Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.31

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДЛЯ ПЛОСКОГО КОНСЕРВАТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Ю. К. Голиков, А. А. Матышев
(Ленинград)

Развивается метод получения неполного интеграла двумерного уравнения Гамильтона—Якоби для материальной точки, если известно одно частное решение, удовлетворяющее специальному уравнению в частных производных. В качестве примера получено в аналитическом виде уравнение траекторий дипольных частиц, движущихся с нулевой полной энергией в произвольном двумерном гармоническом электростатическом поле.

Задачу о движении материальной точки в двумерном консервативном поле удается решить в квадратурах только для лиувиллевых систем [1]. Можно расширить круг интегрируемых в квадратурах задач, если искать неполный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, содержащий одну свободную постоянную и, следовательно, описывающий изоэнергетическое семейство траекторий. В данной работе предлагается метод построения неполного интеграла по известному частному интегралу, удовлетворяющему некоторому специальному условию.

Рассмотрим движение материальной точки единичной массы в двумерном поле с потенциалом $\Pi(x, y)$, где x и y — декартовы координаты на плоскости. Соответствующее уравнение Гамильтона—Якоби имеет вид

$$\tfrac{1}{2}(S_x^2 + S_y^2) + \Pi(x, y) = h \tag{1}$$

где $S(x, y, h, \alpha)$ — разыскиваемый полный интеграл, h — полная энергия частицы, α — произвольная постоянная.

Пусть найден частный интеграл (1) при некотором фиксированном значении энергии h_0 вида $u(x, y)$ или интеграл вида $u(x, y, h)$, удовлетворяющий линейному однородному уравнению в частных производных второго порядка

$$u_{xx} + u_{yy} + au_x + bu_y = 0 \tag{2}$$

В первом случае такой интеграл может быть найден, если

$$\Pi = h_0 - \tfrac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) \tag{3}$$

а $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2).

Условия, которым подчиняются функции $a(x, y)$ и $b(x, y)$, будут получены ниже.

Покажем, как в этом случае найти интеграл (1) вида $S(x, y, \alpha)$ или $S(x, y, h, \alpha)$ соответственно. Так как u — частный интеграл (1), то

$$S_x^2 + S_y^2 = u_x^2 + u_y^2 \tag{4}$$

Будем искать интеграл уравнения (4) как решение системы линейных уравнений первого порядка

$$S_x = u_x \sin\varphi + u_y \cos\varphi, \quad S_y = -u_x \cos\varphi + u_y \sin\varphi \tag{5}$$

совместность которой должна выполняться в силу (2), а параметр α должен входить в подлежащую определению функцию $\varphi(x, y, \alpha)$.

В силу системы (5) уравнение (4) удовлетворяется при любой функции φ. Условие совместности (5) $S_{xy} = S_{yx}$ приводит к уравнению

$$u_{xx} + u_{yy} - (\varphi_x \operatorname{tg} \varphi - \varphi_y) u_x - (\varphi_x + \varphi_y \operatorname{tg} \varphi) u_y = 0 \tag{6}$$

Сравнивая (6) с (2), получаем систему двух квазилинейных уравнений относительно φ

$$\varphi_x \operatorname{tg} \varphi - \varphi_y = -a, \quad \varphi_x + \varphi_y \operatorname{tg} \varphi = -b \tag{7}$$

В свою очередь, условие совместности системы (7) $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$ дает следующее уравнение:

$$(a_y - b_x) \operatorname{tg} \varphi = a^2 + b^2 - a_x - b_y \tag{8}$$

Так как разыскивается интеграл уравнения (6), зависящий от произвольной постоянной α, а функции a и b от α не зависят, то (8) дает систему, налагающую требование на эти функции

$$a_y - b_x = 0, \quad a_x + b_y = a^2 + b^2 \tag{9}$$

Положив

$$a = p_x / p, \quad b = p_y / p \tag{10}$$

удовлетворим первому уравнению системы (9). Второе даст условие для функции p

$$p_{xx} + p_{yy} = 0 \tag{11}$$

При выполнении условий (10) и (11) система (7) становится вполне интегрируемой, что позволяет определить ее интеграл вида $\varphi(x, y, \alpha)$. Действительно, разыскивая φ в неявной форме

$$\Phi(x, y, \varphi) = \mathrm{const} = \alpha \tag{12}$$

получим вполне интегрируемую систему относительно функции $\Phi(x, y, \varphi)$, в которой φ будет играть роль переменной

$$\Phi_x \operatorname{tg} \varphi - \Phi_y = a\Phi_\varphi, \quad \Phi_x + \Phi_y \operatorname{tg} \varphi = b\Phi_\varphi \tag{13}$$

Найдя какой-либо интеграл системы (13), содержащий φ, подставив его в (12) и разрешив полученное уравнение относительно φ, определим требуемый интеграл (7). Следовательно, если частный интеграл (1) удовлетворяет уравнению (2) с коэффициентами, определяемыми (10) и (11), то можно найти интеграл (1), содержащий, помимо прежних переменных, произвольную постоянную α.

В качестве примера применения указанного метода рассмотрим плоское движение частицы с потенциальной энергией

$$\Pi = -{}^1/_2 (u_x{}^2 + u_y{}^2) \tag{14}$$

где $u(x, y)$ — произвольная гармоническая функция

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{15}$$

Данный случай описывает широкий класс явлений, в частности, движение электрически нейтральных атомов и молекул или незаряженных металлических частиц в электростатическом поле с гармоническим потенциалом $u(x, y)$.

Подставляя Π из (14) в (1), получаем

$$(S_x{}^2 + S_y{}^2) - (u_x{}^2 + u_y{}^2) = 2h \tag{16}$$

Очевидным частным интегралом (16) при $h = 0$ будет $S = u(x, y)$, удовлетворяющим уравнению (15), которое является частным случаем (2) при $a = 0$, $b = 0$, что соответствует $p = \mathrm{const}$. При этих значениях a и b в качестве интеграла системы (7) можно взять $\varphi = \alpha$. Тогда неполный интеграл (16) примет вид

$$S(x, y, \alpha) = u(x, y) \sin \alpha - v(x, y) \cos \alpha \tag{17}$$

где $v(x, y)$ — гармонически сопряженная с $u(x, y)$ функция ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$).

В данном случае неполный интеграл выражается через электростатический потенциал $u(x, y)$ и функцию потока $v(x, y)$, а траектория частицы, движущейся в произвольном двумерном электростатическом поле с нулевой полной энергией в плоскости действия поля, всегда может быть определена в квадратурах, так как по теореме Лемана — Филе [2] соотношение

$$S_\alpha = \beta \tag{18}$$

является уравнением траектории. Подставляя (17) в (18), получим уравнение траектории частицы при $h = 0$

$$u(x, y)\cos\alpha + v(x, y)\sin\alpha = \beta$$

Случаю нулевой в плоскости действия поля энергии соответствует, например, влет с произвольной скоростью частицы перпендикулярно плоскости действия поля.

Рассмотрим также движение дипольных частиц в осесимметричных электростатических полях, когда начальный вращательный импульс вокруг оси равен нулю. Пусть r, ψ, z — цилиндрические координаты. Тогда (1) принимает вид

$$(S_r^2 + S_z^2) - (u_r^2 + u_z^2) = 2h \tag{19}$$

где $u(r, z)$ удовлетворяет осесимметричному уравнению Лапласа

$$u_{rr} + u_{zz} + r^{-1}u_r = 0 \tag{20}$$

Уравнение (20) удовлетворяет условиям (2), (10), (11), так как этому случаю соответствуют $p = r$ (нужно помнить, что теперь вместо x и y употребляются r и z). При $h = 0$ (19) имеет интеграл $S = u(r, z)$. Система (13) для данного случая примет вид

$$\Phi_r \operatorname{tg}\varphi - \Phi_z = r^{-1}\Phi_\varphi, \quad \Phi_r + \Phi_z \operatorname{tg}\varphi = 0 \tag{21}$$

Найдя решение системы (21), имеем

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\alpha + z}{r}$$

Отсюда интеграл системы (5) можно записать в виде выражения

$$S = \int\limits_{(r_0, z_0)}^{(r, z)} \frac{(\alpha + z)u_r + ru_z}{\sqrt{r^2 + (\alpha + z)^2}}\,dr + \frac{(\alpha + z)u_z - ru_r}{\sqrt{r^2 + (\alpha + z)^2}}\,dz \tag{22}$$

Подставляя теперь S из (22) в (18), получим траектории дипольных частиц, движущихся с нулевой энергией в меридиональной плоскости произвольного осесимметричного электростатического поля.

В заключение покажем, как все задачи, интегрируемые указанным методом, могут быть приведены к только что рассмотренному случаю. Это избавляет от последовательного решения систем дифференциальных уравнений, позволяя воспользоваться уже полученным результатом. Действительно, пусть при $h = h_0$ найден интеграл $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющий уравнению (2) при некоторой функции $p(x, y) \neq \text{const}$. Перейдем к криволинейным координатам ξ, η

$$w = f(z); \quad w = \xi + i\eta, \quad z = x + iy, \quad f(z) = p(x, y) + iq(x, y)$$

где $q(x, y)$ — гармонически сопряженная с $p(x, y)$ функция.

В новых координатах уравнение (1) при $h = h_0$ принимает вид

$$(S_\xi^2 + S_\eta^2) - (U_\xi^2 + U_\eta^2) = 0, \quad U(\xi, \eta) = u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \tag{23}$$

Функция $U(\xi, \eta)$ удовлетворяет преобразованному к координатам ξ, η уравнению (2), совпадающему с точностью до обозначения переменных с уравнением (20). Уравнение (23) совпадает с (19) при $h = 0$, тем самым вся задача сводится к уже решенной. Если перейти от осесимметричного случая с помощью произвольных гармонических функций $p(x, y)$, учитывая и случай $p(x, y) = \text{const}$, то получим все интегрируемые данным методом задачи.

Поступила 12 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. М., «Наука», 1971.
2. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М., «Наука», 1968.