Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.36

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В ОДНОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

С. В. Медведев, В. Н. Тхай

(Москва)

Решается задача об устойчивости тривиального решения автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае одного нулевого, $m$ пар чисто мнимых и $q$ корней с отрицательными вещественными частями. Доказано, что наличие нулевого корня, как правило, ведет к неустойчивости, что обнаруживается уже по формам второго порядка разложения в ряды правых частей уравнений. В случае вырождения указаны необходимые и достаточные условия устойчивости модельной (упрощенной) системы; показано, что при отсутствии дополнительного вырождения из неустойчивости модельной системы следует и неустойчивость исходной системы. При выполнении необходимых условий устойчивости модельной системы получены достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости исходной системы.

**1. Предварительные замечания.** Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &x_*^{\cdot} = Ax_* + X_*(x_*), \quad X_*(0) = 0 \\ &x_* = (x_1^*, \ldots, x_n^*), \quad X_* = (X_1^*, \ldots, X_n^*) \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $x_*$ и $X_*$ — $n$-мерные векторы евклидова пространства $E_n$, $X_*(x_*)$ — голоморфные функции $x_*$, $A = \| a_{rs} \|$ — постоянная $n \times n$-матрица. Характеристическое уравнение $\| a_{rs} - \delta_{rs}\lambda \| = 0$ имеет один нулевой, $m$ пар чисто мнимых $\pm\lambda_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ и $q$ корней с отрицательными вещественными частями $(2m + q + 1 = n)$, причем, если среди чисто мнимых корней есть кратные, то им отвечают простые элементарные делители.

Посредством невырожденного линейного преобразования приведем систему (1.1) к виду

$$\begin{aligned} &y_*^{\cdot} = Q_* y_* + Y_*(y_*, z_*), \quad z_*^{\cdot} = P_* z_* + Z_*(y_*, z_*) \\ &y_* = (y_1^*, \ldots, y_{2m+1}^*), \quad Y_* = (Y_1^*, \ldots, Y_{2m+1}^*), \\ &z_* = (z_1^*, \ldots, z_q^*), \quad Z_* = (Z_1^*, \ldots, Z_q^*) \end{aligned} \tag{1.2}$$

где постоянные матрицы $Q_*$, $P_*$ имеют собственные значения соответственно с нулевыми и отрицательными вещественными частями.

Известно [1, 2], что с помощью полиномиального преобразования

$$u_* = \sum_{l=1}^{l_*} u_*^{(l)}(y_*), \quad u_* = (u_1^*, \ldots, u_q^*), \quad u_*^{(l)} = (u_{*1}^{(l)}, \ldots, u_{*q}^{(l)})$$

где $u_{*i}^{(l)}$ $(i = 1, \ldots, q)$ — формы порядка $l$ от $y_1^*, \ldots, y_{2m+1}^*$; задача об устойчивости тривиального решения (1.2) сводится к решению ее для «укороченной» системы (группа уравнений (1.2) по $y_*$, в которой $z_*$ заменены на $u_*(y_*)$), если для последней вопрос решается формами до порядка $l_*$ включительно в разложении функций $Y_*(y_*, u_*(y_*))$ в ряды по степеням $y_*$.

Ниже предполагается, что указанное преобразование выполнено и $l_* \geqslant 2$. Запишем укороченную систему

$$
\begin{aligned}
(1.3)\qquad & \zeta^{\boldsymbol\cdot} = F(\zeta, y, \bar{y})\\
& y^{\boldsymbol\cdot} = \Lambda y + Y(\zeta, y, \bar{y}), \quad \bar{y}^{\boldsymbol\cdot} = -\Lambda y + \bar{Y}(\zeta, y, \bar{y})\\
& y = (y_1, \ldots, y_m), \quad Y = (Y_1, \ldots, Y_m), \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)
\end{aligned}
$$

Здесь $\zeta$ — действительная переменная, $y, \bar{y}$— комплексно-сопряженные векторы, $\Lambda$ — диагональная матрица чисто мнимых собственных значений, разложения функции $F$ и комплексно-сопряженных вектор-функций $Y$, $\bar{Y}$ в ряды по $\zeta$, $y$, $\bar{y}$ начинаются членами второго порядка.

Преобразуем систему (1.3) посредством нелинейной замены [3]

$$
\begin{aligned}
& \zeta = x + \sum_{l=2}^{l_*} \Xi^{(l)}(x, u, v)\\
& y = u + \sum_{l=2}^{l_*} \Phi^{(l)}(x, u, v), \quad \bar{y} = \sum_{l=2}^{l_*} \Psi^{(l)}(x, u, v)\\
& \Phi^{(l)} = (\Phi_1^{(l)}, \ldots, \Phi_m^{(l)}), \quad \Psi^{(l)} = (\Psi_1^{(l)}, \ldots, \Psi_m^{(l)})
\end{aligned}
$$

к нормальной форме до членов порядка $l_*$ включительно, где $x$ — действительная переменная, $u$, $v$ — комплексно-сопряженные векторы с компонентами $u_i, v_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, комплексно-сопряженные функции $\Phi_i^{(l)}$, $\Psi_i^{(l)}$ — формы порядка $l$ от $x$, $u$, $v$. Тогда в новых переменных получим следующую систему [1, 2]:

$$
\begin{aligned}
(1.4)\qquad & x^{\boldsymbol\cdot} = \sum_{l=2}^{l_*} X^{(l)}(x, u, v) + X(x, u, v)\\
& u^{\boldsymbol\cdot} = \Lambda u + \sum_{l=2}^{l_*} U^{(l)}(x, u, v) + U(x, u, v)\\
& v^{\boldsymbol\cdot} = -\Lambda v + \sum_{l=2}^{l_*} V^{(l)}(x, u, v) + V(x, u, v)
\end{aligned}
$$

Разложения функции $X$ и комплексно-сопряженных вектор-функций $U$, $V$ начинаются членами порядка выше $l_*$, а $X^{(l)}$ и $U^{(l)}$, $V^{(l)}$ — действительная и комплексно-сопряженные вектор-формы порядка $l$, так что

$$
\begin{aligned}
& X^{(l)} = \sum_{p_0+|k_0|+|l_0|=l} R_{p_0k_0l_0} x^{p_0} u_1^{k_{01}} \ldots u_m^{k_{0m}} v_1^{l_{01}} \ldots v_m^{l_{0m}}\\
& U_s^{(l)} = \sum_{p_s+|k_s|+|l_s|=l} R_{p_sk_sl_s} x^{p_s} u_1^{k_{s1}} \ldots u_m^{k_{sm}} v_1^{l_{s1}} \ldots v_m^{l_{sm}} \quad (s = 1, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

При этом отличны от нуля лишь те коэффициенты $R_{p_0k_0l_0}$, $R_{p_sk_sl_s}$, для которых целочисленные векторы

$$
\begin{aligned}
& k_s = (k_{s1}, \ldots, k_{sm}), \quad l_s = (l_{s1}, \ldots, l_{sm}), \quad k_{sj}, l_{sj} \geqslant 0\\
& (s = 0, 1, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

удовлетворяют одному из соотношений [3]

$$\langle (k_0 - l_0),\ \Lambda\rangle = 0,\quad p_0 + |k_0| + |l_0| = l \tag{1.5}$$
$$\langle (k_s - l_s),\ \Lambda\rangle = \lambda_s,\ p_s + |k_s| + |l_s| = l\quad (s = 1, \ldots, m)$$
$$p_0, p_s \geqslant 0,\quad |k_s| = \sum_{j=1}^{m} k_{sj},\quad |l_s| = \sum_{j=1}^{m} l_{sj}$$

где $p_0$, $p_s$ — целые числа.

Можно убедиться, что соотношения (1.5) выполняются тождественно по $\lambda_s$, если

$$k_{0j} = l_{0j},\quad k_{sj} = l_{sj} + \delta_{sj}\quad (s, j = 1, \ldots, m)$$

где $\delta_{sj}$ — символ Кронекера. При этом, если $l$ — четное, то $p_0 = 0, 2, \ldots, l$; $p_s = 1, 3, \ldots, l - 1$; если $l$ — нечетное, то $p_0 = 1, 3, \ldots, l$; $p_s = 0, 2, \ldots, l - 1$.

Но если $\Lambda$ удовлетворяет условию внутреннего резонанса [4]

$$\langle P_r,\ \Lambda\rangle = 0,\quad P_r = (P_{r1}, \ldots, P_{rm}),\ |P_r| = K\,(r = 1, \ldots, r_*) \tag{1.6}$$

то в уравнениях (1.4) при $l = K - 1, \ldots, l_*$ появляются дополнительно члены внутреннего резонанса, доставляемые (1.5), (1.6). При наличии кратных корней ($K = 2$) дополнительные члены внутреннего резонанса появляются при $l = 2, \ldots, l_*$.

**2. Теорема о неустойчивости.** Перейдем к полярным координатам по формулам $u_s = \rho_s \exp(i\theta_s)$, $v_s = \rho_s \exp(-i\theta_s)$ $(s = 1, \ldots, m)$. Тогда, согласно изложенному выше, группа уравнений для $x$, $\rho_s$ имеет вид

$$x^{\cdot} = gx^2 + \sum_{i=1}^{m} a_i\rho_i^2 + X_0(\rho, \theta) + X_1(x, \rho, \theta) \tag{2.1}$$
$$\rho_s^{\cdot} = b_s x\rho_s + R_{0s}(x, \rho, \theta) + R_{1s}(x, \rho, \theta)\quad (s = 1, \ldots, m)$$

Здесь $X$, $R_{1s}$ — голоморфные функции $x$, $\rho_s$ с коэффициентами, представляющими собой полиномы от $\cos\theta_s$, $\sin\theta_s$ и содержащие члены не ниже третьего порядка относительно $x$, $\rho_s$; $X_0$, $R_{0s}$ — резонансные члены, доставляемые (1.5), (1.6) при $K = 2, 3$ (и равные тождественно нулю при отсутствии кратных корней и резонансов третьего порядка), суть полиномы второго порядка от соответственно $\rho_s$ и $x$, $\rho_s$ с коэффициентами, линейными относительно $\cos\theta_s$, $\sin\theta_s$; $g$, $a_i$, $b_s$ — действительные постоянные.

Рассмотрим функции

$$V = x,\quad W = \sum_{s=1}^{m} \rho_s^2 - x^{2(1+\gamma)}$$

где $\gamma$ — положительная постоянная, подлежащая выбору. Производная от $W$ в силу системы (2.1) есть

$$\frac{1}{2} W^{\cdot} = x\sum_{s=1}^{m} b_s\rho_s^2 - (1+\gamma)\,x^{1+2\gamma}\Big(gx^2 + \sum_{i=1}^{m} a_i\rho_i^2\Big) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{m} \rho_s(R_{0s} + R_{1s}) - (1+\gamma)\,x^{1+2\gamma}(X_0 + X_1)$$

В окрестности нуля $x^2 + \rho_1^2 + \ldots + \rho_m^2 < A$, $A > 0$ рассмотрим область $W \leqslant 0$, которая при достаточно большом $\gamma$ принадлежит области $VV^{\cdot} > 0$. Определим значение производной $W^{\cdot}$ на границе $W = 0$

$$\frac{1}{2} W_0^{\cdot} = -(1+\gamma) g x^{3+2\gamma} + x \sum_{s=1}^{m} b_s \rho_s^2 + \sum_{s=1}^{m} \rho_s R_{0s} + o(x^{3+2\gamma})$$

Пусть $g \gtrless 0$. Выбором достаточно большого $\gamma$ можно добиться $W_0^{\cdot} \lesseqgtr 0$. Функции $V$ и $W$ удовлетворяют теореме Четаева о неустойчивости с двумя функциями [5].

Сформулируем полученный результат.

*Теорема 1.* Если $g \neq 0$, то тривиальное решение системы (2.1) (а значит, и (1.1)) неустойчиво по Ляпунову.

Таким образом, наличие у характеристического уравнения линейного приближения одного нулевого корня при прочих чисто мнимых и с отрицательными вещественными частями, как правило, приводит к неустойчивости, что обнаруживается уже по формам второго порядка. Случай $g = 0$, очевидно, следует считать вырожденным.

Отметим, что для нахождения $g$ достаточно привести систему линейного приближения к каноническому виду и в уравнении для переменной, отвечающей нулевому корню, выделить коэффициент при квадрате этой переменной. Выделенный коэффициент и будет $g$.

**3. Случай $g = 0$.** В дальнейшем всюду ниже будем предполагать отсутствие кратных корней.

Пусть сначала в системе отсутствуют резонансы третьего порядка. Тогда в системе (2.1) $X_0 = R_{0s} \equiv 0$ $(s = 1, \ldots, m)$ и имеем

$$x^{\cdot} = \sum_{i=1}^{m} a_i \rho_i^2 + X_1(x, \rho, \theta) \tag{3.1}$$

$$\rho_s^{\cdot} = b_s x \rho_s + R_{1s}(x, \rho, \theta) \quad (s = 1, \ldots, m)$$

Покажем, что существование пары коэффициентов $a_{s_*}$, $b_{s_*}$, такой, что $a_{s_*} b_{s_*} > 0$, ведет к неустойчивости. Действительно, в этом случае для укороченной до кубических членов модельной системы существует растущее решение типа луча

$$\rho^{\cdot} = \sqrt{a_{s_*} b_{s_*}} \rho^2, \quad x = k\rho, \quad \rho_{s_*} = \rho, \quad \rho_i = 0$$

$$(i = 1, \ldots, m;\ i \neq s_*), \quad k^2 = \frac{a_{s_*}}{b_{s_*}}$$

Доказательство неустойчивости полной системы осуществляется обычным образом по схеме [4].

Пусть теперь $a_i b_i < 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Тогда имеет место знакоопределенный интеграл

$$x^2 - \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{b_i} \rho_i^2 = \mathrm{const}$$

существование которого доказывает устойчивость модельной системы.

Если один из коэффициентов $a_i$, $b_i$ равен нулю, а остальные таковы, что $a_j b_j < 0$ $(j = 1, \ldots, m;\ j \neq i)$, то для модельной системы существует растущее решение

$$x = x_0,\ \rho_i = \rho_{i0} e^{b_i x_0 t},\ \rho_j = 0\ (j = 1, \ldots, m;\quad j \neq i),\ a_i = 0,\ b_i \neq 0$$

$$x = x_0 + a_i \rho_{i0}^2 t,\quad \rho_i = \rho_{i0},\quad \rho_j = 0\ (j = 1, \ldots, m;\ j \neq i),\ a_i \neq 0,\ b_i = 0$$

где $x_0$, $\rho_{i0}$ — постоянные. Однако доказать неустойчивость полной системы в этих случаях не удается.

*Теорема 2.* Необходимое и достаточное условие устойчивости укороченной до кубических членов модельной системы есть $a_i b_i \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, причем равенство допускается лишь в случае $a_i = b_i = 0$. Если существует пара коэффициентов $a_{s_*}$, $b_{s_*}$, такая, что $a_{s_*} b_{s_*} > 0$, то тривиальное решение системы (3.1) (а значит, и (1.1)) неустойчиво по Ляпунову.

Пусть теперь в системе имеет место резонанс третьего порядка, скажем, $\lambda_1 = 2\lambda_2$. Ограничиваясь (без потери общности) случаем $m = 2$, покажем, что добавление к нейтральному нулевому корню (все $a_i b_i < 0$) слабого резонанса [6] может привести к неустойчивости полной системы.

Согласно необходимым и достаточным условиям слабости резонанса $\lambda_1 = 2\lambda_2$ [7], система (2.1) после добавлений уравнений по $\theta_s$ при предположениях может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
&x^{\cdot} = a_1 \rho_1^2 + a_2 \rho_2^2 + X_1 (x, \rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2) \\
&\rho_1^{\cdot} = b_1 x \rho_1 + c\rho_2^2 \cos\theta + R_{11} (x, \rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2) \\
&\rho_2^{\cdot} = b_2 x \rho_2 + \rho_1 \rho_2 \cos\theta + R_{12} (x, \rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2) \\
&\rho_1 \rho_2 \theta^{\cdot} = -(c\rho_2^2 + \rho_1^2)\rho_2 \sin\theta + \Theta (x, \rho_1, \rho_2, \vartheta_1, \vartheta_2) \\
&\theta = 2\theta_2 - \theta_1,\ a_1 b_1 < 0,\quad a_2 b_2 < 0,\ c < 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где разложение функции $\Theta$ в ряд по $x$, $\rho_1$, $\rho_2$ с коэффициентами, представляющими собой полиномы от $\sin\theta_s$, $\cos\theta_s$ $(s = 1, 2)$, начинаются членами не ниже четвертого порядка.

Рассмотрим модельную систему, полученную из (3.2) отбрасыванием $X_1$, $R_{11}$, $R_{12}$, $\Theta$. Тогда, если существуют $\gamma$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ $(\gamma_{1,2} > 0)$, такие, что выполняются условия

$$\frac{a_1 \gamma_1^2 + a_2 \gamma_2^2}{\gamma} = b_1 \gamma + \frac{c\gamma_2^2}{\gamma_1} = b_2 \gamma + \gamma_1$$

что возможно при определенных соотношениях между $a_s$, $b_s$, $c$, то у модельной системы существует растущее решение типа луча

$$x = \gamma\rho,\ \rho_1 = \gamma_1 \rho,\ \rho_2 = \gamma_2 \rho,\ \rho^{\cdot} = b\rho^2,\quad \theta = 0,\ b > 0 \tag{3.3}$$

Доказательство неустойчивости полной системы при существовании луча (3.3) проводится по схеме [4].

**4. Исследование по членам более высокого порядка.** Предположим теперь, что в системе нет резонансов $K$-го порядка, $2 \leqslant K \leqslant N + 1$ $(N \geqslant 3)$ и выполнены необходимые условия устойчивости по членам второго порядка, т. е. $g = 0$, $a_i b_i \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, а равенство $a_i b_i = 0$ возможно лишь в случае $a_i = b_i = 0$. Очевидно, в этом случае заменой переменных всегда можно добиться $a_i = -b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Перейдем в (2.1) к $(m+1)$-мерным сферическим координатам по формулам

$$x = r\cos\varphi_1, \quad \rho_s = r\cos\varphi_{s+1}\prod_{j=1}^{s}\sin\varphi_j, \quad \rho_m = r\prod_{j=1}^{m}\sin\varphi_j$$
$$(s = 1, \ldots, m-1)$$
$$0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi_j \leqslant \frac{\pi}{2} \quad (j = 2, \ldots, m)$$

В новых переменных имеем

$$r^{\cdot} = r^2R^{(2)} + r^3R^{(3)} + \ldots + r^NR^{(N)} + \ldots \tag{4.1}$$
$$\varphi_1^{\cdot} = r\Phi_1^{(1)} + r^2\Phi_1^{(2)} + \ldots + r^{N-1}\Phi_1^{(N-1)} + \ldots, \left(\prod_{j=1}^{s}\sin\varphi_j\right)\varphi_s^{\cdot} =$$
$$= r\Phi_s^{(1)} + \ldots + r^{N-1}\Phi_s^{(N-1)} + \ldots (s = 2, \ldots, m)$$
$$\Phi_1^{(1)} = \left(\sum_{i=1}^{m-1} b_i\cos^2\varphi_{i+1}\prod_{j=2}^{i}\sin^2\varphi_j + b_m\prod_{j=2}^{m}\sin^2\varphi_j\right)\sin\varphi_1$$

где $R^{(l)}$, $\Phi_s^{(l-1)}$ $(s = 1, \ldots, m;\ l = 2, \ldots, N)$ — полиномы от $\sin\varphi_j$, $\cos\varphi_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, невыписанные члены имеют порядок относительно $r$ выше $N$ в уравнении по $r$ и выше $N-1$ в уравнениях по $\varphi_i$; $R^{(2)} \equiv 0$.

Рассмотрим следующие значения углов:

$$\varphi_1 = \varphi_1^{\circ} = 0,\ \pi; \quad \varphi_j = \varphi_j^{\circ} = \text{const} \quad (j = 2, \ldots, m) \tag{4.2}$$

Справедливо утверждение.

*Теорема 3.* Если хотя бы на одном значении углов (4.2) выполняется условие

$$R^{(3)}(\varphi^{\circ}) = \ldots = R^{(N-1)}(\varphi^{\circ}) = 0, \quad R^{(N)}(\varphi^{\circ}) > 0$$

то тривиальное решение $r = 0$ неустойчиво по Ляпунову. Если же на всех значениях (4.2)

$$R^{(3)}(\varphi^{\circ}) = \ldots = R^{(N-1)}(\varphi^{\circ}) = 0, \quad R^{(N)}(\varphi^{\circ}) < 0$$

и все коэффициенты $b_s$ $(s = 1, \ldots, m)$ одного знака, то имеет место асимптотическая устойчивость.

*Замечание.* Случай, когда среди коэффициентов $b_s$ $(s = 1, \ldots, m)$ есть хотя бы одна смена знака или нулевые, требует отдельного рассмотрения.

*Доказательство.* Предположим выполненным приведение к нормальной форме (1.4) до членов $N$-го порядка включительно, т. е. $l_* \geqslant N$ в (1.4). Следовательно, функции $\Phi_1^{(l)}$ содержат в качестве множителя $\sin\varphi_1$, а функции $\Phi_s^{(l)}$ $(s = 2, \ldots, m)$

$$\cos\varphi_s\sin\varphi_1\prod_{j=1}^{s}\sin\varphi_j$$

т. е.

$$\Phi_1^{(l)}|_{(4.2)} = 0, \quad \frac{1}{\sin\varphi_1}\Phi_s^{(l)}|_{(4.2)} = 0 \quad (s = 2, \ldots, m;\ l = 2, \ldots, N-1)$$

Поэтому в первом случае для укороченной до членов $(N+1)$-го порядка системы существует растущее решение типа луча

$$r^{\cdot} = r^N R^{(N)}(\varphi^\circ), \quad R^{(N)}(\varphi^\circ) > 0 \tag{4.3}$$

а $\varphi_i{}^\circ$ $(i = 1, \ldots, m)$ суть из (4.2). Доказательство неустойчивости полной системы проводится построением функции Четаева в окрестности луча (4.3), как и в [4].

Для доказательства второго утверждения теоремы рассмотрим функцию

$$V = r \exp(h \cos \varphi_1), \quad h = \mathrm{const} \tag{4.4}$$

Производная от функции (4.4) в силу уравнений (4.1) будет

$$V^{\cdot} = rV \Big\{ rR^{(3)} + \ldots + r^{N-2}R^{(N)} - h \Big[ \sum_{i=1}^{m-1} b_i \cos^2 \varphi_{i+1} \prod_{j=2}^{i} \sin^2 \varphi_j +$$

$$+ b_m \prod_{j=2}^{m} \sin^2 \varphi_j \Big] \sin^2 \varphi_1 - h \sin \varphi_1 [r\Phi_1^{(2)} + \ldots + r^{N-2}\Phi_1^{(N-1)}] + \ldots \Big\}$$

где невыписанные члены имеют порядок выше $N-2$ относительно $r$. Так как функции $R^{(l)}, \Phi_1^{(l-1)}$ $(l = 3, \ldots, N)$ (кроме $R^{(N)}$) содержат в качестве множителя соответственно $\sin^2\varphi_1$ и $\sin \varphi_1$, а все $b_i$ одного знака, скажем, положительные (что всегда можно добиться заменой $x$ на $-x$ в (2.1)), то выбором достаточно большого $h > 0$ всегда можно добиться определенной отрицательности $V^{\cdot}$ в области $r < A$, где $A$ — некоторое достаточно малое положительное число. Функция $V$, определенная таким образом, удовлетворяет теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости [8].

Доказанная теорема дает следующий простой критерий. Если в предположениях п. 4 имеем в (1.4) при $u = v = 0$

$$x^{\cdot} = A_0 x^N + A_1 x^{N+1} + \ldots$$

то тривиальное решение неустойчиво при $N$ четном, а в случае $N$ нечетного — при $A_0 > 0$. Если же $N$ — нечетное и $A_0 < 0$, то тривиальное решение асимптотически устойчиво при отсутствии смены знаков среди чисел $b_s$ $(s = 1, \ldots, m)$.

Авторы благодарят В. В. Румянцева и А. Л. Куницына за внимание к работе.

Поступила 29 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
2. *Каменков Г. В.* Избр. труды, т. 2, Устойчивость и колебания нелинейных систем. М., «Наука», 1971.
3. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Тр. Моск. матем. о-ва, 1971, т. 25.
4. *Гольцер Я. М., Куницын А. Л.* Об устойчивости автономных систем при внутреннем резонансе. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
5. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962.
6. *Куницын А. Л., Медведев С. В.* Об устойчивости при наличии нескольких резонансов. ПММ, 1977, т. 41, вып. 3.
7. *Куницын А. Л.* Об устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при внутреннем резонансе. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, вып. 9.
8. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1956.