Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.011

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ МАЛКИНА — МАССЕРА

А. С. Озиранер

(Москва)

Результаты, полученные в работах [1, 2], дополняются утверждением о равномерности по $\{t_0, x_0\}$ асимптотической устойчивости, а также распространяются на задачи асимптотической устойчивости относительно части переменных и оптимальной стабилизации относительно части переменных.

1. Пусть дана система дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \ \mathbf{X}(t, 0) \equiv 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \tag{1.1}$$

правые части которой в области

$$t \geqslant 0, \quad \| \mathbf{x} \| \leqslant H > 0 \tag{1.2}$$

непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решения.

И. Г. Малкин [1] показал, что если для системы (1.1) существуют две определенно-положительные функции $V(t, \mathbf{x})$ и $W(t, \mathbf{x})$, первая из которых допускает бесконечно малый высший предел, причем для любых двух чисел λ и μ, таких, что $0 < \lambda < \mu < H$, производная $V^{\cdot}(t, \mathbf{x})$ в силу системы (1.1) удовлетворяет условию

$$V^{\cdot}(t, \mathbf{x}) + W(t, \mathbf{x})_{\lambda \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant \mu} \rightrightarrows 0 \quad \text{при } t \to \infty \tag{1.3}$$

то невозмущенное движение $\mathbf{x} = 0$ устойчиво.

И. Л. Массера [2], анализируя этот результат, доказал, что при выполнении условий теоремы И. Г. Малкина [1] имеет место эквиасимптотическая устойчивость (называемая также [3] равномерной по $\mathbf{x}_0$ асимптотической устойчивостью).

Ниже будет показано, что при выполнении условий И. Г. Малкина [1] имеет место равномерная по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$ асимптотическая устойчивость, причем этот результат будет изложен применительно к задаче устойчивости относительно части переменных [4].

Представим вектор $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x} = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$, $m > 0$, $p \geqslant 0$, $n = m + p$ и предположим, что: а) правые части системы (1.1) в области

$$t \geqslant 0, \ \| \mathbf{y} \| \leqslant H > 0, \quad \| \mathbf{z} \| < +\infty \tag{1.4}$$

непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$, определенного начальными условиями $\mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$; б) решения системы (1.1) $\mathbf{z}$-продолжимы.

Кроме того, будем предполагать, что для любого $T > 0$ существует $L(T) > 0$, такое, что в области $0 \leqslant t \leqslant T$, $\| \mathbf{x} \| \leqslant H$ выполняется условие

$$\| \mathbf{X}(t, \mathbf{x}') - \mathbf{X}(t, \mathbf{x}'') \| \leqslant L \| \mathbf{x}' - \mathbf{x}'' \| \tag{1.5}$$

Теорема 1. Предположим, что существуют функции $V(t, \mathbf{x})$ и $W(t, \mathbf{x})$, удовлетворяющие в области (1.4) неравенствам

$$a(\| \mathbf{y} \|) \leqslant V(t, \mathbf{x}) \leqslant b(\| \mathbf{y} \|) \tag{1.6}$$

$$W(t, \mathbf{x}) \geqslant c(\| \mathbf{y} \|) \tag{1.7}$$

где $a(r)$, $b(r)$ и $c(r)$ — непрерывные монотонно возрастающие при $r \in [0, H]$ функции, обращающиеся в нуль при $r = 0$, причем для любых λ и μ, таких, что $0 < \lambda < \mu < H$, выполняется условие

$$V^{\boldsymbol{\cdot}}(t, \mathbf{x}) + W(t, \mathbf{x})_{\lambda \leqslant \| \mathbf{y} \| \leqslant \mu,\ 0 \leqslant \| \mathbf{z} \| < \infty} \rightrightarrows 0 \quad \text{при } t \to \infty \tag{1.8}$$

Тогда движение $\mathbf{x} = 0$ асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво равномерно по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$.

Доказательство. 1) Покажем, что движение $\mathbf{x} = 0$ $\mathbf{y}$-устойчиво равномерно по t_0 [1]. Пусть дано $\varepsilon \in (0, H)$. Согласно (1.8) и (1.7), для чисел $\lambda = b^{-1}(a(\varepsilon))$ (b^{-1} — функция, обратная к b) и $\mu = \varepsilon$ найдется такое $T(\varepsilon) > 0$, что при всех $t \geqslant T(\varepsilon)$ в области $b^{-1}(a(\varepsilon)) \leqslant \| \mathbf{y} \| \leqslant \varepsilon$ выполняется неравенство $V^{\boldsymbol{\cdot}}(t, \mathbf{x}) < 0$. В силу (1.5) имеет место непрерывная зависимость решений от начальных условий и, следовательно [5–7], можно подобрать такое $\delta(\varepsilon, T(\varepsilon)) = \delta(\varepsilon)$, $0 < \delta(\varepsilon) < b^{-1}(a(\varepsilon))$, что из $\| \mathbf{x}_0 \| < \delta$, $t_0 \in [0, T)$ следует $\| \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \| < b^{-1}(a(\varepsilon))$ (а потому и $\| \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \| < b^{-1}(a(\varepsilon))$) при всех $t \in [t_0, T]$. Покажем, что $\| \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$, если только $t_0 \geqslant 0$, $\| \mathbf{x}_0 \| < \delta$.

По выбору числа $\delta(\varepsilon)$ для этого достаточно доказать, что из $t_0 \geqslant T(\varepsilon)$, $\| \mathbf{y}_0 \| < b^{-1}(a(\varepsilon))$ вытекает $\| \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0$.

Пусть $t_0 \geqslant T(\varepsilon)$, $\| \mathbf{y}_0 \| < b^{-1}(a(\varepsilon))$; тогда, согласно (1.6), $V(t_0, \mathbf{x}_0) < b(b^{-1}(a(\varepsilon))) = a(\varepsilon)$.

Покажем, что

$$V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) < a(\varepsilon) \quad \text{при всех } t \geqslant t_0 \tag{1.9}$$

Допустим, от противного, что $V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) < a(\varepsilon)$ при $t \in [t_0, t_1)$, но $V(t_1, \mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}_0)) = a(\varepsilon)$, и, следовательно, $V^{\boldsymbol{\cdot}}(t_1, \mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}_0)) \geqslant 0$. Согласно (1.6), $b^{-1}(a(\varepsilon)) \leqslant \| \mathbf{y}(t_1; t_0, \mathbf{x}_0) \| \leqslant \varepsilon$ и поскольку $t_1 > T(\varepsilon)$, то $V^{\boldsymbol{\cdot}}(t_1, \mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}_0)) < 0$, что приводит к противоречию.

Из (1.9) на основании (1.6) вытекает, что $\| \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$.

Замечание. Фактически доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T(\varepsilon) > 0$, такое, что

$$V^{\boldsymbol{\cdot}}(t, \mathbf{x}) |_{V(t, \mathbf{x}) = a(\varepsilon)} < 0 \quad \text{при всех } t \geqslant T \tag{1.10}$$

2) Покажем, что движение $\mathbf{x} = 0$ является равномерно $\mathbf{y}$-притягивающим, т. е. при заданном $\delta(\varepsilon) > 0$ для любого $\alpha \in (0, \delta)$ существует такое $\tau(\alpha) > 0$, что из $t_0 \geqslant 0$, $\| \mathbf{x}_0 \| < \delta$ следует $\| \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \| < \alpha$ при всех $t \geqslant t_0 + \tau(\alpha)$.

Пусть дано $\alpha \in (0, \delta)$; по условию (см. (1.8) и (1.7)) существует такое $T(\alpha) > 0$, что при $t \geqslant T(\alpha)$, $b^{-1}(a(\alpha)) \leqslant \|\mathbf{y}\| \leqslant \varepsilon$ $(\alpha < \delta(\varepsilon) < b^{-1}(a(\varepsilon)) < \varepsilon)$ будет

$$(1.11) \qquad V^{\cdot}(t, \mathbf{x}) \leqslant -{}^1/_2 c\,(b^{-1}(a(\alpha)))$$

и, следовательно,

$$(1.12) \qquad V^{\cdot}(t, \mathbf{x})\,|_{V(t, \mathbf{x}) = a(\alpha)} < 0 \text{ при } t \geqslant T(\alpha)$$

Положим $t_0' = t_0'(\alpha) = \max\{t_0, T(\alpha)\}$, $\tau_1(\alpha) = (2b(\varepsilon) - a(\alpha)) / c\,(b^{-1}(a(\alpha)))$. Покажем, что существует момент $t_* \in (t_0', t_0' + \tau_1(\alpha))$, для которого

$$(1.13) \qquad V(t_*, \mathbf{x}(t_*;\ t_0, \mathbf{x}_0)) < a(\alpha)$$

Допустим, от противного, что при всех $t \in (t_0', t_0' + \tau_1(\alpha))$ имеет место неравенство $V(t, \mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)) \geqslant a(\alpha)$. Тогда на этом интервале времени $\|\mathbf{y}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)\| \geqslant b^{-1}(a(\alpha))$, а следовательно, в силу (1.11), $V^{\cdot}(t, \mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)) \leqslant -{}^1/_2 c\,(b^{-1}(a(\alpha)))$, и из соотношения

$$V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) = V(t_0, \mathbf{x}_0) + \int_{t_0}^{t} V^{\cdot}(\xi, \mathbf{x}(\xi; t_0, \mathbf{x}_0))\, d\xi$$

следует

$$\begin{aligned} 0 < a(\alpha) &\leqslant V(t_0' + \tau_1(\alpha), \mathbf{x}(t_0' + \tau_1(\alpha); t_0, \mathbf{x}_0)) = \\ &= V(t_0', \mathbf{x}(t_0'; t_0, \mathbf{x}_0)) + \int_{t_0'}^{t_0' + \tau_1(\alpha)} V^{\cdot}(\xi, \mathbf{x}(\xi; t_0, \mathbf{x}_0))\, d\xi \leqslant \\ &\leqslant b(\varepsilon) - {}^1/_2 c\,(b^{-1}(a(\alpha)))\tau_1(\alpha) = {}^1/_2 a(\alpha) \end{aligned}$$

что невозможно.

Из (1.13) на основании (1.12) заключаем, что $V(t, \mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)) < a(\alpha)$ при всех $t \geqslant t_*$ и потому $\|\mathbf{y}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)\| < \alpha$ при $t \geqslant t_*$. Следовательно, $\|\mathbf{y}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)\| < \alpha$ для любого $t \geqslant t_0 + \tau(\alpha) > t_*$, где $\tau(\alpha) = T(\alpha) + \tau_1(\alpha)$.

Теорема доказана.

Пусть, в частности, $m = n$; тогда справедлива

Теорема 2. Для равномерной по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$ асимптотической устойчивости движения $\mathbf{x} = 0$ достаточно, а при условии непрерывности и ограниченности в области (1.2) правых частей системы (1.1) и их частных производных по координатам и необходимо, чтобы существовали две определенно-положительные функции $V(t, \mathbf{x})$ и $W(t, \mathbf{x})$, первая из которых допускает бесконечно малый высший предел, причем для любых λ и μ, $0 < \lambda < \mu < H$, выполняется соотношение (1.3).

Доказательство. Достаточность вытекает из теоремы 1. Докажем необходимость. При условиях, наложенных на правые части системы (1.1), как показал И. Г. Малкин [8,9], существует определенно-положительная и допускающая бесконечно малый высший предел функция $V(t, \mathbf{x})$, имеющая определенно-отрицательную производную $V^{\cdot}(t, \mathbf{x})$. Положив $W(t, \mathbf{x}) \equiv -V^{\cdot}(t, \mathbf{x})$, получим две функции, удовлетворяющие условиям теоремы 2, что и требовалось доказать.

Наряду с системой (1.1) рассмотрим «возмущенную» систему

(1.14) $$\mathbf{x}^{*\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}^*) + \mathbf{R}(t, \mathbf{x}^*), \quad \mathbf{R}(t, 0) \equiv 0$$

относительно которой будем предполагать выполнение условий а), б) и (1.5).

Теорема 3. Предположим, что существует функция $V(t, \mathbf{x})$, удовлетворяющая неравенствам (1.6), производная от которой в силу системы (1.1) $V^{\cdot}(t, \mathbf{x}) \leqslant -c(\|\mathbf{y}\|)$, причем для любых λ и μ, таких, что $0 < \lambda < \mu < H$, выполняется условие

(1.15) $$\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{R}(t, \mathbf{x})_{\lambda \leqslant \|\mathbf{y}\| \leqslant \mu,\, 0 \leqslant \|\mathbf{z}\| < \infty} \rightrightarrows 0 \text{ при } t \to \infty$$

Тогда движение $\mathbf{x}^* = 0$ системы (1.14) асимптотически $\mathbf{y}^*$-устойчиво равномерно по $\{t_0, \mathbf{x}_0^*\}$.

Это утверждение вытекает из теоремы 1, поскольку производные от функции $V^{\cdot}(t, \mathbf{x})$ в силу систем (1.1) и (1.14), обозначаемые $V_{(1)}^{\cdot}(t, \mathbf{x})$ и и $V_{(2)}^{\cdot}(t, \mathbf{x})$ соответственно, связаны равенством

$$V^{\cdot}_{(2)}(t, \mathbf{x}) = V^{\cdot}_{(1)}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{R}(t, \mathbf{x})$$

Если функция $V(t, \mathbf{x})$ имеет ограниченные частные производные $\partial V / \partial \mathbf{x}$, то условие (1.15) можно, очевидно, заменить требованием

$$\mathbf{R}(t, \mathbf{x})_{\lambda \leqslant \|\mathbf{y}\| \leqslant \mu,\, 0 \leqslant \|\mathbf{z}\| < \infty} \rightrightarrows 0 \text{ при } t \to \infty$$

2. Рассмотрим управляемую систему

(2.1) $$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^r$$

для которой критерий качества управления принимается в виде условия минимума интеграла [10]

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, \mathbf{x}[t], \mathbf{u}[t])\, dt, \quad \omega \geqslant 0$$

В качестве допустимых рассматриваются непрерывные в области (1.4) управления $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, для которых система (2.1) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет условиям а) и б) из п. 1. Если выбран некоторый класс $K = \{\mathbf{u}(t, \mathbf{x})\}$ допустимых управлений $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, то говорят об оптимальной у-стабилизации в классе K [11]; поскольку в рассматриваемом случае класс K совпадает со всем множеством допустимых управлений, то будем говорить об оптимальной у-стабилизации, опуская слова «в классе K».

Следуя [10], примем обозначение

$$B[V, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}] = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \omega(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Теорема 4. Предположим, что существуют функции $V(t, \mathbf{x})$, $W(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x})$, обладающие следующими свойствами:

1) для любого $T > 0$ существует $L(T) > 0$ такое, что в области $0 \leqslant t \leqslant T$, $\|\mathbf{x}\| \leqslant H$ выполняется условие

$$\|\mathbf{X}(t, \mathbf{x}', \mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x}')) - \mathbf{X}(t, \mathbf{x}'', \mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x}''))\| \leqslant L \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|$$

2) функция $V(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет неравенствам (1.6), а $W(t, \mathbf{x})$ — неравенству (1.7);

3) для любых λ и μ, $0 < \lambda < \mu < H$, справедливо соотношение

$$-\omega(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x})) + W(t, \mathbf{x})_{\lambda \leqslant \|\mathbf{y}\| \leqslant \mu,\ 0 \leqslant \|\mathbf{z}\| < \infty} \rightrightarrows 0 \text{ при } t \to \infty$$

4) $B[V, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x})] = 0$;

5) $B[V, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}] \geqslant 0$ для любого $\mathbf{u}$.

Тогда функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x})$ разрешает задачу об оптимальной y-стабилизации.

Доказательство. В силу 1) — 3) функции $V(t, \mathbf{x})$ и $W(t, \mathbf{x})$ удовлетворяют условиям теоремы 1 для системы

$$\mathbf{x}^\bullet = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x}))$$

и, следовательно, движение $\mathbf{x} = 0$ этой системы асимптотически y-устойчиво равномерно по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$. Пусть $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x})$ — какое-либо допустимое управление, обеспечивающее асимптотическую y-устойчивость движения $\mathbf{x} = 0$ системы (2.1). В силу второго из неравенств (1.6)

$$\lim_{t\to\infty} V(t, \mathbf{x}^\circ[t]) = \lim_{t\to\infty} V(t, \mathbf{x}^*[t]) = 0$$

Согласно [11], отсюда вытекает требуемый результат.

Аналогичным образом, используя результаты [11] и многие известные теоремы об асимптотической y-устойчивости, можно получить ряд критериев оптимальной y-стабилизации подобно тому, как теорема 4 была выведена из теоремы 1.

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе.

Поступила 26 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Обобщение основной теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Докл. АН СССР, 1938, т. 18, № 3.
2. *Massera I. L.* On Liapounov's condition of stability. Ann. Math., 1949, vol. 50, No. 3.
3. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
4. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
5. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
6. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
7. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М., «Наука», 1967.
8. *Малкин И. Г.* К вопросу об обратимости теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
9. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
10. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. Доп. 4. В кн.: И. Г. Малкин. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
11. *Озиранер А. С.* Об оптимальной стабилизации движения относительно части переменных. ПММ, 1978, т. 42, вып. 2.