Прикладная математика и механика, Том 43, 1979

УДК 531.36

# О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ НЕСКОЛЬКИХ РЕЗОНАНСОВ

**В. Э. Жавнерчик**

(Минск)

Рассматривается задача об устойчивости положения равновесия автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае $n$ пар чисто мнимых корней при одновременном наличии нескольких резонансов. С помощью теоремы Четаева [1] показывается, что если среди решений модельной системы есть растущее решение типа инвариантного луча, то полная система неустойчива по Ляпунову.

Рассмотрим систему

$$x_*^{\cdot} = Ax_* + X_*(x_*), \quad X_*(0) = 0 \tag{1}$$

Здесь $x_*$ и $X_*$ — $2n$-мерные векторы пространства $E_{2n}$; $A$ — квадратная постоянная матрица с чисто мнимыми собственными значениями $\pm i\omega_s$ $(\omega_s > 0,\ s = 1, \ldots, n)$, среди которых нет кратных; $X_*(x_*)$ — голоморфная вектор-функция $x_*$, разложение которой по степеням $x_*$ начинается формой $m$-го порядка.

Пусть система (1) имеет $\mu > 1$ резонансных соотношений вида

$$\begin{gathered}\langle \Omega, P_\nu \rangle = 0, \quad \nu = 1, \ldots, \mu \\ \Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_q), \quad P_\nu = (p_{\nu 1}, \ldots, p_{\nu q}) \\ |P_\nu| = \sum_{j=1}^{q} |p_{\nu j}| = k, \quad k = m + 1 \geqslant 3\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $P_\nu$ — вектор размерности $q$ $(q \leqslant n)$ с целочисленными взаимно-простыми компонентами, $k$ — нечетное число.

В работах [2-6] исследовалась устойчивость положения равновесия автономной системы (1) при условии (2) в первом нелинейном порядке. Ниже рассматривается задача об устойчивости положения равновесия полной системы (1) при выполнении условия (2).

Как известно, с помощью специального линейного преобразования систему (1) можно представить в виде

$$x^{\cdot} = i\omega x + X(x, y), \quad y^{\cdot} = -i\omega y + Y(x, y) \tag{3}$$

Здесь $x, y$ — комплексно-сопряженные $n$-мерные векторы; $\omega$ — диагональная $n \times n$-матрица; $X(x, y)$, $Y(x, y)$ — голоморфные комплексно-сопряженные $n$-мерные вектор-функции, разложения которых по степеням $x, y$ начинаются формами $m$-го порядка.

С помощью нормализующего нелинейного преобразования систему (3) в полярных координатах $r_s$, $\varphi_s$ $(s = 1, \ldots, n)$ можно привести [6] к следующему виду (уравнения для $\varphi_\alpha$ не выписаны):

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
& r_j^{\cdot} = 2 \sum_{\nu=1}^{\mu} R_\nu Q_{\nu j}(\theta_\nu) + \Upsilon_j(r, \varphi), \quad r_\alpha^{\cdot} = \Upsilon_\alpha(r, \varphi) \\
& \theta_\nu^{\cdot} = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{q} \frac{|p_{\nu j}|}{r_j} R_i Q_{ij}'(\theta_i) + \Theta_\nu(r, \varphi) \\
& j = 1, \ldots, q; \quad \nu = 1, \ldots, \mu; \quad \alpha = q + 1, \ldots, n \\
& R_\nu^2 = \prod_{l=1}^{q} r_l^{|p_{\nu l}|}, \quad \theta_\nu = \sum_{j=1}^{q} p_{\nu j} \varphi_j \\
& Q_{\nu j}(\theta_\nu) = a_{\nu j} \cos\theta_\nu + b_{\nu j} \sin\theta_\nu, \quad Q_{\nu j}' = dQ_{\nu j} / d\theta_\nu \\
& r = (r_1, \ldots, r_n), \quad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \quad \Theta_\nu(r, \varphi) \sim O(\| r \|^{(k-1)/2}) \\
& \Upsilon_s(r, \varphi) \sim O(\| r \|^{(k+1)/2}), \; s = 1, \ldots, n \\
& Q_{\nu j}(\theta_\nu) \equiv 0, \text{ если } p_{\nu j} = 0
\end{aligned}
$$

В соответствующей модельной системе $\Upsilon_s(r, \varphi) \equiv 0$, $\Theta_\nu(r, \varphi) \equiv 0$ $(s = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, \ldots, \mu)$. Для того чтобы модельная система имела растущее решение типа инвариантного луча

$$
(5) \qquad \begin{aligned}
& r_j = k_j b(t), \quad k_j > 0, \quad b^{\cdot} = 2b^{k/2}, \; j = 1, \ldots, q \\
& \theta_\nu = \theta_\nu^\circ = \text{const}, \; \nu = 1, \ldots, \mu
\end{aligned}
$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
& k_j = \sum_{\nu=1}^{\mu} R_\nu^\circ Q_{\nu j}^\circ > 0, \quad \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{q} \frac{|p_{\nu j}| R_i^\circ Q_{ij}^{\circ\prime}}{k_j} = 0 \\
& R_\nu^\circ = R_\nu(k_1, \ldots, k_q), \quad Q_{\nu j}^\circ = Q_{\nu j}(\theta_\nu^\circ); \\
& j = 1, \ldots, q; \; \nu = 1, \ldots, \mu
\end{aligned}
$$

Действительно, подставив решение вида (5) в модельную систему и полагая

$$
(7) \qquad b^{\cdot} = 2b^{k/2}
$$

получим искомые соотношения (6). С другой стороны, очевидно, решение вида (5) модельной системы существует, если найдутся такие $k_j > 0$ $(j = 1, \ldots, q)$ и $\theta_\nu^\circ$ $(\nu = 1, \ldots, \mu)$, которые удовлетворяют (6). При этом функция $b(t)$ найдется из уравнения (7).

Введем обозначения ($\delta_{\beta h}$ — символ Кронекера)

$$
\begin{aligned}
& A_{\beta h} = \sum_{\nu=1}^{\mu} S_{\nu\beta}^\circ K_{\nu h} - 2\delta_{\beta h}, \quad A_{\beta, n+\nu} = S_{\nu\beta}^{\circ\prime} \\
& A_{n+\nu, \beta} = \sum_{i=1}^{\mu} (T_{\nu i}^{\circ\prime} K_{i\beta} - L_{\nu i\beta}), \quad A_{n+\nu, n+i} = -T_{\nu i}^\circ \\
& K_{\nu\beta} = \frac{1}{2\sqrt{q-\beta}} \left[ \sum_{l=\beta+1}^{q} |p_{\nu l}| - (q-\beta) |p_{\nu\beta}| \right] \\
& L_{\nu i\beta} = \frac{R_i^\circ}{\sqrt{q-\beta}} \left[ \sum_{l=\beta+1}^{q} \frac{|p_{\nu l}| Q_{il}^{\circ\prime}}{k_l} - \frac{(q-\beta) |p_{\nu\beta}| Q_{i\beta}^{\circ\prime}}{k_\beta} \right]
\end{aligned}
$$

$$S_{\nu\beta}(\theta_\nu) = \frac{2R_\nu^\circ}{(q-\beta+1)\sqrt{q-\beta}}\left[\sum_{l=\beta+1}^{q}\frac{Q_{\nu l}(\theta_\nu)}{k_l} - \frac{(q-\beta)\,Q_{\nu\beta}(\theta_\nu)}{k_\beta}\right]$$

$$\overset{\circ}{S}_{\nu\beta} = S_{\nu\beta}(\theta_\nu^\circ)$$

$$T_{\nu i}(\theta_i) = R_i^\circ\sum_{j=1}^{q}\frac{|p_{\nu j}|\,Q_{ij}(\theta_i)}{k_j}, \quad T_{\nu i}^\circ = T_{\nu i}(\theta_i^\circ)$$

$$\beta, h = 1, \ldots, q-1; \quad \nu, i = 1, \ldots, \mu$$

*Теорема.* Предположим, что

(8) $\det\|A_{\upsilon\zeta} - N\delta_{\upsilon\zeta}\| \neq 0, N = 1, 2, \ldots \; (\upsilon, \zeta = 1, \ldots, n+\mu;$
$\upsilon, \zeta \neq q, \ldots, n)$

Тогда, если соответствующая модельная система имеет растущее решение типа инвариантного луча (5), то положение равновесия полной системы (4) неустойчиво по Ляпунову.

*Доказательство.* Введем в (4) обобщенные $n$-мерные цилиндрические координаты $\rho$, $\psi_\beta\,(\beta = 1, \ldots, q-1)$, $r_\alpha\,(\alpha = q+1, \ldots, n)$ по формулам

$$r_1 = k_1\rho\cos\psi_1; \quad r_j = k_j\rho\cos\psi_j\prod_{l=1}^{j-1}\sin\psi_l, \quad j = 2, \ldots, q-1 \tag{9}$$

$$r_q = k_q\rho\prod_{l=1}^{q-1}\sin\psi_l; \quad r_\alpha = r_\alpha, \quad \alpha = q+1, \ldots, n$$

Растущему решению вида (5) в системе координат (9) соответствуют значения

$$\psi_\beta = \psi_\beta^\circ, \quad \cos\psi_\beta^\circ = (q-\beta+1)^{-1/2}, \quad \sin\psi_\beta^\circ = \left(\frac{q-\beta}{q-\beta+1}\right)^{1/2}$$
$$\beta = 1, \ldots, q-1$$

Линеаризуя новую систему по переменным $\psi_\beta$, $\theta_\nu$ в окрестности точки $\psi_\beta^\circ$, $\theta_\nu^\circ$ с учетом условий (6) и применяя преобразование

$$\overline{\psi}_\beta = \psi_\beta^* + \sum_{l=1}^{2(1+\gamma)} c_{\beta l}\rho^{l/2}, \quad \beta = 1, \ldots, q-1$$

$$\overline{\theta}_\nu = \theta_\nu^* + \sum_{l=1}^{2(1+\gamma)} d_{\nu l}\rho^{l/2}, \quad \nu = 1, \ldots, \mu$$

($c_{\beta l}$, $d_{\nu l}$ — некоторые постоянные; $\gamma$ — параметр, определяемый ниже) с учетом (8), запишем систему в следующем виде:

$$\rho^\cdot = 2\varkappa\rho^{k/2} + F(r_*, \psi^*, \varphi)$$

$$\psi_\beta^{*\cdot} = \varkappa\rho^{k/2-1}\Big(\sum_{h=1}^{q-1} A_{\beta h}\psi_h^* + \sum_{i=1}^{\mu} A_{\beta, n+i}\theta_i^*\Big) + F_\beta(r_*, \psi^*, \varphi)$$

$$\theta_\nu^{*\cdot} = \varkappa\rho^{k/2-1}\Big(\sum_{h=1}^{q-1} A_{n+\nu, h}\psi_h^* + \sum_{i=1}^{\mu} A_{n+\nu, n+i}\theta_i^*\Big) + F_{n+\nu}(r_*, \psi^*, \varphi)$$

$$r_\alpha^\cdot = F_\alpha(r_*, \psi^*, \varphi)$$

$$\beta = 1, \ldots, q-1; \; \nu = 1, \ldots, \mu; \; \alpha = q+1, \ldots, n$$

$$r_* = (\rho, r_{q+1}, \ldots, r_n), \quad \psi^* = (\psi_1^*, \ldots, \psi_{q-1}^*), \quad \theta^* = (\theta_1^*, \ldots$$
$$\ldots, \theta_\mu^*), \quad \varkappa = q^{(2-k)/4}$$

$$F(r_*, \psi^*, \varphi) = F^{(1)}(r_*, \psi^*, \varphi) + \rho^{k/2} F^{(2)}(r_*, \psi^*, \varphi)$$
$$F^{(1)} \sim O(\| r_* \|^{(k+1)/2}), \quad F^{(2)}(0, \psi^*, \varphi) \sim O(\| (\psi^*, \theta^*) \|)$$
$$F_\upsilon(r_*, \psi^*, \varphi) = F_\upsilon^{(1)}(r_*, \psi^*, \varphi) + \rho^{-1/2} F_\upsilon^{(2)}(r_*, \psi^*, \varphi) +$$
$$+ \rho^{k/2-1} F_\upsilon^{(3)}(r_*, \psi^*, \varphi)$$
$$F_\upsilon^{(1)} \sim O(\| r_* \|^{(k-1)/2}), \quad F_\upsilon^{(2)} \sim O(\| r_* \|^{(k+1)/2}),$$
$$F_\upsilon^{(3)}(0, \psi^*, \varphi) \sim O(\| (\psi^*, \theta^*) \|^2)$$
$$F_\upsilon(\rho, 0, \ldots, 0) \sim O(\rho^{(k+1)/2+\gamma}), \quad \upsilon = 1, \ldots, n + \mu$$
$$(\upsilon \neq q, \ldots, n)$$
$$F_\alpha(r_*, \psi^*, \varphi) \sim O(\| r_* \|^{(k+1)/2}), \quad \alpha = q + 1, \ldots, n$$

Рассмотрим функции

$$V = \rho, \quad W_\beta = \psi_\beta^{*2} - \rho^{2(1+\gamma)}$$
$$W_{n+\nu} = \theta_\nu^{*2} - \rho^{2(1+\gamma)}, \quad W_\alpha = r_\alpha^2 - \rho^{2(1+\gamma)}$$
$$\beta = 1, \ldots, q - 1; \ \nu = 1, \ldots, \mu; \ \alpha = q + 1, \ldots, n$$

В конусе $K_1$, содержащем растущее решение модельной системы, при $0 < \| r_* \| < \tau$ ($\tau$ достаточно мало) выполняется неравенство $VV^{\cdot} > 0$. Конус $K_2$ определим неравенством

$$\max_\iota W_\iota \leqslant 0, \quad \iota = 1, \ldots, n + \mu \ (\iota \neq q)$$

Рассуждая далее так, как это делается в [7] (теорема 3.1), находим производные (с точностью до слагаемых порядка $\rho^{1/2+\sigma}$)

$$W_{\upsilon 0}^{\cdot} = 2\varkappa\rho^\sigma \left[\sum_{\zeta=1}^{n+\mu} A_{\upsilon\zeta}\delta_\zeta - 2(1+\gamma)\right]$$
$$W_{\alpha 0}^{\cdot} = -4\varkappa\rho^\sigma (1 + \gamma); \quad \sigma = 2\gamma + k/2 + 1, \quad |\delta_\zeta| \leqslant 1$$
$$\upsilon, \zeta = 1, \ldots, n + \mu \ (\upsilon, \zeta \neq q, \ldots, n); \ \alpha = q + 1, \ldots, n$$

Видно, что при достаточно большом $\gamma$ и при всех допустимых значениях $\delta_\zeta$ при $\rho < \tau$ имеем

$$W_{\iota 0}^{\cdot} < 0, \quad \iota = 1, \ldots, n + \mu \ (\iota \neq q)$$

Следовательно, функции $V$ и $W = \max W_\iota$ ($\iota = 1, \ldots, n + \mu$; $\iota \neq q$) удовлетворяют теореме Четаева о неустойчивости [1]. Теорема доказана.

*Пример*. Рассмотрим взаимодействие двух резонансов

$$\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 = 0, \quad 2\omega_1 - \omega_4 = 0$$

из которых первый сильный, а второй слабый (терминология [5]). Пусть в этом случае модельная система имеет вид

$$r_1^{\cdot} = 2b_{11}\sqrt{r_1r_2r_3}\sin\theta_1 + 2b_{21}\sqrt{r_1^2r_4}\sin\theta_2 \tag{10}$$
$$r_\gamma^{\cdot} = 2b_{1\gamma}\sqrt{r_1r_2r_3}\sin\theta_1 \quad (\gamma = 2, 3), \quad r_4^{\cdot} = 2b_{24}\sqrt{r_1^2r_4}\sin\theta_2$$
$$\theta_1^{\cdot} = \left(\frac{b_{11}}{r_1} + \frac{b_{12}}{r_2} + \frac{b_{13}}{r_3}\right)\sqrt{r_1r_2r_3}\cos\theta_1 + \frac{b_{21}}{r_1}\sqrt{r_1^2r_4}\cos\theta_2$$
$$\theta_2^{\cdot} = \frac{2b_{11}}{r_1}\sqrt{r_1r_2r_3}\cos\theta_1 + \left(\frac{2b_{21}}{r_1} + \frac{b_{24}}{r_4}\right)\sqrt{r_1^2r_4}\cos\theta_2$$
$$\theta_1 = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3, \quad \theta_2 = 2\varphi_1 - \varphi_4$$
$$(\operatorname{sign} b_{1j}b_{1h} = 1 \ (j, h = 1, 2, 3); \ \operatorname{sign} b_{21}b_{24} = -1)$$

Эта система имеет следующее растущее решение:

$$r_1 = |b_{11}b_{12}b_{13}|\, b(t), \quad r_4 = |b_{11}|\, b_{24}^2 b(t)$$
$$r_\gamma = |b_{1\gamma}|\,(|b_{12}b_{13}| + |b_{21}b_{24}|)\, b(t), \quad \gamma = 2, 3$$
$$\theta_\nu = (-1)^{\nu-1}(\pi/2)\operatorname{sign} b_{\nu 1}, \quad \nu = 1, 2$$

Следовательно, согласно доказанной теореме, положение равновесия полной системы, которой соответствует модельная (10), неустойчиво по Ляпунову при всех отличных от нуля значениях параметров $b_{\nu j}$ кроме значений, удовлетворяющих условию $| b_{21}b_{24} / b_{12}b_{13} | = N$ $(N = 2, 3, \ldots)$.

Автор благодарит В. В. Румянцева за постановку задачи.

Поступила 4 I 1979

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962.
2. *Куницын А. Л.* Об устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при внутреннем резонансе. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, вып. 9.
3. *Хазина Г. Г.* Некоторые вопросы устойчивости при наличии резонансов. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
4. *Хазина Г. Г.* К вопросу о взаимодействии резонансов. ПММ, 1976, т. 40, вып. 5.
5. *Куницын А. Л., Медведев С. В.* Об устойчивости при наличии нескольких резонансов. ПММ, 1977, т. 41, вып. 3.
6. *Жавнерчик В. Э.* Об устойчивости автономных систем при наличии нескольких резонансов. ПММ, 1979, т. 43, вып. 2.
7. *Гольцер Я. М., Куницын А. Л.* Об устойчивости автономных систем при внутреннем резонансе. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.