УДК 531.31

О ТЕОРЕМЕ КАРНО В ТЕОРИИ ИМПУЛЬСИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. А. Синицын

(Москва)

Изучается изменение кинетической энергии системы при ударе в условиях обобщенной теоремы Карно [1]. Приводится доказательство теоремы в случае акатастатических связей. Показано, что утверждение второй части теоремы распространяется на системы, взаимодействие которых со связями характеризуется свойством, включающим известное условие идеальности связей, а также равенство нулю виртуальных работ импульсов реакций связей за время восстановления.

1. Пусть ограничения на движение механической системы являются идеальными связями, описываемыми независимыми уравнениями вида

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{sk}x_k^{\cdot}+b_{sk}y_k^{\cdot}+c_{sk}z_k^{\cdot})+d_s=0 \qquad (s=1,\ldots,l) \tag{1.1}$$

Здесь a_{sk}, b_{sk}, c_{sk}, d_s — непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции времени t и координат материальных точек системы x_k, y_k, z_k $(k=1,\ldots,n)$, $(x^{\cdot}= dx\,/\,dt)$.

Введем векторы скоростей точек $\mathbf{v}_k=(x_k^{\cdot},\ y_k^{\cdot},\ z_k^{\cdot})$ и векторы $\mathbf{N}_{sk}=(a_{sk},\ b_{sk},\ c_{sk})$ $(s=1,\ldots,l;\ k=1,\ldots,n)$. Уравнения (1.1) запишем следующим образом:

$$\sum_{k}\mathbf{N}_{sk}\mathbf{v}_k+d_s=0 \quad (s=1,\ldots,l) \tag{1.2}$$

Условие идеальности связей заключается в том, что виртуальные перемещения $\delta\mathbf{r}_k$, на которых работа реакций связей равна нулю, удовлетворяют равенствам

$$\sum_{k}\mathbf{N}_{sk}\delta\mathbf{r}_k=0 \quad (s=1,\ldots,l) \tag{1.3}$$

Рассмотрим изменение кинетической энергии системы при наложении сохраняющихся после удара связей (первая часть теоремы Карно). Изменение скоростей точек системы, происходящее в результате наложения связей, соответствует действию ударных импульсов реакций $\mathbf{R}_k$

$$m_k(\mathbf{v}_{k+}-\mathbf{v}_{k-})=\mathbf{R}_k,\qquad \mathbf{R}_k=\sum_{s=1}^{l}\lambda_s\mathbf{N}_{sk} \quad (k=1,\ldots,n) \tag{1.4}$$

Здесь m_k — массы материальных точек, системы; $\mathbf{v}_{k-}$, $\mathbf{v}_{k+}$ — скорости точек системы до и после удара; λ_s $(s=1,\ldots,l)$ — неопределенные множители.

Так как после удара связи сохраняются, то скорости $\mathbf{v}_{k+}$ удовлетворяют уравнениям (1.2). Уравнения (1.2) для $\mathbf{v}_{k+}$ и (1.4) позволяют определить $(3n+l)$ неизвестных $x_k^{\cdot}$, $y_k^{\cdot}$, $z_k^{\cdot}$, λ_s, если задано состояние системы перед ударом.

Система линейных уравнений относительно неопределенных множителей λ_s имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{m_k}\sum_{p=1}^{l}\lambda_p\mathbf{N}_{pk}\mathbf{N}_{sk}=d_s+\sum_{k=1}^{n}\mathbf{N}_{sk}\mathbf{v}_{k-} \quad (s=1,\ldots,l) \tag{1.5}$$

Отсюда следует, что реакции определяются однозначно, если система уравнений (1.5) совместна и имеет единственное решение.

Движение каждой точки представим как сложное: в качестве переносных скоростей $(\mathbf{v}_k^e)$ примем скорости, которые получили бы точки системы, находящейся в покое $(\mathbf{v}_{k-}=0)$, при наложении связей (1.1), т. е. для $\mathbf{v}_k^e$ имеем уравнения (1.2). Тогда векторы относительных скоростей точек до и после удара $\mathbf{v}_{k-}^{\circ}$, $\mathbf{v}_{k+}^{\circ}$ равны $\mathbf{v}_{k-}^{\circ}=\mathbf{v}_k-\mathbf{v}_k^e$,

$v_{k+}{}^{\circ} = v_{k+} - v_k{}^e$. Разность уравнений (1.2) для v_{k+} и $v_k{}^e$ приводит к равенствам

$$\sum_{k=1}^{n} N_{sk} \overset{\circ}{v}_{k+} = 0 \quad (s = 1, \ldots, l) \tag{1.6}$$

Для относительных скоростей справедливы также уравнения (1.4). Умножая каждое уравнение (1.4) скалярно на $v_{k+}{}^{\circ}$ и суммируя их, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} (\overset{\circ}{v}_{k+} - \overset{\circ}{v}_{k-}) \overset{\circ}{v}_{k+} = \sum_{k=1}^{n} R_k \overset{\circ}{v}_{k+} \tag{1.7}$$

Учитывая (1.6), получим, что правая часть в (1.7) равна нулю и, следовательно

$$\frac{1}{2} \sum_k m_k \overset{\circ}{v}{}_{k-}^2 - \frac{1}{2} \sum_k m_k \overset{\circ}{v}{}_{k+}^2 = \frac{1}{2} \sum_k m_k (v_{k-} - v_{k+})^2 \tag{1.8}$$

Равенство (1.8) выражает следующее утверждение: кинетическая энергия относительных скоростей, потерянная при внезапном наложении сохраняющихся идеальных акатастатических связей, равна энергии потерянных скоростей.

При $d_s \equiv 0$ (катастатические связи [2]) из (1.8) следует первая часть [3] обобщенной теоремы Карно.

2. Вторая часть обобщенной теоремы Карно предполагает, что движение системы согласовано со связями до удара. Поэтому скорости точек до удара v_{k-} удовлетворяют уравнениям связей (1.2). Ударные реакции могут появиться либо в результате действия ударных активных сил, приложенных к точкам системы, либо после импульсивного изменения связей [2]. В обоих случаях модель ударного взаимодействия в дискретных механических системах должна быть дополнена гипотезами, позволяющими учитывать физические свойства механической системы и ограничений, осуществляющих связи, так как снятие связей происходит либо после упругого взаимодействия с ними, либо после их разрушения. В первом случае воспользуемся известным представлением об упругом ударном взаимодействии со связью как процессе, состоящем из двух фаз: фазы накопления связями импульсов ударных реакций и фазы восстановления с возвратом накопленных импульсов системе. Действие ударных активных сил ограничим временем протекания первой фазы.

В течение первой фазы связи сохраняются и создают импульсы R_k. Обозначив скорости точек в конце этой фазы u_k, имеем

$$m_k (u_k - v_{k-}) = S_k + R_k \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

Здесь для u_k справедливо также уравнение (1.2); S_k — импульсы ударных активных сил.

В течение второй фазы на систему действуют только ударные реакции, импульсы которых обозначим $R_k{}^*$. Тогда

$$m_k (v_{k+} - u_k) = R_k{}^* \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

В общем случае направления ударных реакций, действующих во время фазы восстановления, определяются векторами N_{sk}. Принимая гипотезу Ньютона о возможности характеризовать упругое взаимодействие материальных точек системы со связями коэффициентами восстановления ($0 \leqslant \varkappa_{sk} \leqslant 1$), а разрушение — коэффициентами сохранения скорости ($-1 \leqslant \varkappa_{sk} < 0$), запишем

$$R_k^* = \sum_{s=1}^{l} \varkappa_{sk} \lambda_s N_{sk}, \quad -1 \leqslant \varkappa_{sk} \leqslant 1 \tag{2.3}$$

Следовательно, для идеальности связей при ударе необходимо, чтобы виртуальная работа ударных импульсов реакций за время фазы восстановления была равна нулю, т. е.

$$\sum_k R_k^* \delta r_k = 0 \quad \left(\sum_k R_k \delta r_k = 0\right) \tag{2.4}$$

Замечание. Из сравнения (2.3) и (1.3) следует, что условие идеальности при ударе (2.4) выполняется, если свойства ударного взаимодействия всех материальных точек с каждой связью одинаковы, т. е. $\varkappa_{s1} = \ldots = \varkappa_{sn} = \varkappa_s$.

Из равенств (2.1) и (2.2) имеем

$$m_k(\mathbf{v}_{k+} - \mathbf{v}_{k-}) = \mathbf{S}_k + \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_k^* \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

При доказательстве второй части теоремы в качестве исходных обычно [3] принимают уравнения импульсивного движения, которые получаются из (2.5), если ударные активные силы уравновешиваются ударными реакциями, действующими в течение первой фазы, т. е. $\mathbf{S}_k = -\mathbf{R}_k$. В противном случае вместо $\mathbf{v}_{k-}$ следует рассматривать скорости $\mathbf{u}_k$.

Предположим, что связи являются идеальными при ударе, т. е. выполняется условие (2.4). Умножим каждое равенство (2.5) скалярно на векторы $\mathring{\mathbf{v}}_{k-}$ и найдем их сумму с учетом равенства $\mathbf{S}_k = -\mathbf{R}_k$ в виде

$$\frac{1}{2}\sum_k m_k \mathring{v}_{k+}^2 - \frac{1}{2}\sum_k m_k \mathring{v}_{k-}^2 - \frac{1}{2}\sum_k m_k(\mathring{\mathbf{v}}_{k+} - \dot{\mathbf{v}}_{k-})^2 = \sum_k \mathbf{R}_k^* \dot{\mathbf{v}}_{k-} \tag{2.6}$$

Так как относительные скорости $\mathring{\mathbf{v}}_{k-}$ пропорциональны виртуальным перемещениям, то при условии (2.4) правая часть равенства (2.6) равна нулю.

Таким образом, имеем обобщение второй части теоремы Карно: при ударном действии активных сил с последующим освобождением системы от идеальных при ударе акатастатических связей приобретенная кинетическая энергия относительных скоростей равна кинетической энергии приобретенных скоростей.

Левую часть уравнения (2.6) получим также, если ударное действие на системы вызвано импульсивными связями [2]. В этом случае функции d_s в уравнениях (1.1) терпят разрывы первого рода и принимают значения, которые обозначим d_s^*. Изменение связей является причиной удара. В конце первой фазы скорости точек $\mathbf{u}_k^*$ удовлетворяют уравнениям

$$m_k(\mathbf{u}_k^* - \mathbf{v}_{k-}) = \mathbf{R}_k \quad (k = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_k \mathbf{N}_{sk}\mathbf{u}_k^* + d_s = 0 \quad (s = 1, \ldots, l)$$

Для второй фазы справедливы соотношения

$$m_k(\mathbf{v}_{k+} - \mathbf{u}_k^*) = \mathbf{R}_k^*$$

За переносные скорости принимаем любые векторы, удовлетворяющие уравнениям связей (1.2). Уравнения импульсивного движения получаем в следующем виде:

$$m_k(\mathbf{v}_{k+} - \mathbf{v}_{k-}) = \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_k^*$$

Идеальность связей при ударе позволяет провести дальнейшее доказательство теоремы аналогично приведенному выше, так как

$$\sum_k \mathbf{R}_k \mathring{\mathbf{v}}_{k-} = 0, \quad \sum_k \mathbf{R}_k^* \mathring{\mathbf{v}}_{k-} = 0$$

В результате получаем следующую теорему: при импульсивном изменении идеальных несохраняющихся связей приобретенная кинетическая энергия относительных скоростей равна кинетической энергии приобретенных скоростей.

Таким образом, получены утверждения, обобщающие теорему Карно на системы с идеальными при ударе акатастатическими связями.

Поступила 31 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Геронимус Я. Л.* Очерки о работах корифеев русской механики. М., Гостехиздат, 1952.
2. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. М., «Наука», 1971.
3. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики, ч. 2. М., «Наука», 1972.