 0)$$

Здесь y_s, z_s, u_α — критические переменные, v_j — переменные присоединенной системы; функции Y_{si}, Z_{si}, $U_{\alpha i}$, Y_{ji} ($i = 1, 2, \ldots$) имеют структуру, аналогичную X_{ij}, и представляют собой многочлены от y, z, u, v произвольного конечного порядка, обращающиеся в нуль при $y = z = u = v = 0$, с почти-периодическими по t коэффициентами. Число отличных от нуля $\sigma_{\alpha-1}$, $\varkappa_{j-1}$ определяется кратностью нулевых корней и корней с отрицательными вещественными частями и числом групп решений, отвечающих указанным корням.

Для решения сформулированной задачи покажем, что существуют неавтономные преобразования с почти-периодическими коэффициентами, которые приводят (1.2) к такому виду, когда

в преобразованной системе отсутствуют функции, соответствующие $\varphi_{si}(t)$, $\psi_{si}(t)$, $\theta_{\alpha i}(t)$, $\gamma_{ji}(t)$ ($i = 0, 1$) в исходной системе;

в критической системе отсутствуют члены первого порядка по μ, зависящие от некритических переменных $v_1, \ldots, v_h$;

в критической системе до μ в первой степени включительно коэффициенты многочленов не зависят от времени.

Из преобразованной таким образом системы получим уравнения для стационарных амплитуд и построим искомые стационарные решения. Исследуя найденные приближенные решения на устойчивость и оценивая величины их отклонений от решений полной системы, определим условия существования стационарных колебаний по членам первого порядка относительно параметра μ.

1°. Полагая в (1.2) $\xi_s^* = y_s + iz_s$, $\bar{\xi}_s^* = y_s - iz_s$, перейдем к комплексной форме записи подсистемы с чисто мнимыми корнями и преобразуем полученную систему при помощи замены

$$
\begin{gathered}
\xi_s^* = \xi_s + W_{s0}(t) + \mu W_{s1}(t), \quad u_\alpha = \eta_\alpha + \omega_{\alpha 0}(t) + \mu\omega_{\alpha 1}(t) \\
v_j = \zeta_j + \chi_{j0}(t) + \mu\chi_{j1}(t)
\end{gathered} \tag{1.3}
$$

Здесь W_{s0}, W_{s1}, $\omega_{\alpha 0}$, $\omega_{\alpha 1}$, χ_{j0}, χ_{j1} определены так, что функции, соответствующие φ_{s0}^*, φ_{s1}^*, $\theta_{\alpha 0}$, $\theta_{\alpha 1}$, γ_{j0}, γ_{j1} исходной системы, обращаются в преобразованной системе в нули. Для этого достаточно, чтобы W_{s0}, W_{s1}, $\omega_{\alpha 0}$, $\omega_{\alpha 1}$, χ_{j0}, χ_{j1} удовлетворяли уравнениям

$$
\begin{gathered}
dW_{s0}/dt = i\lambda_s W_{s0} + \varphi_{s0}^*(t) \\
dW_{s1}/dt = i\lambda_s W_{s1} + \varphi_{s1}^*(t) + \Xi_{s1}^*(W_0, \overline{W}_0, \omega_0, \chi_0, t) \\
d\omega_{\alpha 0}/dt = \sigma_{\alpha-1}\omega_{\alpha-1,0} + \theta_{\alpha 0}(t) \\
d\omega_{\alpha 1}/dt = \sigma_{\alpha-1}\omega_{\alpha-1,1} + \theta_{\alpha 1}(t) + U_{\alpha 1}(W_0, \overline{W}_0, \omega_0, \chi_0, t) \\
d\chi_{j0}/dt = \nu_j\chi_{j0} + \varkappa_{j-1}\chi_{j-1,0} + \gamma_{j0}(t) \\
d\chi_{j1}/dt = \nu_j\chi_{j1} + \varkappa_{j-1}\chi_{j-1,1} + \gamma_{j1}(t) + V_{j1} \\
(W_0 = W_{10}, \ldots, W_{n0};\ \overline{W}_0 = \overline{W}_{10}, \ldots, \overline{W}_{n0};\ \omega_0 = \omega_{10}, \ldots \\
\ldots, \omega_{m0};\ \chi_0 = \chi_{10}, \ldots, \chi_{h0};\ \varphi_{sk}^* = \varphi_{sk} + i\psi_{sk}\ (k = 0, 1); \\
\Xi_{s1}^* = Y_{s1} + iZ_{s1})
\end{gathered} \tag{1.4}
$$

Первые четыре уравнения (1.4) имеют почти-периодические решения тогда и только тогда, когда

$$
\begin{gathered}
\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t e^{-i\lambda_s t}\varphi_{s0}^*(t)\,dt = \\
= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t e^{-i\lambda_s t}\,[\varphi_{s1}^*(t) + \Xi_{s1}^*(W_0, \overline{W}_0, \chi_0, t)]\,dt = 0 \\
\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \theta_{\alpha 0}(t)\,dt = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t [\theta_{\alpha 1}(t) + U_{\alpha 1}(W_0, \overline{W}_0, \omega_0, \chi_0, t)]\,dt = 0
\end{gathered} \tag{1.5}
$$

Первое условие (1.5) всегда выполняется при сделанных предположениях о несоизмеримости λ_s со спектром частот почти-периодических функций. В дальнейшем второе условие (1.5) будем предполагать выполненным.

Так как $\operatorname{Re}\nu_j \neq 0$, последние два уравнения (1.4) в силу теоремы Нейгебауэра—Бора [3,5] при почти-периодических $\gamma_{j0}(t)$ и $\gamma_{j1}(t)$ всегда имеют почти-периодические решения.

В результате преобразования (1.3) система принимает вид

$$\xi_s^{\boldsymbol\cdot} = i\lambda_s\xi_s + \sum_{i=1}^{\infty}\mu^i\Xi_{si}(\xi,\bar\xi,\eta,\zeta,t) + \sum_{i=2}^{\infty}\mu^i\varphi_{si}{}^*(t) \tag{1.6}$$

$$\bar\xi_s^{\boldsymbol\cdot} = -i\lambda_s\bar\xi_s + \sum_{i=1}^{\infty}\mu^i\bar\Xi_{si}(\xi,\bar\xi,\eta,\zeta,t) + \sum_{i=2}^{\infty}\mu^i\bar\varphi_{si}{}^*(t)$$

$$\eta_\alpha^{\boldsymbol\cdot} = \sigma_{\alpha-1}\eta_{\alpha-1} + \sum_{i=1}^{\infty}\mu^iH_{\alpha i}(\xi,\bar\xi,\eta,\zeta,t) + \sum_{i=2}^{\infty}\mu^i\theta_{\alpha i}{}^*(t)$$

$$\zeta_j^{\boldsymbol\cdot} = \nu_j\zeta_j + \varkappa_{j-1}\zeta_{j-1} + \sum_{i=1}^{\infty}\mu^iG_{ji}(\xi,\bar\xi,\eta,\zeta,t) + \sum_{i=2}^{\infty}\mu^i\gamma_{ji}{}^*(t)$$

$$(\xi = \xi_1,\ldots,\xi_n;\ \eta = \eta_1,\ldots,\eta_m;\ \zeta = \zeta_1,\ldots,\zeta_h)$$

2°. Представим Ξ_{s1} и $H_{\alpha 1}$ в виде

$$\Xi_{s1} = \Xi_{s1}^{(0)}(\xi,\bar\xi,\eta,t) + \sum_{l\geqslant 0}E_{s1}^{(l)}(\zeta,t)\xi_1^{l_1}\ldots\xi_n^{l_n}\bar\xi_1^{l_{n+1}}\ldots\bar\xi_n^{l_{2n}}\eta_1^{l_{2n+1}}\ldots\eta_m^{l_{2n+m}}$$

$$H_{\alpha 1} = H_{\alpha 1}^{(0)}(\xi,\bar\xi,\eta,t) + \sum_{l\geqslant 0}F_{\alpha 1}^{(l)}(\zeta,t)\xi_1^{l_1}\ldots\xi_n^{l_n}\bar\xi_1^{l_{n+1}}\ldots\bar\xi_n^{l_{2n}}\eta_1^{l_{2n+1}}\ldots\eta_m^{l_{2n+m}}$$

$$E_{s1}^{(l)}(\zeta,t) = \sum_{k\geqslant 1}e_{s1(l)}^{(k)}(t)\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_h^{k_h}$$

$$F_{\alpha 1}^{(l)}(\zeta,t) = \sum_{k\geqslant 1}f_{\alpha 1(l)}^{(k)}(t)\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_h^{k_h}$$

$$(l) = (l_1,\ldots,l_{2n+m});\quad l = l_1+\ldots+l_{2n+m}$$

$$(k) = (k_1,\ldots,k_h);\quad k = k_1+\ldots+k_h$$

Здесь $e_{s1(l)}^{(k)}(t)$, $f_{\alpha 1(l)}^{(k)}(t)$ — известные почти-периодические функции t. Введем замену переменных

$$\xi_s = p_s + \mu\sum_{l\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 1}g_{s1(l)}^{(k)}\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_h^{k_h}\xi_1^{l_1}\ldots\eta_m^{l_{2n+m}} \tag{1.7}$$

$$\eta_\alpha = q_\alpha + \mu\sum_{l\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 1}h_{\alpha 1(l)}^{(k)}\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_h^{k_h}\xi_1^{l_1}\ldots\eta_m^{l_{2n+m}}$$

и определим $g_{s1(l)}^{(k)}$, $h_{\alpha 1(l)}^{(k)}$ так, чтобы в преобразованной системе многочлены, соответствующие $E_{s1}^{(l)}(\zeta,t)$ и $F_{\alpha 1}^{(l)}(\zeta,t)$, обратились в нули. Тогда, начиная при заданных l, k с функций $g_{s1(0,\ldots,0,l)}^{(0,\ldots,0,k)}$, $h_{\alpha 1(0,\ldots,0,l)}^{(0,\ldots,0,k)}$, затем определяя $g_{s1(0,\ldots,0,l)}^{(0,\ldots,1,k-1)}$, $h_{\alpha 1(0,\ldots,0,l)}^{(0,\ldots,1,k-1)}$ и т. д. [6], для $g_{s1(l)}^{(k)}$, $h_{\alpha 1(l)}^{(k)}$ получим уравнения вида

$$dg_{s1(l)}^{(k)}/dt = (i\delta_1+\delta)g_{s1(l)}^{(k)} + c_{s1(l)}^{(k)}(t) \tag{1.8}$$

$$dh_{\alpha 1(l)}^{(k)}/dt = (i\delta_2+\delta)h_{\alpha 1(l)}^{(k)} + d_{\alpha 1(l)}^{(k)}(t)$$

$$\delta_2 = \sum_{j=1}^{n}(l_{n+j}-l_j)\lambda_j;\quad \delta_1 = \delta_2+\lambda_s;\quad \delta = -\sum_{i=1}^{h}k_i\nu_i$$

Здесь $c_{s1(l)}^{(k)}(t)$ и $d_{\alpha 1(l)}^{(k)}(t)$ — известные почти-периодические функции, которые представляют собой комбинации $e_{s1(l)}^{(k)}(t)$, $f_{\alpha 1(l)}^{(k)}(t)$ и ранее найденных функций $g_{s1(l)}^{(k)}(t)$, $h_{\alpha 1(l)}^{(k)}(t)$.

Выражения $i\delta_1+\delta$, $i\delta_2+\delta$ в общем случае имеют отличные от нуля вещественные части. Следовательно, каждое из уравнений (1.8) имеет одно и только одно почти-периодическое решение [5].

После замены (1.7) система (1.6) примет вид

$$
\begin{aligned}
(1.9)\qquad & p_s^{\cdot} = i\lambda_s p_s + \mu P_{s1}(p, \bar{p}, q, t) + \\
& + \sum_{i=2}^{\infty} \mu^i P_{si}(p, \bar{p}, q, \zeta, t) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu^i \varphi_{si}^*(t) \\
& \bar{p}_s^{\cdot} = -i\lambda_s \bar{p}_s + \mu \bar{P}_{s1}(p, \bar{p}, q, t) + \\
& + \sum_{i=2}^{\infty} \mu^i \bar{P}_{si}(p, \bar{p}, q, \zeta, t) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu^i \bar{\varphi}_{si}^*(t) \\
& q_\alpha^{\cdot} = \sigma_{\alpha-1} q_{\alpha-1} + \mu Q_{\alpha 1}(p, \bar{p}, q, t) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu^i Q_{\alpha i}(p, \bar{p}, q, \zeta, t) + \\
& + \sum_{i=2}^{\infty} \mu^i \theta_{\alpha i}^*(t) \\
& \zeta_j^{\cdot} = \nu_j \zeta_j + \varkappa_{j-1}\zeta_{j-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i G_{ji}^*(p, \bar{p}, q, \zeta, t) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu^i \gamma_{ji}^*(t)
\end{aligned}
$$

Здесь многочлены P_{si}, $\bar{P}_{si}$, $Q_{\alpha i}$, G_{ji}^* $(i = 1, 2, \ldots)$ сохраняют структуру функций X_{ij}.

3°. Преобразуем систему (1.9), положив [7]

$$
\begin{aligned}
(1.10)\qquad & p_s = p_s^* + \mu \sum_{l \geqslant 1} a_{s1}^{(l)}(t)\, p_1^{l_1} \ldots p_n^{l_n} \bar{p}_1^{l_{n+1}} \ldots \bar{p}_n^{l_{2n}} q_1^{l_{2n+1}} \ldots q_m^{l_{2n+m}} \\
& q_\alpha = \rho_\alpha + \mu \sum_{l \geqslant 1} b_{\alpha 1}^{(l)}(t)\, p_1^{l_1} \ldots p_n^{l_n} \bar{p}_1^{l_{n+1}} \ldots \bar{p}_n^{l_{2n}} q_1^{l_{2n+1}} \ldots q_m^{l_{2n+m}}
\end{aligned}
$$

Функции $a_{s1}^{(l)}$ и $b_{\alpha 1}^{(l)}$ выберем так, чтобы многочлены, играющие роль P_{s1} и $Q_{\alpha 1}$ в преобразованной системе, не зависели от времени. Тогда $a_{s1}^{(l)}$ и $b_{\alpha 1}^{(l)}$ должны удовлетворять уравнениям (функции снова определяем в упомянутом выше порядке)

$$
(1.11)\qquad \frac{da_{s1}^{(l)}}{dt} + i\delta_1 a_{s1}^{(l)} = M_{s1}^{(l)}(t) - N_{s1}^{*(l)}, \quad \frac{db_{\alpha 1}^{(l)}}{dt} + i\delta_2 b_{\alpha 1}^{(l)} = L_{\alpha 1}^{(l)}(t) - K_{\alpha 1}^{(l)}
$$

Здесь $M_{s1}^{(l)}(t)$, $L_{\alpha 1}^{(l)}(t)$ — известные функции времени, представляющие собой совокупность коэффициентов многочленов P_{s1}, $\bar{P}_{s1}$, $Q_{\alpha 1}$ и функций $a_{s1}^{(l)}$, $b_{\alpha 1}^{(l)}$; $N_{s1}^{*(l)}$ и $K_{\alpha 1}^{(l)}$ — подлежащие определению коэффициенты многочленов в правых частях системы, получаемой преобразованием (1.10).

Будем искать почти-периодические решения уравнений (1.11). Здесь возможны два случая:

δ_1 и δ_2 обращаются в нуль; тогда уравнения имеют почти-периодические решения, если $N_{s1}^{*(l)}$ и $K_{\alpha 1}^{(l)}$ определены равенствами

$$
N_{s1}^{*(l)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t M_{s1}^{(l)}(t)\, dt, \quad K_{\alpha 1}^{(l)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t L_{\alpha 1}^{(l)}(t)\, dt
$$

Следовательно, $N_{s1}^{*(l)}$ и $K_{\alpha 1}^{(l)}$ постоянны (в частном случае, нули).

δ_1 и δ_2 отличны от нуля. Представим функции $M_{s1}^{(l)}$ и $L_{\alpha 1}^{(l)}$ обобщенными рядами Фурье

$$
M_{s1}^{(l)} = \sum_{k=1}^{N} M_{s1,k}^{(l)} e^{im_k t}, \quad L_{\alpha 1}^{(l)} = \sum_{k=0}^{N} L_{\alpha 1,k}^{(l)} e^{im_k t}
$$

Здесь $M_{s1,k}^{(l)}$ и $L_{\alpha1,k}^{(l)}$ — комплексные постоянные, m_k ($k = 0, 1, \ldots, N$) — произвольные действительные числа.

Частные решения системы (1.11) в этом случае принимают вид

$$a_{s1}^{(l)} = e^{-i\delta_1 t} \sum_{k=0}^{N} \int_0^t e^{i(\delta_1+m_k)t} M_{s1,k}^{(l)} dt + \frac{i}{\delta_1}(1 - e^{-i\delta_1 t}) N_{s1}^{*(l)}$$

$$b_{\alpha1}^{(l)} = e^{-i\delta_2 t} \sum_{k=0}^{N} \int_0^t e^{i(\delta_2+m_k)t} L_{\alpha1,k}^{(l)} dt + \frac{i}{\delta_2}(1 - e^{-i\delta_2 t}) K_{\alpha1}^{(l)}$$

и являются почти-периодическими для любых $N_{s1}^{*(l)}$ и $K_{\alpha1}^{(l)}$ в силу того, что $\delta_1 + m_k \neq 0$, $\delta_2 + m_k \neq 0$ ($k = 0, \ldots, N$) (нерезонансный случай).

Положим $N_{s1}^{*(l)} = K_{\alpha1}^{(l)} = 0$.

В результате проделанных преобразований система примет вид

$$
\begin{aligned}
(1.12)\qquad & p_s^{*\cdot} = i\lambda_s p_s^* + \mu P_{s1}^*(p^*, \bar{p}^*, \rho) + O(\mu^2) \\
& \bar{p}_s^{*\cdot} = -i\lambda_s \bar{p}_s^* + \mu \bar{P}_{s1}^*(p^*, \bar{p}^*, \rho) + O(\mu^2) \\
& \rho_\alpha^{\cdot} = \sigma_{\alpha-1}\rho_{\alpha-1} + \mu D_{\alpha1}(p^*, \bar{p}^*, \rho) + O(\mu^2) \\
& \zeta_j^{\cdot} = \nu_j \zeta_j + \varkappa_{j-1}\zeta_{j-1} + \mu G_{j1}(p^*, \bar{p}^*, \rho, \zeta, t) + O(\mu^2) \\
& P_{s1}^* = p_s^* \sum_{l\geqslant 0} N_{s1}^{*(l)} (p_1^*\bar{p}_1^*)^{l_1} \ldots (p_n^*\bar{p}_n^*)^{l_n} \rho_1^{l_{2n+1}} \ldots \rho_m^{l_{2n+m}} \\
& D_{\alpha1} = \sum_{l\geqslant 1} K_{\alpha1}^{(l)} (p_1^*\bar{p}_1^*)^{l_1} \ldots (p_n^*\bar{p}_n^*)^{l_n} \rho_1^{l_{2n+1}} \ldots \rho_m^{l_{2n+m}} \\
& (l) \equiv (l_1, \ldots, l_n, l_1, \ldots, l_n, l_{2n+1}, \ldots, l_{2n+m}) \\
& l = 2l_1 + \ldots + 2l_n + l_{2n+1} + \ldots + l_{2n+m}
\end{aligned}
$$

Заметим, что любое из двух уравнений в комплексной форме эквивалентно двум уравнениям для чисто мнимых корней в канонической форме.

Переходя в (1.12) к полярным координатам $p_s^* = r_s e^{i\theta_s}$, $\bar{p}_s^* = r_s e^{-i\theta_s}$, получим

$$
\begin{aligned}
(1.13)\qquad & r_s^{\cdot} = \mu r_s \sum_{l\geqslant 0} A_{s1}^{(l)} r_1^{2l_1} \ldots r_n^{2l_n} \rho_1^{l_{2n+1}} \ldots \rho_m^{l_{2n+m}} + O(\mu^2) \\
& \theta_s^{\cdot} = \lambda_s + \mu \sum_{l\geqslant 0} B_{s1}^{(l)} r_1^{2l_1} \ldots r_n^{2l_n} \rho_1^{l_{2n+1}} \ldots \rho_m^{l_{2n+m}} + O(\mu^2) \\
& \rho_\alpha^{\cdot} = \sigma_{\alpha-1}\rho_{\alpha-1} + \mu \sum_{l\geqslant 1} C_{\alpha1}^{(l)} r_1^{2l_1} \ldots r_n^{2l_n} \rho_1^{l_{2n+1}} \ldots \rho_m^{l_{2n+m}} + O(\mu^2) \\
& \zeta_j^{\cdot} = \nu_j \zeta_j + \varkappa_{j-1}\zeta_{j-1} + \mu G_{j1}(r, \theta, \rho, \zeta, t) + O(\mu^2) \\
& (r = r_1, \ldots, r_n;\ \theta = \theta_1, \ldots, \theta_n;\ \rho = \rho_1, \ldots, \rho_m)
\end{aligned}
$$

Здесь $A_{s1}^{(l)}$ и $B_{s1}^{(l)}$ — соответственно действительная и мнимая части $N_{s1}^{*(l)}$.

Рассмотрим уравнения

$$
\begin{aligned}
(1.14)\qquad & r_s \sum_{l\geqslant 0} A_{s1}^{(l)} r_1^{2l_1} \ldots r_n^{2l_n} \rho_1^{l_{2n+1}} \ldots \rho_m^{l_{2n+m}} = 0 \\
& \sigma_{\alpha-1}\rho_{\alpha-1} + \mu \sum_{l\geqslant 1} C_{\alpha1}^{(l)} r_1^{2l_1} \ldots r_n^{2l_n} \rho_1^{l_{2n+1}} \ldots \rho_m^{l_{2n+m}} = 0
\end{aligned}
$$

Если система (1.14) имеет вещественные неотрицательные решения $r_{10}^2, \ldots, r_{n0}^2$ и вещественные решения $\rho_{10}, \ldots, \rho_{m0}$, то, подставляя их в преобразования, приводящие (1.1) к виду (1.13), получим искомые стационарные решения с точностью до первого порядка по μ. При этом решения второго уравнения системы (1.13) для $\theta_1, \ldots, \theta_n$ и ограниченные, в частности, почти-периодические решения для $\zeta_1, \ldots, \zeta_h$ с точностью до первого порядка по μ определяются из уравнений

$$
(1.15) \qquad \theta_s^{\cdot} = \lambda_s + \mu \sum_{l\geqslant 0} B_{s1}^{(l)} r_{10}^{2l_1} \ldots r_{n0}^{2l_n} \rho_{10}^{l_{2n+1}} \ldots \rho_{m0}^{l_{2n+m}}
$$

$$
\zeta_j^{\cdot} = \nu_j \zeta_j + \varkappa_{j-1}\zeta_{j-1} + \mu G_{j1}(r_0, \theta_0, \rho_0, \zeta, t)
$$

Здесь $\theta_0 = \theta_{10}, \ldots, \theta_{n0}$ — решения уравнений для θ_s.

Исследуем вопрос о существовании и точности полученных решений [1,8]. Пусть $r_s = r_{s0} + x_s^*$, $\rho_\alpha = \rho_{\alpha 0} + x_{n+\alpha}^*$, $\zeta_j = \zeta_{j0} + \zeta_j^*$, где $\zeta_{j0} = \zeta_{j0}(t)$ — ограниченные решения второй группы уравнений (1.15). Тогда в силу (1.13) отклонения x_i^* $(i = 1, \ldots, n+m)$, ζ_j^* удовлетворяют уравнениям

$$
(1.16) \qquad x_i^{*\cdot} = \sigma_{i-1} x_{i-1}^* + \mu \sum_{k=1}^{n+m} a_{ik} x_k^* + \mu X_{i1}^*(x^*) + \mu^2 X_{i2}^*(x^*, z^*, \theta t, \mu)
$$

$$
z_j^{*\cdot} = \sum_{l=1}^{h} b_{jl} z_l^* + \mu Z_{j1}^*(x^*, z^*, \theta, t) + \mu^2 Z_{j2}^*(x^*, z^*, \theta, t, \mu)
$$

$$
(x = x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*;\ z^* = z_1^*, \ldots, z_h^*;\ \theta = \theta_1, \ldots, \theta_n;\ i = 1, \ldots, n+m;\ j = 1, \ldots, h)
$$

Здесь X_{i1} и Z_{j1} не содержат форм ниже второго и первого порядка соответственно; среди чисел σ_{i-1} есть равные нулю.

Пусть корни характеристического уравнения

$$
(1.17) \qquad | \mu a_{ik} + \delta'_{i-1,k-1}\sigma_{i-1} - \delta_{ik}\lambda_0 | = 0
$$

где $\delta'_{i-1,k-1} = 0$ для $i \neq k$; $\delta'_{i-1,k-1} = 1$ для $i = k$, имеют только отрицательные вещественные части. Если в правых частях системы отбросить член со степенями μ выше первой, решения полученной системы при достаточно малом μ являются сколь угодно мало отличающимися от решений полной системы (1.13).

Докажем это, полагая все корни характеристического уравнения простыми и вещественными. Из диаграммы Ньютона [9] следует, что все корни (1.17) представимы в виде $\lambda_{0i} = \mu^{\varepsilon_i} h_{0i}$, где $0 < \varepsilon_i \leqslant 1$. Пусть все корни отрицательны и различны. Тогда, сохраняя прежние обозначения, систему (1.16) линейной заменой преобразуем к виду

$$
(1.18) \qquad x_i^{*\cdot} = \lambda_{0i} x_i^* + \mu X_{i1}^*(x^*) + \mu^2 X_{i2}^*(x^*, z^*, \theta, t, \mu)
$$

$$
z_j^{*\cdot} = \sum_l b_{jl} z_l^* + \mu Z_{j1}^*(z^*, x^*, \theta, t) + \mu^2 Z_{j2}^*(x^*, z^*, \theta, t, \mu)
$$

Функцию Ляпунова выберем в виде

$$
V = \frac{1}{2} \sum_i x_i^{*2} + V_1(z^*)
$$

Здесь $V_1(z^*)$ определяется уравнением

$$
\sum_{j=1}^{h} \frac{\partial V_1}{\partial z_j^*} \sum_{l=1}^{h} b_{jl} z_l^* = - \sum_{j=1}^{h} z_j^{*2}
$$

Функция $V_1(z^*)$ знакоопределена вследствие того, что $\mathrm{Re}\, \nu_j < 0$.

Полагая $x_i{}^* = r^* \cos \gamma_i{}^*$, $z_j{}^* = r^* \cos \gamma^*_{n+m+j}$ и вычисляя производную функции V в силу (1.18), получим

$$V^\cdot = r^{*2}\sum_i \mu^{\varepsilon_i} h_{0i} \cos^2 \gamma_i^* - r^{*2}\sum_j \cos^2 \gamma^*_{n+m+j} + \sum_{k=1}^{4} \Lambda_k$$

$$\Lambda_1 = \mu r^{*3} H_1 (\gamma_1{}^*, \ldots, \gamma^*_{n+m}, r^*)$$

$$\Lambda_2 = \mu^2 r^* H_2 (\gamma_1{}^*, \ldots, \gamma^*_{n+m+h}, r^*, t, \theta, \mu)$$

$$\Lambda_3 = \mu r^{*2} H_3 (\gamma_1{}^*, \ldots, \gamma^*_{n+m+h}, r^*, \theta, t)$$

$$\Lambda_4 = \mu^2 r^* H_4 (\gamma_1{}^*, \ldots, \gamma^*_{n+m+h}, r^*, \theta, t, \mu)$$

Здесь $0 < \varepsilon_i \leqslant 1$, $h_{0i} < 0$, функции $\mu^n r^{*m} H_k$ представляют собой различные произведения $\mu^n x_i{}^* X_{ij}$ и функций

$$\Sigma \partial V_1 / \partial z^*{}_j \mu^n Z_{ij}{}^*$$

На сфере

$$\sum_i x_i^{*2} + \sum_j z_j^{*2} = r^{*2} = (\mu^{1-\varepsilon})^2 \tag{1.19}$$

где ε — сколь угодно малое положительное число, $V^\cdot < 0$ для достаточно малого μ.

Следовательно, если начальные значения $x_i{}^*$ и $z_j{}^*$ удовлетворяют условиям $| x_i{}^* (t_0) | < L$, $| z_j{}^* (t_0) | < L$ (L определяет область, куда не проникают точки поверхности $V = M$, где M — нижняя грань V на сфере (1.19)), то $| x_i{}^* (t) | < \mu^{1-\varepsilon}$, $| z_j{}^* (t) | < \mu^{1-\varepsilon}$ для любых t в интервале $(0, \infty)$.

Аналогичные рассуждения справедливы и для случая кратных и комплексных корней.

Если среди λ_{0i} есть хотя бы один с положительной вещественной частью, то полученные решения не будут сколь угодно мало отличаться от решений полной системы. Если среди корней λ_{0i} имеется хотя бы один, имеющий нулевую вещественную часть, то задача о существовании стационарных колебаний системы (1.1) не может быть решена только при помощи членов первого порядка по μ.

2. Рассмотрим резонансный случай. В отличие от п. 1 предположим, что для чисто мнимых корней $\pm i\lambda_s$ $(s = 1, \ldots, n)$ характеристического уравнения системы (1.1) возможны резонансы вида

$$\sum_s \lambda_s k_s = E$$

Будем считать, что λ_s соизмеримы со спектром частот почти-периодических коэффициентов и функций, входящих в (1.1). При этом чисто мнимые корни могут быть кратными с произвольным числом групп решений. Кроме того, предположим, что система (1.1) при $X_{i1} \equiv 0$ допускает почти-периодические решения с точностью до первого порядка по μ.

Каноническая форма системы для резонансного случая имеет вид

$$y_s^\cdot = -\lambda_s z_s + \beta_{s-1} y_{s-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i Y_{si}(y, z, u, v, t) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \varphi_{si}(t) \tag{2.1}$$

$$z_s^{\cdot} = \lambda_s y_s + \beta_{s-1} z_{s-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i Z_{si}(y, z, u, v, t) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \psi_{si}(t)$$

$$u_\alpha^{\cdot} = \sigma_{\alpha-1} u_{\alpha-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i U_{\alpha i}(y, z, u, v, t) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \theta_{\alpha i}(t)$$

$$v_j^{\cdot} = \nu_j v_j + \varkappa_{j-1} v_{j-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i V_{ji}(y, z, u, v, t) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \gamma_{ji}(t)$$

$$(\beta_0 = \sigma_0 = \varkappa_0 = 0)$$

Общий метод исследования системы аналогичен изложенному в п. 1 (см. также [10]).

Применим преобразование, аналогичное преобразованию 1° п. 1 для нерезонансного случая. После перехода от переменных y_s, z_s к комплексно-сопряженным переменным ξ_s, $\bar{\xi}_s$ и замены

$$\xi_s = p_s e^{i\lambda_s t}, \quad \bar{\xi}_s = \bar{p}_s e^{-i\lambda_s t} \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

учитывая, что если $\beta_{s-1} \neq 0$, то $\lambda_s = \lambda_{s-1}$, получим

$$p_s^{\cdot} = \beta_{s-1} p_{s-1} + \mu P_{s1} + O(\mu^2), \quad \bar{p}^{\cdot}_s = \beta_{s-1} \bar{p}_{s-1} + \mu \bar{P}_{s1} + O(\mu^2)$$
$$\eta_\alpha^{\cdot} = \sigma_{\alpha-1} \eta_{\alpha-1} + \mu H_{\alpha 1}^* + O(\mu^2), \quad \zeta_j^{\cdot} = \nu_j \zeta_j + \varkappa_{j-1} \zeta_{j-1} + \mu G_{j1} + O(\mu^2) \tag{2.2}$$

Здесь число отличных от нуля β_{s-1} определяется кратностью критических корней и числом групп решений, соответствующих указанным корням.

Преобразования 2° и 3° проводятся аналогично нерезонансному случаю и система (2.2) приводится к виду

$$r_i^{\cdot} = g_{i-1} r_{i-1} + \mu \sum_{l \geqslant 1} R_{i1}^{(l)} r_1^{l_1} \ldots r_{2n+m}^{l_{2n+m}} + O(\mu^2)$$
$$\zeta_j^{\cdot} = \nu_j \zeta_j + \varkappa_{j-1} \zeta_{j-1} + \mu G_{j1}^* (r, \zeta, t) + O(\mu^2) \tag{2.3}$$
$$(r = r_1, \ldots, r_{2n+m}; \quad \zeta = \zeta_1, \ldots, \zeta_h; \quad i = 1, \ldots, 2n + m; \quad l = l_1 + \ldots + l_{2n+m})$$

В отличие от нерезонансного случая в системе (2.3) не понижается порядок подсистемы, соответствующей чисто мнимым корням.

Если уравнения

$$g_{i-1} r_{i-1} + \mu \sum_{l \geqslant 1} R_{i1}^{(l)} r_1^{l_1} \ldots r_{2n+m}^{l_{2n+m}} = 0$$

имеют вещественные корни $r_{10}, \ldots, r_{2n+m,0}$, то, подставляя их в преобразования, приводящие (2.1) к виду (2.3), получим искомые стационарные решения, которые являются почти-периодическими в случае, когда почти-периодические решения для ζ_j $(j = 1, \ldots, h)$ с точностью до μ определяются из уравнений

$$\zeta_j^{\cdot} = \nu_j \zeta_j + \varkappa_{j-1} \zeta_{j-1} + \mu G_{j1}^* (r_0, \zeta, t) \quad (r_0 = r_{10}, \ldots, r_{2n+m,0}) \tag{2.4}$$

Изложенный выше способ построения функции Ляпунова для найденных стационарных колебаний при условии, что корни соответствующего характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, приводит к неравенствам

(2.5) $$| r_i - r_{i0} | < \mu^{1-\varepsilon}, \quad | \zeta_j - \zeta_{j0} | < \mu^{1-\varepsilon}$$

где ε — сколь угодно малое положительное число, ζ_{j0} — ограниченные решения (2.4).

Из неравенств (2.5) следует, что $| x_k - x_{k0} |$ $(k = 1, \ldots, n_1)$ имеют порядок μ для любых t в интервале $(0, \infty)$.

Последнее несправедливо для нерезонансного случая.

3. В качестве примера рассмотрим пространственные колебания управляемого твердого тела в жидкости (см., например, [11]), движение рулей которого аппроксимировано почти-периодическими функциями времени. Начало связанной с телом системы координат $Axyz$ расположено в точке приложения выталкивающей силы, а координатные плоскости совпадают с плоскостями симметрии тела. Центр масс лежит на оси Ax.

Движение динамически и геометрически осесимметричного тела в связанной системе описывается следующими дифференциальными уравнениями:

(3.1)
$$u^\cdot = \frac{1}{k_{11}'} f_1, \qquad v^\cdot = a(\rho_z' f_2 - x_0 f_6), \qquad w^\cdot = a(\rho_z' f_3 + x_0 f_5)$$
$$p^\cdot = \frac{1}{\rho_x'} f_4, \qquad q^\cdot = a(x_0 f_3 + k_{22}' f_5), \qquad r^\cdot = a(-x_0 f_2 + k_{22}' f_6)$$
$$\varphi^\cdot = p - \operatorname{tg}\theta\,(q\cos\varphi - r\sin\varphi), \quad \psi^\cdot = \sec\theta\,(q\cos\varphi - r\sin\varphi)$$
$$\theta^\cdot = q\sin\varphi + r\cos\varphi$$
$$f_1 = m_0^{-1}(-c_x v_0^2 + c_p\cos\psi\cos\theta) + x_0(q^2 + r^2) + k_{22}'(vr - wq)$$
$$f_2 = m_0^{-1}[c_y v_0 + c_p(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\sin\theta)] -$$
$$- k_{11}' ur + k_{22}' wp - x_0 pq$$
$$f_3 = m_0^{-1}[c_z v_0^2 + c_p(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\sin\theta)] +$$
$$+ k_{11}' uq - k_{22}' vp - x_0 pq$$
$$f_4 = m_0^{-1} b_s m_x v_0^2$$
$$f_5 = m_0^{-1}[m_y v_0^2 - c_g x_c(\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\sin\theta) -$$
$$- x_0 uq + x_0 vp + P_{zx} pr$$
$$f_6 = m_0^{-1}[m_z v_0^2 + c_g x_c(\sin\psi\sin\varphi - \cos\psi\cos\varphi\sin\theta)] -$$
$$- x_0 ur + x_0 wp - P_{zx} pq$$
$$a = (\rho_z' k_{22}' - x_0^2)^{-1}, \quad P_{zx} = \rho_z' - \rho_x', \quad u = \frac{v_x}{v_s}, \quad v = \frac{v_y}{v_s}$$
$$w = \frac{v_z}{v_s}, \quad p = \omega_x \frac{l}{v_s}, \quad q = \omega_y \frac{l}{v_s}, \quad r = \omega_z \frac{l}{v_s}$$
$$k_{ii}' = 1 + \frac{\lambda_{ii}}{m} \quad (i = 1, 2), \quad k_{44}' = 1 + \frac{\lambda_{44}}{J_x}, \quad k_{66}' = 1 + \frac{\lambda_{66}}{J_z}$$
$$k_{26} = \frac{\lambda_{26}}{ml}, \quad m_0 = \frac{2m}{\rho S l}, \quad \rho_x' = \frac{J_x}{ml^2} k_{44}', \quad \rho_z' = \frac{J_z}{ml^2} k_{66}'$$
$$c_p = \frac{2(G - A)}{\rho S v_s^2}, \quad c_g = \frac{2G}{\rho S v_s^2}, \quad x_c = \frac{x_c^*}{l}, \quad b_s = \frac{b}{l}$$
$$x_0 = x_c + k_{26}, \quad v_0 = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

Здесь v_x, v_y, v_z — проекции скорости точки приложения выталкивающей силы на связанные оси Ax, Ay, Az соответственно, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции угловой скорости, m — масса тела, J_x, J_z — осевые моменты инерции, λ_{ij} — коэффициенты присоединенных масс, G — сила тяжести, A — выталкивающая сила, v_s — установившееся значение скорости поступательного движения, x_c^* — координата центра масс b — координата точки приложения равнодействующей гидродинамических сил, действующих на рули, относительно оси Ax, ρ — плотность жидкости, S — характерная площадь, l — характерный размер, φ, ψ, θ — углы Эйлера.

Структуру гидродинамических коэффициентов будем полагать следующей:

$$c_x = c_{x0} + b_3(\alpha^2 + \beta^2), \quad m_x = m_x^p p + m_x^\varphi \varphi + b_4(\alpha\delta_1 + \beta\delta_2)$$

$$c_y = c_y^\alpha \alpha + c_y^\delta \delta_2 + c_y^r \frac{r}{v_0} + b_1 \alpha^3$$

$$m_z = m_z^\alpha \alpha + m_z^\delta \delta_2 + m_z^r \frac{r}{v_0} + c_1 \alpha^3$$

$$c_z = -c_y^\alpha \beta - c_y^\delta \delta_1 - c_y^r \frac{q}{v_0} - b_1 \beta^3, \quad m_y = m_z^\alpha \beta + m_z^\delta \delta_1 + m_z^r \frac{q}{v_0} + c_1 \beta^3$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{v}{u}\right), \quad \beta = \arcsin \frac{w}{v_0}$$

$$\delta_k = A_k^{(1)} \sin(\omega_k^{(1)} t + \theta_k^{(1)}) + A_k^{(2)} \sin(\omega_k^{(2)} t + \theta_k^{(2)}) \quad (k = 1, 2)$$

Здесь α и β — углы атаки и скольжения, δ_k — углы отклонения рулей, $\omega_k^{(1)}$, $\omega_k^{(2)}$ — несоизмеримые частоты.

Введем $x_0 = \mu x_0^*$, $A_k^{(1)} = \mu A_k^{*(1)}$, $A_k^{(2)} = \mu A_k^{*(2)}$, $m_x^\varphi = \mu m_x^{*\varphi}$ и будем искать стационарные решения (3.1) в виде

$$u = u_s + \mu x_1, \quad z_i = \mu x_i$$

Здесь $u_s = (c_p / c_{x_0})^{1/2}$ — установившееся значение скорости вертикального заглубления, $z_i = v, w, p, q, r, \varphi, \psi, \theta$ для $i = 2, 3, \ldots, 9$ соответственно.

Полагая $m_z^\alpha = -c_y^\alpha c g k_{26} / c_p$, $m_z^r = c_y^\alpha \rho_z' / k_{22}'$, получим в характеристическом уравнении системы для x_i две пары кратных чисто мнимых корней с двумя группами решений, три нулевых с тремя группами решений и два различных отрицательных корня.

Определим стационарные решения такой системы по членам первого порядка относительно μ. Проводя преобразования, аналогичные изложенным в п. 2 для резонансного случая, получим

$$\begin{aligned}
&r_i^{\cdot} = \mu R_i + O(\mu^2), \quad (i = 2, 3, 5, \ldots, 9) \\
&\zeta_1^{\cdot} = a_{11}\zeta_1 + \mu G_{11}(r, \zeta_1, \zeta_4, t) + O(\mu^2) \\
&\zeta_4 = a_{44}\zeta_4 + \mu G_{41}(r, \zeta_1, \zeta_4, t) + O(\mu^2) \\
&R_2 = D_{202} r_2, \quad R_3 = D_{202} r_3 \\
&R_5 = D_{606} r_5 + D_{609} r_8, \quad R_6 = D_{606} r_6 + D_{609} r_9 \\
&R_7 = D_{707} r_7 + D_{759}(r_5 r_9 - r_6 r_8) \\
&R_8 = -D_{609} r_5 + D_{606} r_8, \quad R_9 = -D_{909} r_6 + D_{606} r_9
\end{aligned}$$

Здесь D_{ijk} — известные постоянные коэффициенты, G_{11} и G_{41} — известные многочлены с почти-периодическими коэффициентами.

Решая амплитудные уравнения и находя стационарные решения для x_i с точностью до μ, например, для x_2 получим

$$\begin{aligned}
x_2 = &-\sum_{\alpha=1}^{2} \left[\frac{M_{20}^{(\alpha)}}{\omega_2^{(\alpha)}} \cos \delta_2^{(\alpha)}\right] + \mu \sum_{\alpha=1}^{2} \left[B(t) H_{204}^{(\alpha)} \sin \delta_1^{(\alpha)} + \right. \\
&+ B(t) Q_{204}^{(\alpha)} \cos \delta_1^{(\alpha)} + \left(A(t) H_{201} + \frac{F_{21}^{(\alpha)}}{\omega_2^{(\alpha)}}\right) \sin \delta_2^{(\alpha)} + \\
&\left. + \left(A(t) Q_{201}^{(\alpha)} - \frac{G_{21}^{(\alpha)}}{\omega_2^{(\alpha)}}\right) \cos \delta_2^{(\alpha)}\right]
\end{aligned}$$

Здесь $M_{20}^{(\alpha)}$, $H_{204}^{(\alpha)}$, $Q_{204}^{(\alpha)}$, $H_{201}^{(\alpha)}$, $F_{21}^{(\alpha)}$, $G_{21}^{(\alpha)}$ — постоянные, представляющие собой комбинацию исходных коэффициентов, $A(t)$ и $B(t)$ — решения присоединенной системы, имеющие вид

$$A(t)=\frac{2u_s x_{10} e^{a_{11}t}}{2u_s+\mu x_{10}(1-e^{a_{11}t})},\quad x_{10}=x_1(0)$$

$$B(t)=c_1\exp\left[a_{44}t+\mu\frac{2a_{44}}{u_s}\int\limits_0^t A(t)\,dt\right]$$

$$(a_{11}<0,\ a_{44}<0,\ \delta_1^{(\alpha)}=\omega_1^{(\alpha)}t+\theta_1^{(\alpha)},\ \delta_2^{(\alpha)}=\omega_2^{(\alpha)}t+\theta_2^{(\alpha)})$$

Выбирая гидродинамические коэффициенты, можно удовлетворить условиям существования стационарных решений по членам первого порядка относительно μ.

Для заданных числовых значений проведено сравнение найденных аналитических решений с решениями системы (3.1), полученными численными методами. Результаты расчетов практически совпадают.

Поступила 23 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каменков Г. В.* Исследование нелинейных колебаний с помощью функций Ляпунова. Избр. тр. Т. 1, М., «Наука», 1971.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. Т. 2, М.— Л., Изд-во АН СССР, 1956.
3. *Еругин Н. П.* Приводимые системы. Тр. матем. ин-та им. Стеклова, 1946, т. 13.
4. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
5. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М., Гостехиздат, 1953.
6. *Каменков Г. В.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. Избр. тр. Т. 2, М., «Наука», 1972.
7. *Веретенников В. Г.* К устойчивости почти-периодических движений. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
8. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
9. *Четаев Н. Г.* К вопросу об оценках приближенных интегрирований. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Изд-во АН СССР, 1962.
10. *Веретенников В. Г.* К построению решений квазилинейных неавтономных систем в резонансных случаях. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
11. *Пантов Е. Н., Махин Н. Н., Шереметов Б. Б.* Основы теории движения подводных аппаратов. Л., «Судостроение», 1973.