УДК 532.72

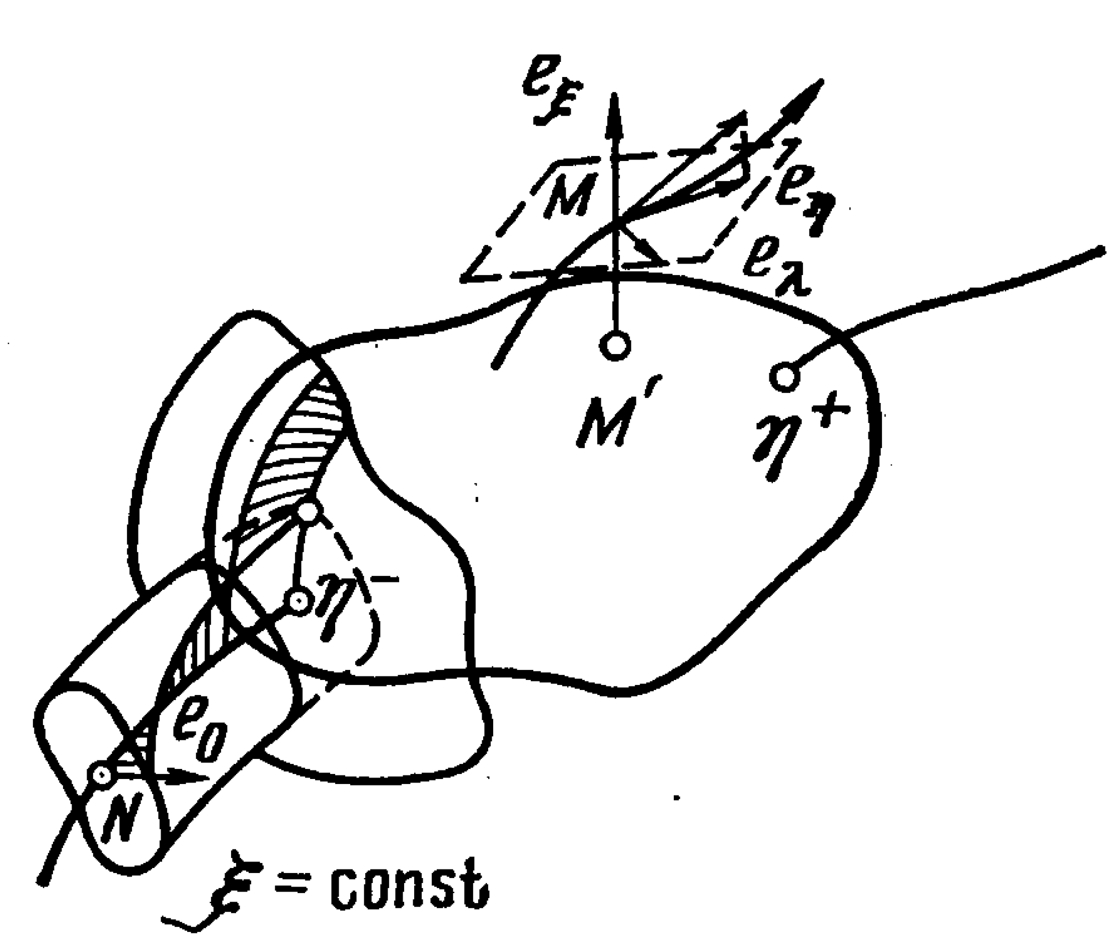
ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛООБМЕНА ДВИЖУЩИХСЯ В ЖИДКОСТИ ТЕЛ

Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, П. А. Прядкин, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

В приближении теплового пограничного слоя рассматривается нестационарная задача о конвективном теплообмене тел произвольной формы, движущихся в идеальной жидкости, или капель, движущихся в вязкой несжимаемой жидкости.

Предположение об идеальности жидкости в первом случае, т. е. о малости толщины вязкого погранслоя по сравнению с характерным размером тела (или с толщиной теплового погранслоя при больших числах Пекле), оказывается справедливым, например, для жидких металлов, используемых в качестве теплоносителей в атомных реакторах [1]. Это связано с тем, что характерное значение числа Прандтля $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ (ν и χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности) у жидких металлов лежит в интервале $6 \cdot 10^{-3}$ — 10^{-2} [1], а при больших числах Пекле $P = \mathrm{Pr}\, R = aU\chi^{-1}$ (U — характерная скорость тела) соответствующее значение числа Рейнольдса R также оказывается большим.



В работе [2] рассматривалась осесимметричная задача о нестационарной конвективной диффузии к поглощающему телу в случае стационарного обтекания, а в [3] — аналогичная задача исследовалась в предположении, что функция тока ψ вблизи поверхности тела может быть представлена в виде двух сомножителей, каждый из которых зависит только от времени или координат.

В общем случае выражение для функции тока даже в двумерных задачах о теплообмене не представляется в виде двух сомножителей (например, в случае стоксова обтекания пузыря суперпозиция нестационарного поступательного и стационарного чисто сдвигового потоков приводит к выражению $\psi \to (r-1)\sin^2\theta\,\{K(t) + {}^3/_2 \cdot \cos\theta\}$, $r \to 1$ [3]), поэтому для решения такого рода задач необходимо указать метод более общий, чем в [2,3].

Считая, что поле течения жидкости найдено из решения соответствующей задачи о гидродинамическом обтекании, введем локальную, ортогональную систему координат ξ, η, λ, связанную с поверхностью тела и геометрией потока, аналогично тому, как это делалось в [3]. Для этого определим направления ортов $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\lambda$ в любой точке M, лежащей вблизи частицы. Ближайшая к M точка M', принадлежащая телу, определяет направление орта $\mathbf{e}_\xi$, а отрезок $|MM'|$ задает безразмерную координату ξ, где масштабом длины является характерный размер тела. Направление орта $\mathbf{e}_\eta$ определяется проекцией вектора скорости жидкости в точке M на плоскость, перпендикулярную $\mathbf{e}_\xi$, а орт $\mathbf{e}_\lambda$ выбирается так, что система векторов $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\lambda$ образует ортогональную правую тройку (фигура).

Назовем точкой натекания (стекания) критическую точку (точка, к которой особая линия тока подходит к поверхности), в окрестности которой нормальная компонента скорости жидкости направлена к поверхности (от поверхности), а линию тока, выходящую из нее, — траекторией натекания (стекания). Считаем, что в окрестности критических точек устроено локальное сглаживание координатных поверхностей $\xi = \mathrm{const}$ и все рассматриваемые в дальнейшем величины имеют сколько потребуется частных производных по ξ ($\xi \neq 0$). Через произвольную точку N, лежащую на траектории натекания, проводим координатную поверхность $\eta = \mathrm{const}$. В касательной плоскости в точке N произвольно фиксируем вектор $\mathbf{e}_0$. Направление траектории натекания или стекания и этого вектора определит координатную поверхность $\lambda = 0$, от которой в дальнейшем ведется отсчет. Величину λ определим углом между $\mathbf{e}_0$ и вектором нормали к координатной поверхности $\lambda = \text{const}$ в точке N $(0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi)$. Координату η определим длиной дуги от точки N вдоль линии пересечения поверхности $\lambda = 0$ и поверхности частицы $\xi = 0$ (фигура).

В такой системе координат вектор скорости жидкости в каждой точке имеет вид $\mathbf{v} = \{v_\xi, \ v_\eta, 0\}$ и обладает следующими свойствами:

$$\xi \to 0, \ v_\xi = \xi O(1), \ v_\eta = v_\eta{}^\circ + \xi O(1); \ v_\eta{}^\circ = v_\eta \ (\xi = 0)$$

Отметим, что в отличие от стационарного поля течения направления ортов $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\lambda$, а также компоненты метрического тензора g_{22}, g_{33} $(g_{11} \equiv 1)$ зависят от времени.

В системе координат ξ, η, λ безразмерное уравнение конвективной теплопроводности в приближении теплового пограничного слоя записывается в виде [3]

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (T, \Phi)}{\partial (\xi, \eta)} = P^{-1} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}, \quad g = g_{11} g_{22} g_{33} \tag{1}$$

Здесь $\Phi = \Phi(\xi, \eta, \lambda, t)$ — трехмерный аналог функции тока [4], где значениям $\Phi = \text{const}$ в случае стационарной гидродинамики соответствует поверхность, целиком состоящая из линий тока. Отметим, что в уравнение (1) координата λ входит только как параметр и поэтому везде в дальнейшем не указывается.

Вблизи поверхности тела функция Φ может быть представлена в виде $(\xi \to 0)$ [4]

$$\Phi = \xi \Omega (t, \eta) \tag{2}$$

Начальные и граничные условия для уравнения (1), (2) пока не задаются и будут указаны позже.

Введем переменные

$$\omega = \sqrt{P}\, \xi f(t, \eta), \ \ \zeta = \zeta(t, \eta) \tag{3}$$

где функции f и ζ удовлетворяют следующей системе уравнений в частных производных:

$$\mathbf{L} f = \frac{1}{\sqrt{g}} \Omega_\eta{}' f, \quad \mathbf{L}(t, \eta) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Omega}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \mathbf{L} \zeta = f^2 \tag{4}$$

В переменных (3), (4) уравнение (1), (2) приводится к виду

$$\partial T / \partial \zeta = \partial^2 T / \partial \omega^2 \tag{5}$$

и при следующих начальных и граничных условиях для температуры:

$$T(\omega, 0) = T_1(\omega); \ T(0, \zeta) = 0, \ T(\infty, \zeta) = 1 \tag{6}$$

имеет решение

$$T(\omega, \zeta) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\omega \omega^*}}{2\zeta} \exp\left(-\frac{\omega^2 + \omega^{*2}}{4\zeta}\right) I_{1/2}\left(\frac{\omega\omega^*}{2\zeta}\right) T_1(\omega^*)\, d\omega^* \tag{7}$$

Граничные и начальные условия типа (6) при $T_1(\omega) \not\equiv 1$ появляются, например, в задачах о тепловом (диффузионном) взаимодействии нескольких тел в жидкости; при этом распределение концентрации в области теплового следа впереди идущего тела задается выражением $T_1(\omega)$ [4], а распределение концентрации в диффузионном погранслое следующего — формулой (7).

Получим теперь явные выражения для переменных ω и ζ. Интегрирование системы (4) будем проводить в переменных η, $u(t, \eta)$, где $u(t, \eta) = C = \text{const}$ — полный интеграл характеристического обыкновенного дифференциального уравнения

$$dt = \sqrt{g}\, \Omega^{-1} d\eta \tag{8}$$

соответствующего оператору $\mathbf{L}$, т. е. $\mathbf{L} u = 0$.

В переменных η, u для неизвестных функций f и ζ имеем

$$\begin{gathered} \partial f / \partial \eta - [(\ln \Omega)_\eta{}' + (\ln \Omega)_u{}' \chi] f = 0 \\ \partial \zeta / \partial \eta - \sqrt{g}\, \Omega^{-1} f^2 = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

где выражение в квадратных скобках — частная производная по η от $\ln \Omega(t, \eta)$, записанная в переменных η, u; $\partial u / \partial \eta = \chi(\eta, u)$ записана в тех же переменных.

Интегрируя последовательно уравнения (9), получаем общее выражение для искомых функций f и ζ

(10) $$f = A(u)\,\Omega E(\eta, u), \quad E(\eta, u) = \exp\left\{\int_{\eta_1}^{\eta} (\ln \Omega)_u{}' \chi \, d\eta^*\right\}$$

$$\zeta = A^2(u)\,[\Lambda(\eta, u) + B(u)], \quad \Lambda(a, b) = \int_{\eta^-}^{a} \sqrt{g}\,\Omega E^2(\eta^*, b)\, d\eta^*$$

η_1 и η^- — некоторые фиксированные значения переменной η, а $A = A(u)$, $B = B(u)$ — произвольные функции переменной u, конкретный вид которых определяется при задании начальных и граничных условий, аналогично тому, как это делалось в [3].

В автомодельном случае имеем

(11) $$T = \operatorname{erf}(\omega / 2\sqrt{\zeta}), \quad T_1(\omega) = 1$$

Конкретный вид функций $A(u)$ несуществен.

В частности, представление (11) имеет место при следующих начальных условиях:

(12) $$T_\alpha(0, \xi, \eta) = 1, \quad T_\beta(0, \xi, \eta) = T_0(\xi, \eta)$$

где первое соответствует тому, что при $t < 0$ температура в потоке была постоянна и при $t = 0$ внезапно начался теплообмен с поверхностью тела, а второе — стационарному теплообмену. Здесь и в дальнейшем все величины, относящиеся к первому и второму начальным условиям (12), помечаются индексами α и β снизу.

Для тепловых потоков в автомодельном случае имеем (σ — поверхность тела)

(13) $$j(t, \eta, \lambda) = (g_{11}^{-1/2} \partial T / \partial \xi)_{\xi=0} = \sqrt{P/\pi}\, f \zeta^{-1/2}$$

$$I(t) = \iint_{\sigma} j\,(g^{1/2} g_{11}^{-1/2})_{\xi=0}\, d\eta\, d\lambda$$

Переменные интегрирования определяются следующим образом:

(14) $$\zeta_\alpha = \Lambda(\eta, u) - \Lambda(u_0^{(-1)}(u), u), \quad \zeta_\beta = \zeta_\alpha + \zeta_0^*$$

$$f = \Omega E(\eta, u), \quad \zeta_0^*|_{t=0} = \zeta_0$$

$$\zeta_0^* = \zeta_0(\eta = u_0^{(-1)}(u), u) = \int_{\eta^-}^{u_0^{-1}(u)} (\sqrt{g})_{\xi=0}\, \Omega(0, \eta^*)\, d\eta^*$$

Здесь функция $\eta = u_0^{(-1)}(u)$ получена разрешением уравнения $u_0 = u_0(\eta) = u(0, \eta)$ относительно η.

В качестве примера рассмотрим плоскую задачу о теплообмене цилиндра, обтекаемого идеальной несжимаемой жидкостью с переменной скоростью $U(t) = (1 + 2t)^{-1}$. В этом случае $\xi = r - 1$, $\eta = \pi - \theta$, $\sqrt{g} = 1$ и

$$\Omega(t, \theta) = 2(1 + 2t)^{-1} \sin\theta$$

Для переменных ζ и f имеем ($u = \text{const}$ — первый интеграл системы (8))

$$\zeta_\alpha = 2u^{-1}[2 \operatorname{arctg} u + 2u(1 + u^2)^{-1} - \theta - \sin\theta]$$

$$\zeta_\beta = \zeta_\alpha + \zeta_0^*(u), \quad \zeta_0^*(u) = 4(1 + u^2)^{-1}$$

$$f = 2u^{-1} \sin\theta, \quad u = u(t, \theta) = \operatorname{tg}(\theta/2)(1 + 2t)$$

Видно, что при больших временах тепловые потоки выходят на один и тот же режим и стремятся к нулю пропорционально $t^{-1/2}$, в то время как скорость потока стремится к нулю пропорционально t^{-1}.

Поступила 19 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. *Chao B. T.* Transient heat and mass transfer to translating droplet. Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer, 1969, vol. 91, No. 2.
3. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Прядкин П. А., Рязанцев Ю. С.* О нестационарном массообмене капли в потоке вязкой жидкости. ПММ, 1978, т. 42, вып. 3.
4. *Полянин А. Д.* О диффузионном взаимодействии капель в жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 2.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ С ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА

М. И. Лазарев, П. И. Перлин

(Москва)

Исследуются сингулярные интегральные уравнения теории упругости для кусочно-однородной среды при совпадении коэффициентов Пуассона. Показано, что решение может быть получено при помощи метода последовательных приближений.

Метод потенциала для основных задач теории упругости приводит к сингулярным интегральным уравнениям второго рода [1]. В случаях второй внутренней и внешней, а также в случае первой внутренней задач спектральные свойства интегральных операторов позволяют применять метод последовательных приближений для нахождения решения.

1. Рассмотрим упругое тело D, заполняющее ограниченную часть пространства R^3 с границей S_1, являющейся поверхностью Ляпунова. Внутри D имеется включение D_2, ограниченное ляпуновской поверхностью S_2 $(S_1 \cap S_2 = \varnothing)$.

Обозначим часть тела D с границей $S_1 \cup S_2$ через D_1. Пусть константы Ламе тела D_i суть λ_i, μ_i. Предположим, что коэффициенты Пуассона равны и, следовательно, $\lambda_1/\lambda_2 = \mu_1/\mu_2 = \beta$. Положительным направлением нормали на S_1 считается то, при котором нормаль $\mathbf{n}$ направлена вне D_i.

Вектор смещений упругой среды $\mathbf{u}$ и D является решением краевой задачи

$$\begin{aligned}
&\Delta\mathbf{u} + (1-2\sigma)^{-1}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = 0,\ \ \mathbf{x}\in D_1,\ D_2 \\
&[T_{n1}\mathbf{u}]^+ = \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in S_1;\ \mathbf{u}^+(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^-(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in S_2 \\
&[T_{n2}\mathbf{u}]^+ - [T_{n1}\mathbf{u}]^- = \mathbf{g}(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x}\in S_2 \\
&T_{ni}\mathbf{u} = 2\mu_i\partial\mathbf{u}/\partial n + \lambda_i\mathbf{n}\operatorname{div}\mathbf{u} + \mu_i[\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u}]
\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь σ — коэффициент Пуассона, $T_{ni}\mathbf{u}$ — граничное значение оператора напряжений на поверхности с нормалью $\mathbf{n}$; индексы плюс и минус означают, что предельное значение определяется соответственно вдоль положительного и отрицательного направлений нормалей.

Так как замена $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — решение первой внутренней задачи для D_2, сводит задачу (1.1) к задаче с $\mathbf{r}(x) \equiv 0$, будем считать $\mathbf{r}(x) \equiv 0$. Функции $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ будем полагать элементами гильбертовых пространств H_1 и H_2 вектор-функций, заданных на S_1 и S_2 со скалярным произведением

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{H_i} = \int\limits_{S_i}\sum_{j=1}^{3}\varphi_1{}^j\varphi_2{}^j\,dS$$

Учитывая вид оператора T_{ni}, второе из условий на S_2 в (1.1) приведем к виду

$$[T_{n1}\mathbf{u}]^+ - \beta\,[T_{n1}\mathbf{u}]^- = \beta\mathbf{g}(\mathbf{x})\tag{1.2}$$