ЛИТЕРАТУРА

1. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. *Chao B. T.* Transient heat and mass transfer to translating droplet. Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer, 1969, vol. 91, No. 2.
3. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Прядкин П. А., Рязанцев Ю. С.* О нестационарном массообмене капли в потоке вязкой жидкости. ПММ, 1978, т. 42, вып. 3.
4. *Полянин А. Д.* О диффузионном взаимодействии капель в жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 2.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ С ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА

М. И. Лазарев, П. И. Перлин

(Москва)

Исследуются сингулярные интегральные уравнения теории упругости для кусочно-однородной среды при совпадении коэффициентов Пуассона. Показано, что решение может быть получено при помощи метода последовательных приближений.

Метод потенциала для основных задач теории упругости приводит к сингулярным интегральным уравнениям второго рода [1]. В случаях второй внутренней и внешней, а также в случае первой внутренней задач спектральные свойства интегральных операторов позволяют применять метод последовательных приближений для нахождения решения.

1. Рассмотрим упругое тело D, заполняющее ограниченную часть пространства R^3 с границей S_1, являющейся поверхностью Ляпунова. Внутри D имеется включение D_2, ограниченное ляпуновской поверхностью S_2 ($S_1 \cap S_2 = \varnothing$).

Обозначим часть тела D с границей $S_1 \cup S_2$ через D_1. Пусть константы Ламе тела D_i суть λ_i, μ_i. Предположим, что коэффициенты Пуассона равны и, следовательно, $\lambda_1/\lambda_2 = \mu_1/\mu_2 = \beta$. Положительным направлением нормали на S_1 считается то, при котором нормаль $\mathbf{n}$ направлена вне D_i.

Вектор смещений упругой среды $\mathbf{u}$ и D является решением краевой задачи

$$\begin{aligned}
&\Delta \mathbf{u} + (1-2\sigma)^{-1}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in D_1,\ D_2 \\
&[T_{n1}\mathbf{u}]^+ = \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in S_1;\ \mathbf{u}^+(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^-(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in S_2 \\
&[T_{n2}\mathbf{u}]^+ - [T_{n1}\mathbf{u}]^- = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_2 \\
&T_{ni}\mathbf{u} = 2\mu_i \partial\mathbf{u}/\partial n + \lambda_i \mathbf{n}\operatorname{div}\mathbf{u} + \mu_i[\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u}]
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь σ — коэффициент Пуассона, $T_{ni}\mathbf{u}$ — граничное значение оператора напряжений на поверхности с нормалью $\mathbf{n}$; индексы плюс и минус означают, что предельное значение определяется соответственно вдоль положительного и отрицательного направлений нормалей.

Так как замена $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — решение первой внутренней задачи для D_2, сводит задачу (1.1) к задаче с $\mathbf{r}(x) \equiv 0$, будем считать $\mathbf{r}(x) \equiv 0$. Функции $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ будем полагать элементами гильбертовых пространств H_1 и H_2 вектор-функций, заданных на S_1 и S_2 со скалярным произведением

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{H_i} = \int\limits_{S_i} \sum_{j=1}^{3} \varphi_1^{\,j}\varphi_2^{\,j}\, dS$$

Учитывая вид оператора T_{ni}, второе из условий на S_2 в (1.1) приведем к виду

$$[T_{n1}\mathbf{u}]^+ - \beta\,[T_{n1}\mathbf{u}]^- = \beta\mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{1.2}$$

Будем искать решение в виде потенциала простого слоя

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int\limits_{S_1} \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \varphi_1(\mathbf{y})\, d_y S + \int\limits_{S_2} \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \varphi_2(\mathbf{y})\, d_y S \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — матрица Кельвина — Сомильяна $\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{V_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}_{i,k=1}^{3}$

$$V_{ik}(x, y) = (16\, \pi\mu_1 (1 - \sigma))^{-1} [(3 - 4\sigma)\, \delta_{ik} / |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + (y_i - x_i)(y_k - x_k) / |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3]$$

Функция (1.3) удовлетворяет дифференциальным уравнениям Ламе в $D_1 \cup D_2$ и в силу непрерывности потенциала простого слоя для нее выполняется первое условие на S_2 в (1.1). Второе условие на S_2 (условие (1.2)) приводит к уравнению

$$\varphi_2(\mathbf{x}) + \alpha \int\limits_{S_2} T_{n1} \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \varphi_2(\mathbf{y})\, d_y S + \alpha \int\limits_{S_1} T_{n1} \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \varphi_1(y)\, d_y S = \frac{1 - \alpha}{2}\, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{1.4}$$

Здесь $\alpha = (1 - \beta) / (1 + \beta)$. Для главной контактной задачи, когда упругое тело заполняет все пространство, это уравнение приведено в [1], где указано также на сходимость метода последовательных приближений для (1.4).

Уравнение, полученное из условия на S_1, имеет вид

$$\varphi_1(x) + \int\limits_{S_1} T_{n1} \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \varphi_1(\mathbf{y})\, d_y S + \int\limits_{S_2} T_{n1} \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \varphi_2(\mathbf{y})\, d_x S = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1.5}$$

Рассмотрим систему интегральных уравнений (1.4), (1.5). Введем следующие обозначения:

$$K_{ji}\varphi = \int\limits_{S_i} T_{n1} \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \varphi(y)\, d_y S, \quad \mathbf{x} \in S_j$$

$$K_{ji}{}^*\varphi = \int\limits_{S_j} [T_{n1} \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y})]'\, \varphi(\mathbf{y})\, d_n S, \quad \mathbf{x} \in S_i; \quad i, j = 1, 2$$

$$\mathbf{T}_\alpha = \{(T_\alpha)_{ij}\}, \quad (T_\alpha)_{1j} = K_{1j}, \quad (T_\alpha)_{2j} = \alpha K_{2j}, \quad j = 1, 2$$

$$\mathbf{T}_\alpha{}^* = \{(T_\alpha{}^*)_{ij}\}, \quad (T_\alpha{}^*)_{i1} = K_{1i}^*, \quad (T_\alpha{}^*)_{i2} = \alpha K_{2i}{}^*$$

$$\mathbf{T}_{-1} \equiv \mathbf{T}; \quad \varphi = \mathrm{col}\,(\varphi_1; \varphi_2), \quad \mathbf{F}_0 = \mathrm{col}\,(\mathbf{f}; (1 - \alpha)\, \mathbf{g}/2)$$

Здесь штрих означает транспонирование и перестановку аргументов, $\mathrm{col}\,(\psi_1, \psi_2)$ означает вектор, принимающий на поверхности S_i значение ψ_i, $\mathbf{T}_\alpha{}^*$ — оператор, сопряженный к $\mathbf{T}_\alpha$ в H.

Операторы $K_{ii} : H_i \to H_i$ являются сингулярными интегральными операторами, при этом $\Sigma\,(K_{ii}) \subseteq [-1, 1]$ [1] (здесь и далее $\Sigma\,(A)$ означает спектральное множество оператора A). Операторы K_{ij} $(i \neq j)$ вполне непрерывны из H_j в H_i.

Систему (1.4), (1.5) запишем теперь в виде

$$(I + \mathbf{T}_\alpha)\, \varphi = \mathbf{F}_0 \tag{1.6}$$

Здесь I — тождественный оператор. Заметим, что система (1.6) при $\alpha = -1$ ($\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{T}$) соответствует второй основной задаче для двусвязного тела, ограниченного поверхностью $S = S_1 \cup S_2$ [1].

2. Исследуем уравнение (1.6). Поскольку спектральный радиус K_{22} равен единице ($\rho\,(K_{22}) = 1$), оператор $I + \alpha\,(K_{22})$ при любом $\alpha \in (-1, 1)$ имеет на H_2 ограниченный обратный.

Выразив теперь φ_2 из (1.4) через φ_1 и подставив в (1.5), получим

$$\varphi_1 + K_{11}\varphi_1 + R\varphi_1 = \mathbf{f} + (I + \alpha K_{22})^{-1} (1 - \alpha)/2 \tag{2.1}$$

Здесь R — оператор, содержащий в качестве множителей K_{12} и K_{21} и потому вполне непрерывный. Поскольку оператор $I + K_{11} : H_1 \to H_1$ нетеров с нулевым индексом, отсюда следует, что для (2.1), а следовательно, в силу эквивалентности проведенного преобразования (ограниченности $(I + \alpha K_{22})^{-1}$), и для (1.6) справедлива альтернатива Фредгольма.

Пусть $\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + [\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}]$ ($\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ — наборы произвольных констант; квадратные скобки означают здесь векторное произведение) — вектор жесткого смещения, определенный при всех $\mathbf{x} \in R^3$; $\psi_i(x) = \Psi(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in S_i$ — след $\Psi(\mathbf{x})$ на поверхности S_i.

Рассмотрим вектор $\Psi_\alpha(\mathbf{x}) = \operatorname{col}((1-\alpha)\psi_1/2; \psi_2)$. Пусть $\Psi_{\alpha j}$ ($j = 1, 2, \ldots 6$) — линейно-независимые функции Ψ_α, составленные посредством шести линейно-независимых векторных констант $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\{\Psi_{\alpha j}\}_{j=1,2,\ldots 6} \subset N(I + \mathrm{T}_\alpha^*)$ и $\{\operatorname{col}(0; \psi_{2j})\}_{j=1,2,\ldots 6} \subset N(\alpha I + \mathrm{T}_\alpha^*)$ при $\alpha \in [-1, 1]$ (здесь и далее $\{\Phi_i\}_{i=1,2,\ldots k}$ означает линейную оболочку векторов Φ_i, $N(A)$ — подпространство нулей оператора A). Покажем, что $\{\operatorname{col}(0; \psi_{2j})\}_{j=1,2,\ldots 6} = N(-I + \mathrm{T}^*)$. Действительно, уравнение $(-I + \mathrm{T})\varphi = \mathrm{F}$ эквивалентно второй основной краевой задаче теории упругости (для тела, состоящего из двух частей, лежащих соответственно внутри S_2 и вне S_1), которая разрешима тогда и только тогда, когда $\mathrm{F} \in \{\operatorname{col}(0; \Psi_{2j})\}_{j=1,2,\ldots 6}^{\perp}$. Следовательно, $\{\operatorname{col}(0; \Psi_{2j})\}_{j=1,2,\ldots 6}^{\perp} = (-I + \mathrm{T})H = N(-I + \mathrm{T}^*)^{\perp}$.

Рассмотрим пространство $H^\circ = \{\varphi \in H : (\psi_{1j}, \varphi_1)_{H_1} = (\psi_{2j}\ \varphi_2)_{H_2} = 0 \quad j = 1, 2\ldots 6\}$. Непосредственная проверка показывает, что при $\alpha = 1$

$$H^\circ = \{\operatorname{col}(0; \psi_{2j})\}_{j=1,2,\ldots 6}^{\perp} \cap \{\Psi_{\alpha j}\}_{j=1,2,\ldots 6}^{\perp}; \quad \mathrm{T}_\alpha H^\circ \subset H^\circ$$

Рассмотрим сужение T_α° оператора T_α на H°. Покажем, что $\Sigma(\mathrm{T}^\circ) \not\ni -1, 1$. Напомним, что точки $-1, 1 \in \Sigma(\mathrm{T})$ и являются изолированными точками в $\Sigma(\mathrm{T}) \subset [-1, 1]$ [1]. Пусть $\varphi \in N(I + \mathrm{T}^\circ)$ и $\varphi \in H^\circ$, тогда $\varphi \in N(I + \mathrm{T}^\circ) \cap N(I + \mathrm{T}^*)^{\perp}$. Из простоты полюса -1 резольвенты оператора T [1] следует теперь $\varphi \equiv 0$. Пусть теперь $-\varphi + \mathrm{T}\varphi = 0$ и $\varphi \in H^\circ$. Тогда одновременно $\varphi \in N(-I + \mathrm{T})$ и $\varphi \in N(-I + \mathrm{T}^*)^{\perp}$ и в силу простоты полюса 1 резольвенты оператора T имеем $\varphi = 0$, т. е. $1 \not\in \Sigma(\mathrm{T}^\circ)$.

Таким образом, $\Sigma(\mathrm{T}^\circ) \subset [-1 + \delta, 1 - \delta]$ при некотором $\delta > 0$ и, следовательно, $\rho(\mathrm{T}^\circ) < 1$, а значит, существует норма, эквивалентная исходной, в которой $\|\mathrm{T}^\circ\|_* = q < 1$.

Заметим теперь, что для любого $\mathrm{F} = \operatorname{col}(\mathrm{F}_1; \mathrm{F}_2) \in H$

$$\|\mathrm{T}_\alpha \mathrm{F}\|_H \leqslant \|K_{11}\mathrm{F}_1 + K_{12}\mathrm{F}_2\|_{H_1} + |\alpha|\,\|K_{22}\mathrm{F}_2 + K_{21}\mathrm{F}_1\|_{H_2} \leqslant \|\mathrm{TF}\|_H$$

Отсюда в силу $\mathrm{T}_\alpha H^\circ \subset H^\circ$ при любом $\mathrm{F} \in H^\circ$ и любом целом $n > 0$ имеем

$$\|\mathrm{T}_\alpha{}^n \mathrm{F}\| \leqslant \|\mathrm{T}\mathrm{T}_\alpha^{n-1}\mathrm{F}\| \leqslant \ldots \leqslant \|\mathrm{T}^n\mathrm{F}\| \leqslant c\|\mathrm{T}^n\mathrm{F}\|_* \leqslant cq^n\|\mathrm{F}\|_*$$

Здесь c — константа, входящая в условие эквивалентности норм.

Отсюда следует, что для любого $\mathrm{F} \in H^\circ$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-T_\alpha)^k F$$

сходится по норме. Пусть $\mathrm{F} \in \{\Psi_{\alpha j}\}_{j=1,2,\ldots 6}^{\perp}$; так как $(\alpha I + \mathrm{T}_\alpha)\mathrm{F} \in N(\alpha I + \mathrm{T}_\alpha^*)^{\perp} \subset \{\operatorname{col}(0; \psi_{2j})\}_{j=1,2,\ldots 6}^{\perp}$, то при $\alpha \neq 1$ $(\alpha I + \mathrm{T}_\alpha)\mathrm{F} \in H^\circ$ и, следовательно, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-T_\alpha)^k (\alpha I + \mathrm{T}_\alpha)\mathrm{F}$$

сходится. Проверкой теперь убеждаемся, что при $\alpha \in [-1, 1)$ уравнению (1.6) удовлетворяет функция

$$\varphi = \frac{1}{1-\alpha}\left[\mathrm{F} - \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{T}_\alpha)^k (\alpha I + \mathrm{T}_\alpha)\,\mathrm{F}_0\right] \tag{2.2}$$

Таким образом, при $\mathrm{F}_0 \in \{\Psi_{\alpha j}\}_{j=1,2,\ldots 6}^{\perp}$ решение (1.6) существует. В силу нетеровости оператора $I + \mathrm{T}_\alpha$ отсюда имеем $\{\Psi_{\alpha j}\}_{j=1,2,\ldots 6} = N(I + \mathrm{T}_\alpha^*)$.

Достаточность условий $(\mathbf{f}, \psi_{1j}) + (\mathbf{g}, \psi_{2j})$ $(j = 1, 2, \ldots, 6)$ (что эквивалентно $\mathbf{F} \in \{\Psi_{\alpha j}\}^{\perp}_{j=1,2,\ldots,6}$) для разрешимости исходной краевой задачи показана в [1].

Для вычисления ряда, входящего в (2.1), можно использовать итерационный процесс

$$\varphi_{(0)} = (\alpha I + \mathbf{T}_\alpha)\, \mathbf{F}, \quad \varphi_{(k)} = -\mathbf{T}_\alpha \varphi_{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

При этом для вычисления на каждом шаге сингулярных интегралов, входящих в $T_\alpha \varphi_{(k)}$, применима процедура, предложенная в [2].

Полученные результаты применимы и к другим основным задачам для кусочно-однородной среды с совпадающими коэффициентами Пуассона.

Принимая в постановке задачи $V(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 1 / |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ $(u, \varphi_1, \varphi_2, f, g$ — скалярные функции), придем к задаче Неймана для оператора Лапласа для составной области с заданным скачком градиента на границе. Результаты справедливы и в этом случае.

Поступила 15 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М., «Наука», 1976.
2. *Перлин П. И.* Применение регулярного представления сингулярных интегралов к решению второй основной задачи теории упругости. ПММ, 1976, т. 40, вып. 2.

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ ТЕЛ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А. В. Скаченко, А. Н. Спорыхин, А. И. Сумин

(Воронеж)

В трехмерной постановке, при детерминированных внешних нагрузках исследуется устойчивость стохастически неоднородных сжимаемых упругих тел при конечных докритических деформациях как по отношению к малым, так и к конечным возмущениям.

Исследованию устойчивости упругих тел со случайными неоднородностями в случае малых докритических деформаций посвящена работа [1].

Основные соотношения стохастически неоднородного сжимаемого гиперупругого тела могут быть получены из соотношений для сжимаемых гиперупругих сред, приведенных в [2].

1. Уравнения состояния примем в виде

$$s_i^{\,j} = L_i^{\,j}\Phi, \quad L_i^{\,j} = \delta_i^{\,j}\frac{\partial}{\partial A_1} + 2\varepsilon_i^{\,j}\frac{\partial}{\partial A_2} + 3p_i^{\,j}\frac{\partial}{\partial A_3}, \quad p_i^{\,j} = \varepsilon_i^{\,n}\varepsilon_n^{\,j}$$
$$A_1 = \varepsilon_n^{\,n}, \; A_2 = \varepsilon_n^{\,l}\varepsilon_l^{\,n}, \; A_3 = \varepsilon_n^{\,m}\varepsilon_m^{\,l}\varepsilon_l^{\,n}, \; \Phi = \Phi(A_1, A_2, A_3, c_p) \tag{1.1}$$

Здесь c_p — параметры среды ($p = 1, 2, \ldots$, П), случайным образом зависящие от пространственных координат; A_i — алгебраические инварианты; $\varepsilon_i^{\,j}$ — компоненты тензора деформаций; $s_i^{\,j}$ — компоненты тензора обобщенных напряжений.

Ковариантные составляющие тензора деформаций Грина представим в форме

$$2\varepsilon_{ij} = G_{ij} - g_{ij}, \; G_{ij} = c_i^{\,n} c_j^{\,l} g_{nl}, \; c_i^{\,n} = \delta_i^{\,n} + \nabla_i u^n \tag{1.2}$$

Уравнения равновесия и граничные условия в напряжениях

$$g^{nl}\nabla_i (s_n^{\,i} c_l^{\,m}) + \rho X^m = 0, \; g^{nl} s_n^{\,i} c_l^{\,m} N_i = P^m \tag{1.3}$$