Достаточность условий $(\mathbf{f}, \psi_{1j}) + (\mathbf{g}, \psi_{2j})$ $(j = 1, 2, \ldots, 6)$ (что эквивалентно $\mathbf{F} \in \{\Psi_{\alpha j}\}^{\perp}_{j=1,2,\ldots 6}$) для разрешимости исходной краевой задачи показана в [1].

Для вычисления ряда, входящего в (2.1), можно использовать итерационный процесс

$$\varphi_{(0)} = (\alpha I + \mathrm{T}_{\alpha})\,\mathbf{F}, \quad \varphi_{(k)} = -\mathrm{T}_{\alpha}\varphi_{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

При этом для вычисления на каждом шаге сингулярных интегралов, входящих в $T_{\alpha}\varphi_{(k)}$, применима процедура, предложенная в [2].

Полученные результаты применимы и к другим основным задачам для кусочно-однородной среды с совпадающими коэффициентами Пуассона.

Принимая в постановке задачи $V(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 1 / |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ (u, φ_1, φ_2, f, g — скалярные функции), придем к задаче Неймана для оператора Лапласа для составной области с заданным скачком градиента на границе. Результаты справедливы и в этом случае.

Поступила 15 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М., «Наука», 1976.
2. *Перлин П. И.* Применение регулярного представления сингулярных интегралов к решению второй основной задачи теории упругости. ПММ, 1976, т. 40, вып. 2.

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ ТЕЛ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А. В. Скаченко, А. Н. Спорыхин, А. И. Сумин

(Воронеж)

В трехмерной постановке, при детерминированных внешних нагрузках исследуется устойчивость стохастически неоднородных сжимаемых упругих тел при конечных докритических деформациях как по отношению к малым, так и к конечным возмущениям.

Исследованию устойчивости упругих тел со случайными неоднородностями в случае малых докритических деформаций посвящена работа [1].

Основные соотношения стохастически неоднородного сжимаемого гиперупругого тела могут быть получены из соотношений для сжимаемых гиперупругих сред, приведенных в [2].

1. Уравнения состояния примем в виде

$$s_i^{\,j} = L_i^{\,j}\Phi, \quad L_i^{\,j} = \delta_i^{\,j}\frac{\partial}{\partial A_1} + 2\varepsilon_i^{\,j}\frac{\partial}{\partial A_2} + 3p_i^{\,j}\frac{\partial}{\partial A_3}, \quad p_i^{\,j} = \varepsilon_i^{\,n}\varepsilon_n^{\,j}$$
$$A_1 = \varepsilon_n^{\,n}, \; A_2 = \varepsilon_n^{\,l}\varepsilon_l^{\,n}, \; A_3 = \varepsilon_n^{\,m}\varepsilon_m^{\,l}\varepsilon_l^{\,n}, \; \Phi = \Phi(A_1, A_2, A_3, c_p) \tag{1.1}$$

Здесь c_p — параметры среды ($p = 1,2, \ldots, \Pi$), случайным образом зависящие от пространственных координат; A_i — алгебраические инварианты; $\varepsilon_i^{\,j}$ — компоненты тензора деформаций; $s_i^{\,j}$ — компоненты тензора обобщенных напряжений.

Ковариантные составляющие тензора деформаций Грина представим в форме

$$2\varepsilon_{ij} = G_{ij} - g_{ij}, \; G_{ij} = c_i^{\,n}c_j^{\,l}g_{nl}, \; c_i^{\,n} = \delta_i^{\,n} + \nabla_i u^n \tag{1.2}$$

Уравнения равновесия и граничные условия в напряжениях

$$g^{nl}\nabla_i\,(s_n^{\,i}c_l^{\,m}) + \rho X^m = 0, \; g^{nl}s_n^{\,i}c_l^{\,m}N_i = P^m \tag{1.3}$$

где g^{ij} — метрический тензор лагранжевой детерминированной системы отсчета начального состояния: P^m — составляющие детерминированных поверхностных сил; N_i — детерминированные орты нормали к поверхности тела до деформации.

В силу того, что параметры среды в (1.1) зависят случайным образом от пространственных координат, полевые величины в соотношениях (1.1) — (1.3) также будут случайными функциями пространственных координат.

Предполагаем, что параметры среды зависят от случайной однородной изотропной функции

$$c_p = \langle c_p\rangle f = \langle c_p\rangle (1 + f') = \langle c_p\rangle + c_p' \quad (p = 1, 2, \ldots, \text{П})$$

Здесь и далее $\langle x\rangle$ — математическое ожидание величины x, x' — ее флуктуация.

Последовательное применение метода статистической линеаризации позволяет представить математические ожидания полевых функций и их флуктуаций в форме

$$\begin{gathered}c_p = \langle c_p\rangle + c_p', \quad c_p' = c_{p3}f', \quad \varepsilon_i^j = \langle\varepsilon_i^j\rangle + \varepsilon_i^{j\prime}, \quad \varepsilon_i^{j\prime} = \varepsilon_{i3}{}^j f' \\ s_i^j = \langle s_i^j\rangle + s_i^{j\prime}, \quad s_i^{j\prime} = s_{i3}{}^j f', \quad \langle s_i^j\rangle = s_{i1}{}^j + s_{i2}{}^j\langle f'^2\rangle \\ \langle c_p\rangle = c_{p1} + c_{p2}\langle f'^2\rangle, \quad \langle\varepsilon_i^j\rangle = \varepsilon_{i1}{}^j + \varepsilon_{i2}{}^j\langle f'^2\rangle\end{gathered} \tag{1.4}$$

Очевидно, $c_{p3} = c_{p1} = \langle c_p\rangle$, $c_{p2} = 0$.

С помощью (1.4) из (1.1) — (1.3) можно получить осредненную и флуктуационную системы уравнений. Предположение малости флуктуаций позволяет линеаризовать (1.1) — (1.3) для получения этих систем. Так, любую функцию $B(x)$ можно разложить в ряд Тейлора

$$B(x) = B(x_1 + x_2\langle f'^2\rangle + x_3 f') = B(x_1) + \frac{\partial B}{\partial x_1}x_3 f' + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial x_1^2}x_3x_3 f'^2 + \\ + \frac{\partial B}{\partial x_1}x_2\langle f'^2\rangle$$

откуда

$$\langle B(x)\rangle = B(x_1) + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial x_1^2}x_3x_3 + \frac{\partial B}{\partial x_1}x_2\right)\langle f'^2\rangle, \quad B'(x) = \frac{\partial B}{\partial x_1}x_3 f' \tag{1.5}$$

Член $B(x_1)$ назовем системой 1, член, стоящий перед $\langle f'^2\rangle$, — системой 2 и член, стоящий перед f', — системой 3. Таким образом, для получения осредненной системы уравнений надо к соответствующим уравнениям системы 1 прибавить уравнения системы 2, умноженные на $\langle f'^2\rangle$. Флуктуационная система совпадает с системой 3, умноженной на f'.

Для уравнения (1.1) системы уравнений 1—3 имеют вид

$$\begin{gathered}s_{ik}{}^j = L_{i\alpha}{}^j\Phi_\beta, \quad L_{ik}{}^j = \delta_{ik}{}^j\frac{\partial}{\partial A_{11}} + 2\varepsilon_{ik}{}^j\frac{\partial}{\partial A_{21}} + 3p_{ik}{}^j\frac{\partial}{\partial A_{31}} \\ \delta_{ik}{}^j = \delta_i^j, \quad k = 1; \quad \delta_{ik}{}^j = 0, \quad k = 2, 3 \\ p_{ik}^j = \varepsilon_{i\alpha}^n\varepsilon_{n\beta}^j, \quad A_{1k} = \varepsilon_{nk}^n, \quad A_{2k} = \varepsilon_{n\alpha}^l\varepsilon_{l\beta}^n, \quad A_{3k} = \varepsilon_{n\alpha}^l\varepsilon_{l\beta}^m\varepsilon_{m\gamma}^n \\ \Phi_k = M_k\Phi_1, \ \Phi_1 = \Phi(A_{11}, A_{21}, A_{31}, \langle c_p\rangle), \ k = 1, 2, 3 \\ M_1 = 1, \quad M_2 = A_{n2}\frac{\partial}{\partial A_{n1}} + \frac{1}{2}A_{l3}A_{n3}\frac{\partial^2}{\partial A_{l1}\partial A_{n1}} + A_{l3}c_{p3}\frac{\partial^2}{\partial A_{l1}\partial c_{p1}} + \\ + \frac{1}{2}c_{q3}c_{p3}\frac{\partial^2}{\partial c_{q1}\partial c_{p1}}, \quad M_3 = A_{n3}\frac{\partial}{\partial A_{n1}} + c_{p3}\frac{\partial}{\partial c_{p1}}\end{gathered} \tag{1.6}$$

Потенциал Φ_1 совпадает с любым потенциалом детерминированной задачи Φ, если во всех членах поставить последний нижний индекс 1.

Для геометрических соотношений получаем

$$2\varepsilon_{ik}^j = G_{ink}g^{nj}, \quad G_{ijk} = c_{i\alpha}^n c_{j\beta}^l g_{nl}, \quad c_{ik}^n = \delta_{ik}^n + \nabla_i u_k^n \tag{1.7}$$

Для уравнений равновесия и граничных условий (1.3)

$$g^{ln}\nabla_i(s_{n\alpha}^i c_{l\beta}^m) + X_k{}^m = 0, \quad g^{ln}s_{l\alpha}^i c_{n\beta}^m N_i = P_k{}^m; \quad P_k{}^m = \begin{cases} P^m, & k = 1 \\ 0, & k = 2, \end{cases} \tag{1.8}$$

Здесь и далее индекс k будет подчеркивать принадлежность соотношений (1.6) — (1.8) к системам 1, 2, 3. Подразумевается суммирование по греческим индексам, подчиняющееся правилу

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_\alpha b_\beta c_\gamma = \begin{cases} a_1b_1c_1, & k=1 \\ a_1b_1c_1+a_1b_2c_1+a_2b_1c_1+a_2b_1c_1+a_1b_3c_3+a_3b_1c_3+a_3b_3c_1, & k=2 \\ a_1b_1c_3+a_1b_3c_1+a_3b_1c_1, & k=3 \end{cases}$$

Очевидно, удлинение λ_i — также случайная величина, которая, согласно (1.4), представима в виде

(1.9) $$\lambda_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2}\langle f'^2\rangle + \lambda_{i3} f'$$

где λ_{ik} — некоторые неслучайные величины.

В случае, когда начальное состояние макрооднородное

(1.10) $$s_{ik}{}^j = \mathrm{const}_{ik}\delta_i{}^j$$

получаем

(1.11) $$c^j_{ik} = \delta^j_{ik} + \nabla_i u_k{}^j = \lambda_{ik}\delta_i{}^j, \quad \lambda_{ik} = \mathrm{const}_{ik}; \quad 2\varepsilon_{ik}{}^j = (\lambda_{i\alpha}\lambda_{j\beta} - \delta^j_{ik})\,\delta_i{}^j$$

2. Рассмотрим устойчивость по отношению к малым возмущениям. Компоненты полевых функций возмущенного состояния отметим индексом плюс, основного состояния — нулевым индексом, компоненты возмущений не будем отмечать никаким индексом

(2.1) $$\begin{aligned} s^{+j}_i &= s_i{}^{\circ j} + s_{i2}{}^{\circ}\langle f'^2\rangle + s_{i3}{}^{\circ j} + s_{i1}{}^j + s^j_{i2}\langle f'^2\rangle + s_{i3}{}^j f' \\ u_i{}^+ &= u_{i1}{}^\circ + u_{i2}{}^\circ\langle f'^2\rangle + u_{i3}{}^\circ f' + u_{i1} + u_{i2}\langle f'^2\rangle + u_{i3}f', \ldots \end{aligned}$$

Величины с нулевым индексом вычисляются по формулам п. 1, если везде поставить индекс нуль.

Линейные относительно возмущений системы получим из (1.6) — (1.8) путем линеаризации.

Уравнения состояния (1.6) дают

(2.2) $$\begin{aligned} & s_{ik}{}^j = L_{i\alpha}{}^j\Phi_\beta + L_{i\alpha}{}^j\Phi_\beta{}^\circ, \quad L_{ik}{}^j = 2\varepsilon_{ik}{}^j\frac{\partial}{\partial A_{21}{}^\circ} + 3p_{ik}{}^j\frac{\partial}{\partial A_{31}{}^\circ} \\ & p^j_{ik} = \varepsilon^n_{i\alpha}\overset{\circ}{\varepsilon}{}^j_{n\beta} + \overset{\circ}{\varepsilon}{}^n_{i\alpha}\varepsilon^j_{n\beta}, \quad A_{1k} = \varepsilon^n_{nk}, \quad A_{2k} = 2\overset{\circ}{\varepsilon}{}^l_{n\alpha}\varepsilon^n_{l\beta} \\ & A_{3k} = 3\overset{\circ}{\varepsilon}{}^l_{n\alpha}\overset{\circ}{\varepsilon}{}^m_{l\beta}\varepsilon^n_{m\gamma}, \quad \Phi_k = M_k\Phi^\circ, M_k = M_\alpha{}^\circ A_{l\beta}\frac{\partial}{\partial \overset{\bullet}{A}_{l\beta}} \end{aligned}$$

Из геометрических соотношений (1.7), уравнений равновесия (массовыми силами пренебрегаем) и граничных условий (1.8) получаем

(2.3) $$2\varepsilon^j_{ik} = G_{ink}g^{\circ nj}, \quad G_{ijk} = (\overset{\circ}{c}{}^l_{i\alpha}c^n_{j\beta} + c^l_{i\alpha}\overset{\circ}{c}{}^n_{j\beta})\,\overset{\circ}{g}_{ln}, \quad c^n_{ik} = \nabla_i u_k{}^n$$

(2.4) $$g^{\circ ln}\nabla_i(\overset{\circ}{s}{}^i_{n\alpha}c^m_{l\beta} + s^i_{n\alpha}\overset{\circ}{c}{}^m_{l\beta}) = \rho \ddot{u}_k{}^m, \quad g^{\circ ln}(\overset{\circ}{s}{}^i_{l\alpha}c^m_{n\beta} + s^i_{l\alpha}\overset{\circ}{c}{}^m_{n\beta})\,N_i{}^\circ = P_k{}^m$$

В общем случае линеаризованные уравнения состояния (2.2) для сжимаемого тела можно представить в виде

(2.5) $$s_{nk}{}^l = \lambda^{i\cdot\cdot l}_{nm\cdot\alpha}\nabla_l u_\beta{}^m.$$

Величины $\lambda^{i\cdot\cdot l}_{nm\cdot\alpha}$, как показывает непосредственная проверка, представляют собой компоненты тензора четвертого ранга, удовлетворяющего условиям

$$\lambda^{i\cdot\cdot l}_{nm\cdot k} = \lambda^{n\cdot\cdot l}_{\cdot m\cdot k}, \quad \lambda^{i\cdot\cdot m}_{nl\cdot k} \neq \lambda^{i\cdot\cdot l}_{nm\cdot k}, \quad \lambda^{m\cdot\cdot i}_{ln\cdot k} \neq \lambda^{i\cdot\cdot m}_{nl\cdot k}$$

Соотношения (2.5) записаны в общем случае. Вид тензора $\lambda^{i\cdot l}_{nm\cdot k}$ не приводим ввиду его громоздкости.

Рассмотрим упрощения для случая макрооднородного начального состояния (1.10), (1.11). Линеаризованные уравнения состояния в ортогональной системе координат можно записать в форме

$$s_{ik}^{j} = \delta_i^j a_{in\alpha}\lambda_{n\beta}\nabla_n u_\gamma^n + (1-\delta_i^j)\mu_{ij\alpha}(\lambda_{j\beta}\nabla_i u_\gamma^j + g^{jj}g_{ji}\lambda_{j\beta}\nabla_j u_\gamma^i) \tag{2.6}$$

Тогда коэффициенты $a_{in\alpha}$ и $\mu_{ij\alpha}$ уравнения состояния (2.6) для потенциала типа Мурнагана [2]

$$\Phi = \frac{1}{2}\lambda A_1^2 + \mu A_2 + \frac{a}{3}A_1^3 + bA_1A_2 + \frac{c}{3}A_3$$

вычисляются по формулам

$$a_{ink} = 2\,[{}^1/{}_2\lambda_k + a_\alpha A_{1\alpha} + b_\alpha(\varepsilon_{i\alpha}^i + \varepsilon_{n\alpha}^n) + \mu_{iik}\delta_i^n]$$
$$\mu_{iik} = \mu_k + b_\alpha A_{1\alpha} + {}^1/{}_2 c_\alpha(\varepsilon_{i\alpha}^i + \varepsilon_{j\alpha}^j)$$

Подставляя уравнения состояния (2.5) в уравнения движения и граничные условия (2.4) на свободной поверхности, приходим к системе однородных дифференциальных уравнений в перемещениях с краевыми условиями на поверхности

$$L_{mn\alpha}u_{n\beta} = M_k,\ D_{mn\alpha}u_{n\beta} = M_k,\ M_k = 0 \tag{2.7}$$

Здесь L_{mnk} и D_{mnk} — дифференциальные операторы второго и первого порядка соответственно. Их вид зависит от конкретно поставленной задачи.

Системы уравнений для математических ожиданий и флуктуаций, согласно п. 1, запишутся в виде

$$L_{mn1}u_{n1} + \langle f'^2\rangle(L_{mn1}u_{n2} + L_{mn2}u_{n1} + L_{mn3}u_{n3}) = 0$$
$$L_{mn1}u_{n3} + L_{mn3}u_{n1} = 0$$
$$D_{mn1}u_{n1} + \langle f'^2\rangle(D_{mn1}u_{n2} + D_{mn2}u_{n1} + D_{mn3}u_{n3})\,|_{x\in S} = 0$$
$$D_{mn1}u_{n3} + D_{mn3}u_{n1}\,|_{x\in S} = 0$$

откуда, в силу произвольности $\langle f'^2\rangle$, приходим к краевой задаче (2.7).

Из условия существования нетривиального решения задачи (2.7) в случае статических задач или из условия невозрастания перемещений во времени в случае динамических задач находится критическая нагрузка.

Заметим, что решение краевой задачи с индексом 1 есть решение детерминированной краевой задачи с параметрами $c_p = c_{p1} = \langle c_p\rangle$.

Таким образом, в результате решения краевой задачи (детерминированной) найдем критические значения величин с индексом 1: критическую силу P_1^m, удлинения λ_{n1}, деформации $\varepsilon_{n1}{}^{\circ n}$, напряжения $s_{n1}{}^{\circ n}$. Зная критические характеристики с индексом 1, из второй и третьей краевых задач для основного состояния (1.6) — (1.8) можно восстановить величины с индексом 2 и 3. Значения полевых функций под действием силы P_1^m вычислим по (1.4) и (1.9).

3. Приведенные выше рассуждения распространим на случай, когда на основное состояние тела, описываемого соотношениями (1.6) — (1.8), наложены конечные возмущения.

Тогда к правой части соотношений (2.2) и (2.3) следует прибавить соответственно слагаемые

$$s_{ik}^j \to L_{i\alpha}^j\Phi_\beta,\quad p_{ik}^j \to \varepsilon_{i\alpha}^n\varepsilon_{n\beta}^j,\quad A_{2k} \to 2\varepsilon_{n\alpha}^l\varepsilon_{l\beta}^n$$
$$A_{3k} \to 3\overset{\circ}{\varepsilon}{}_{n\alpha}^l\varepsilon_{l\beta}^m\varepsilon_{m\gamma}^n + \varepsilon_{n\alpha}^l\varepsilon_{l\beta}^m\varepsilon_{m\gamma}^n,\quad G_{ijk} \to c_{j\alpha}^l c_{j\beta}^n \overset{\circ}{g}_{ln}$$

Не отмеченные здесь соотношения, входящие в (2.2), (2.3), остаются без изменений.

Для функции Φ_k после соответствующего разложения в ряд Тейлора имеем

$$\Phi_k = \sum_{l,p,s}^{l+p+s=n} \frac{\partial^n\Phi^\circ}{n!\,\partial \overset{\circ}{A}{}_{1\alpha}^{l}\,\partial \overset{\circ}{A}{}_{2\beta}^{p}\,\partial \overset{\circ}{A}{}_{3\gamma}^{s}} A_{1\alpha}^l A_{2\beta}^p A_{3\gamma}^s \tag{3.1}$$
$$(l+p+s=n;\ l,p,s = 0,1,\ldots;\ n = 1,2,\ldots)$$

Явный вид (3.1) определяется конкретной формой упругого потенциала.

Уравнения равновесия и граничные условия получаются из (2.4) путем присоединения к левым частям их соответственно слагаемых

$$g^{\circ ln}\nabla_i s^i_{n\alpha} c^m_{l\beta}, \quad g^{\circ ln} s^i_{n\alpha} c^m_{n\beta} N^\circ_i$$

Решение получаемой таким образом нелинейной краевой задачи представим в виде ряда (y_l (t) — некоторые функции времени)

$$u_m = y_l\,(t)\,\varphi_m{}^l\,(x_i) \quad (m = 1,\,2,\,3;\, l = 1,\,2,\,\ldots) \tag{3.2}$$

В качестве базисных функций $\varphi_m{}^l$, удовлетворяющих геометрическим граничным условиям, выбираем формы прогибов по отношению к малым возмущениям. При этом предполагаем, что условие полноты системы функций $\varphi_m{}^l$ [3] служит достаточным условием сходимости ряда (3.2).

В силу (1.5) соотношение (3.2) представим в виде

$$u_{mk} = y_{l\alpha}\,(t)\;\varphi^l_{m\beta}\,(x_i) \tag{3.3}$$

Составляя вариационные уравнения метода Бубнова — Галеркина [4], соответствующие нелинейной краевой задаче, учитывая при этом (3.3), а также малость флуктуаций, можно получить

$$L_{m1}{}^l\,(y_1) + \langle f'^2\rangle\, L_{m2}{}^l\,(y_1,\,y_2,\,y_3) = 0,\;\; L_{m3}{}^l\,(y_1,\,y_3) = 0$$

$$L^l_{mk}\,(y_1, y_2, y_3) = A^l_{m\alpha} y_\beta{}^{\cdot\cdot} + B^l_{m\alpha} y_\beta{}^{\cdot} + F^l_{m\alpha} y_\beta + E^l_{m\alpha} y_\beta y_\gamma + \ldots$$

Отсюда, в силу произвольности $\langle f'^2\rangle$, придем к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. При этом решение системы уравнений с индексом 1, т. е.

$$L_{m1}{}^l y_1 = 0;\; l = 1{,}2,\,\ldots;\; m = 1,\,2,\,3 \tag{3.4}$$

соответствует решению детерминированной системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Таким образом, вопрос об устойчивости основного состояния свелся к вопросу об устойчивости нулевого решения системы (3.4).

Видно, что функция

$$V = {}^1/_2\, A_{11} y_1{}^{\cdot} y_1{}^{\cdot} + {}^1/_2\, B_{11} y_1 y_1 + {}^1/_3 D_{11} y_1 y_1 y_1 + \ldots$$

в случае ее положительности будет функцией Ляпунова для операторного уравнения (3.4), так как в силу системы ее производная неположительна [5]. Следовательно, условие положительности функции будет достаточным условием устойчивости нулевого решения системы (3.4). Величины с индексом 2 и 3 восстанавливаются аналогичным образом.

В заключение отметим, что данный подход позволяет получить средние значения критических удлинений, а следовательно, напряжений, деформаций и перемещений в зависимости от порядка дисперсии неоднородности, в то время как значение критической силы в среднем совпадает с ее значением в нулевом приближении.

Поступила 25 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Спорыхин А. Н., Чигарев Ю. В.* К устойчивости деформирования упругого тела со случайными неоднородностями. Исследования по механике сплошных сред. Воронежский госуниверситет, 1974, вып. 1.
2. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев, «Наукова думка», 1973.
3. *Болотин В. В.* Нелинейная теория упругости и устойчивость в «большом». Расчеты на прочность, вып. 3. М., Машгиз, 1958.
4. *Спорыхин А. Н., Сумин А. И.* Об устойчивости нелинейно вязкоупругих тел при конечных возмущениях. Тр. Всес. ин-та механики Воронежск. ун-та, 1975, вып. 21.
5. *Меркин Д. Г.* Введение в теорию устойчивости движения. М., «Наука», 1971.