

УДК 533.6.011:534.222.2

## К ВОПРОСУ О ВОЗНИКНОВЕНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ВНУТРИ МЕСТНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ЗОНЫ

В. А. Иванов, И. А. Чернов

(Саратов)

Рассматривается одно точное решение трансзвукового уравнения как обобщение известного автомодельного решения Ф. И. Франкля [1] для течения вдали от профиля. Построенное обобщение описывает обтекание некоторого полутела дозвуковым на бесконечности потоком газа. Характеристики одного семейства отражаются от звуковой линии и, будучи после отражения волнами сжатия, начинают пересекаться в некоторой точке  $K$  внутри местной сверхзвуковой зоны, образуя огибающую (предельную линию) с точкой возврата, совпадающей с точкой  $K$ . Расстояние точки  $K$  от звуковой линии оказывается достаточно малым, его величина может быть использована при оценке точности численных методов.

Вывод о возникновении ударной волны не на звуковой линии, а внутри местной сверхзвуковой зоны был получен в последнее время с использованием численных методов рядом авторов [2-4].

Рассмотрим приближенную систему трансзвуковых уравнений

$$(1) \quad uu_x = v_y, \quad uy = vx$$

где  $u, v$  — приведенные безразмерные скорости возмущения однородного звукового потока,  $x, y$  — декартовы координаты.

Укажем одно точное решение уравнения (1)

$$(2) \quad \begin{aligned} u &= \frac{C_1(1 - C_2s^3)}{2s^2} + \frac{C_1^2t^2}{4} \\ v &= \frac{C_1^2(2 + C_2s^3)}{4s^2}t - \frac{C_1^3t^3}{12} \\ x &= \frac{1 + 2C_2s^3}{2s^2} - \frac{C_1t^2}{4}, \quad y = t \end{aligned}$$

Здесь  $s, t$  — параметры,  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные. Это решение описывает течение в плоских соплах Лавалья с местной сверхзвуковой зоной на стенках сопла, изученное в [5]. Заметим, что при  $C_2 = 0$  из (2) получается автомодельное сопловое течение с линейным распределением продольной скорости ( $u = C_1x$ ) на оси  $y = 0$ .

Можно показать, что наряду с решением  $(x, y, u, v)$ , заданным формулами (2), существует множество решений  $(x_i, y_i, u, v)$  того же уравнения (1), где

$$(3) \quad x_i = \frac{\partial^{(i)}x}{\partial v^i}, \quad y_i = \frac{\partial^{(i)}y}{\partial v^i}$$

порождаются оператором дифференцирования

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} &= C_1^{-2k-1} \left[ 4s^3tC_1 \frac{\partial}{\partial s} + 4s^2(2 + C_2s^3) \frac{\partial}{\partial t} \right] \\ k &= (2 + C_2s^3)^2 - 6C_1s^2t^2 \end{aligned}$$

Доказательство следует из вида уравнений (1), записанных в плоскости годографа  $uy_v = xu, y_u = xv$ , и возможности дифференцирования  $x, y$  по переменной  $v$  для получения новых решений.

При  $i = 2$  получим

$$(5) \quad \begin{aligned} x_2 &= \frac{8s^4\delta_1}{C_1^3k^3}, \quad y_2 = \frac{16s^4t\delta_2}{C_1^3k^3} \\ \delta_1 &= (C_2s^3 + 2)^3(C_2s^3 - 4) - C_1s^2t^2(C_2s^3 + 2)(C_2^2s^6 - 32C_2s^3 + 40) - 18C_1^2C_2s^7t^4 \\ \delta_2 &= (C_2s^3 + 2)^2(16 - C_2s^3) - 18C_1C_2s^5t^2 \end{aligned}$$

Соответствующий потенциал  $\varphi$  имеет вид

$$(6) \quad \varphi = ux_2 + vy_2 - \frac{4s^2(2 + C_2s^3)}{C_1^2k}$$

$$(u, v) = \text{grad}_{x,y} \varphi$$

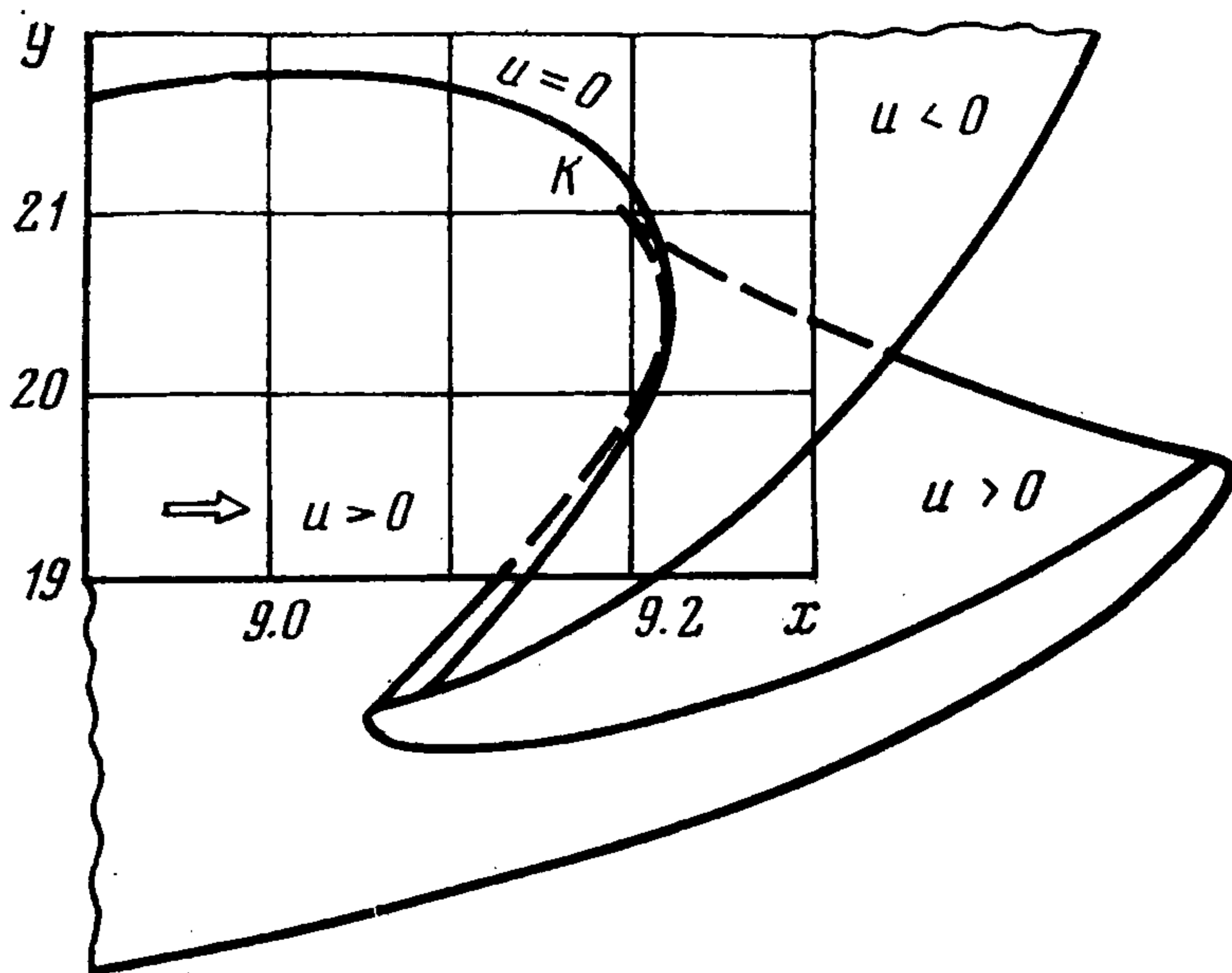
При  $C_2 = 0$  и  $C_1 = C_{11} = -2^{-83-355}$  величины  $x_2, y_2$  в совокупности с  $u, v$  из (2) определяют автомодельное решение [1], причем уравнением предельной характеристики будет  $x_2y_2^{-4/5} = 1$ . При фиксированных  $C_1$  и  $C_2 \neq 0$  бесконечности плоскости  $x_2y_2$  соответствует  $t = 0$ ,  $C_2s^3 = -2$  с характерной дозвуковой скоростью

$$u_0 = 3/2 C_1 (-C_2/2)^{3/5}$$

Рассмотрим ветвь решения (5), (6), которая переходит при  $C_2 \rightarrow 0$  в часть решения [1], описывающую течение до ударной волны. Асимптотически при  $x_2, y_2 \rightarrow 0$  оба течения ( $C_2 = 0, C_2 \neq 0$ ) совпадают. Звуковая линия начинается как обобщенная парабола

$$x_2y_2^{-4/5} = 5^{-12} 3^{3/5} (C_1 = 2 C_{11}, C_2 = -0.09496)$$

но затем при  $y_2 \approx 22$  резко поворачивает вниз, образуя местную сверхзвуковую зону. Условие  $v = 0$  выполняется только при  $y_2 = 0, x_2 < 0$ , тогда как  $v \neq 0$  для  $y_2 = 0, x_2 > 0$ .



На фигуре показана вершина местной сверхзвуковой зоны в том месте, где образуется трехлистная складка. Сплошной линией изображена звуковая линия, штрихами — предельная линия  $I = 0$ , где  $I$  — якобиан преобразования  $D(x_2, y_2)t / D(s, t)$ .

Предельная линия состоит из двух ветвей, одна из которых имеет общую вертикальную касательную со звуковой линией. Продолжая эту ветвь вниз, приходим в начало координат, другая ветвь асимптотически приближается к оси  $y_2 = 0, x_2 > 0$ . Точка возврата  $K$  предельной линии

лежит внутри местной сверхзвуковой зоны, расстояние ее до звуковой линии вдоль прямой  $y = y_K$  составляет  $\Delta x = 0.01$ , что мало по сравнению с общей высотой зоны  $\Delta h \approx 22$ .

Чтобы решение имело физический смысл, необходимо построение ударной волны, которая устраняет многозначность решения в физической плоскости. Удовлетворение двум условиям — непрерывности потенциала и ударной поляры — на одной кривой оказывается невозможным в данном классе решений.

Однако наличие такого примера возникновения складки внутри местной сверхзвуковой зоны является аргументом в пользу того, что и ударная волна может начинаться внутри нее. В самом деле, если рассмотреть линию тока, идущую несколько ниже точки  $K$ , и взять эту линию тока за твердую стенку, то, учитывая слабость ударной волны, следует ожидать ее появления как угодно близко к точке  $K$ .

Авторы благодарят С. В. Фальковича за внимание к работе.

Поступила 10 I 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Исследование по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука. Докл. АН СССР 1947, т. 57, № 7.
2. Yu N. J., Seebass A. R. Inviscid transonic flow computations with shock fitting. Proc. Sympos. Transsonicum, Goettingen, 1975.
3. Еременко В. А., Рыжов О. С. О течении в местной сверхзвуковой зоне у профиля крыла бесконечного размаха. Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 3.
4. Chattot J.-J. Symmetrical flow past a double wedge at high subsonic Mach numbers. J. Fluid Mech., 1978, vol. 86, pt 1.
5. Tomotika S., Tamada K. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluids. Quart. Appl. Math., 1950, vol. 7, No. 4.