Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.4:534.1

УСЛОВИЯ ТИПА ЗОММЕРФЕЛЬДА И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ВНЕШНИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

В. С. Будаев

(Москва)

Рассматриваются установившиеся колебания неограниченных упругих анизотропных сред в пространстве в общем случае 21 упругой постоянной. Ставится задача о выделении на основе принципа излучения единственного, определенного во всем пространстве решения неоднородной системы эллиптических уравнений для стационарной части смещений. Исследуется асимптотика фундаментального решения на бесконечности и определяются условия излучения, непосредственно переходящие в условия Зоммерфельда при переходе к изотропным средам. Формулируется теорема единственности решения неоднородной задачи в неограниченных областях.

1. Исследование установившихся колебаний упругих анизотропных сред в неограниченных областях сводится к исследованию системы эллиптических уравнений во всем пространстве R^n ($n = 3$) для стационарной части смещений. В то время, как корректные постановки краевых задач для эллиптических уравнений в ограниченных областях хорошо изучены, гораздо в меньшей степени известны корректные постановки краевых задач для уравнений в неограниченных областях. Это связано с тем, что наряду с условиями на границе области нужно еще задавать какие-то условия на бесконечности, причем до недавнего времени для большинства типов гипоэллиптических уравнений не было ответа на этот вопрос.

Система уравнений для стационарной части смещений в упругой анизотропной среде принадлежит к типу уравнений, характеристический многочлен $P(\sigma)$ которых удовлетворяет следующим условиям:

1°. $P(\sigma)$ имеет только вещественные коэффициенты.

2°. $P(\sigma)$ имеет вещественные нули.

Предположим, что выполняется также и условие (регулярный случай).

3°. $\operatorname{grad} P(\sigma) \neq 0$ в вещественных нулях $P(\sigma)$.

Из перечисленных условий следует, что вещественные нули многочлена образуют несколько замкнутых поверхностей S_l (овалов).

К указанному типу уравнений принадлежит уравнение Гельмгольца, условия на бесконечности для которого были получены Зоммерфельдом (условия излучения Зоммерфельда). В случае изотропных сред поверхности вещественных нулей характеристического уравнения обладают сферической симметрией, и условиями на бесконечности являются условия Зоммерфельда.

В последнее время были рассмотрены гипоэллиптические операторы общего вида, удовлетворяющие условиям 1°—3° для случая $n = 2$ [1] и для $n \geqslant 2$ при дополнительном условии.

4°. Полная кривизна поверхностей вещественных нулей S_l всюду отлична от нуля (случай строго выпуклых поверхностей S_l) [1,2].

Рассмотренные в [2] гипоэллиптические уравнения записываются в виде

$$P(D)\,u(x) = f(x) \tag{1.1}$$

$$(D = i^{-1}(\partial / \partial x_1, \ldots, \partial / \partial x_n),\ x = (x_1, \ldots, x_n))$$

где $P(\sigma)$ удовлетворяет условиям 1°—4°.

Точка $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ обозначена через σ.

Основной результат работы состоит в том, что если гипоэллиптический многочлен $P(\sigma)$ удовлетворяет условиям 1°—4° и на бесконечности выполняются условия

$$u(x) - o(r^{-(n-3)/2}),\quad Q(\omega, D)\,u(x) = o(r^{-(n-1)/2}) \tag{1.2}$$

то решение однородного уравнения

$$P(D)u(x) = 0 \tag{1.3}$$

обязано быть тождественным нулем.

Здесь $Q(\omega, D)$ — некоторый дифференциальный оператор, коэффициенты которого зависят только от ω (ω — единичный вектор в пространстве x), удовлетворяющий в точках на поверхностях S_l условиям

$$Q[\omega, \sigma_{\pm}^{l}(\omega)] = 0,\quad Q[\omega, \sigma_{\mp}^{l}(\omega)] \neq 0,\quad 1 \leqslant l \leqslant m \tag{1.4}$$

Здесь в индексах выбираются верхние или нижние знаки в зависимости от S_l, через $\sigma_+^l(\omega)$ ($\sigma_-^l(\omega)$) обозначена точка на S_l, в которой нормаль к S_l совпадает (противоположна) по направлению с ω. В [2] показано, что условия Зоммерфельда имеют именно такую природу. В общем случае в выборе оператора $Q(\omega, \sigma)$ имеется большой произвол. Но оказывается, что два многочлена Q_1 и Q_2, которые в точках σ_+^l и σ_-^l одновременно обращаются в нуль или одновременно отличны от нуля, выделяют при помощи условий (1.2), (1.4) одно и то же решение (1.1).

Основная цель данной работы — получение конкретных условий на бесконечности, переходящих в предельном случае изотропных сред в условия излучения Зоммерфельда, и формулировка на их основе теоремы единственности. Будет показано, что условия на бесконечности имеют такую же природу, что и (1.2), (1.4).

2. Уравнения движения упругих анизотропных сред в общем случае 21 упругой постоянной можно записать в виде

$$c_{pqrs}\frac{\partial^2 u_r}{\partial x_q \partial x_s} = \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

Зависимые переменные u_p ($p = 1, 2, 3$) — декартовы компоненты вектора упругих смещений, x_q — декартовы координаты, t — время и через c_{pqrs} обозначены упругие постоянные a_{pqrs}, деленные на плотность ρ.

Суммирование по q, r, s производится в соответствии с правилами тензорного исчисления. Постоянные a_{pqrs} ограничены условиями положительной определенности упругой энергии (ε_{pq} — компоненты деформации)

$$2F = a_{pqrs}\varepsilon_{pq}\varepsilon_{rs},\quad \varepsilon_{pq} = \varepsilon_{qp}$$

Рассмотрим плоскую волну

$$u_p = A_p\varphi(\theta\cdot x - t) \tag{2.2}$$

Подставляя в (2.1), получим условия разрешимости однородной системы (2.1) в виде

$$\det\,[v^2\delta_{pr} - c_{pqrs}\eta_q\eta_s] = 0 \tag{2.3}$$

Здесь $\theta_r = \eta_r\,|\theta|$, $|\eta| = 1$, причем $v = |\theta|^{-1}$ — фазовая скорость распространения плоской волны.

Выражение, стоящее в (2.3) слева, представляет собой характеристический многочлен системы (2.1) шестого порядка относительно θ_q. Его вещественные корни образуют три замкнутые поверхности Σ_l $(l = 1, 2, 3)$ в пространстве θ_1, θ_2, θ_3, являющиеся ветвями алгебраической поверхности шестого порядка, и представляют собой геометрическое место концов векторов длиной v^{-1}, проведенных из начала координат. В виду обратной зависимости длины вектора от скорости данные поверхности называются поверхностями медленностей.

Пронумеруем их так, чтобы $v_1^2(\eta) > v_2^2(\eta) \geqslant v_3^2(\eta)$. В регулярном случае знак равенства отсутствует и отдельные ветви Σ_l (овалы) поверхности Σ не имеют общих точек.

Если все овалы Σ_l выпуклые, то волновые поверхности также выпуклые. Внутреннему овалу Σ_1 соответствует внешний овал волновой поверхности. Поскольку Σ_1 всегда выпуклый, внешний волновой фронт тоже всегда выпуклый. Остальные волновые фронты могут иметь сложный вид и содержать остроугольные кромки. Внутри области, ограниченной внешним волновым фронтом, при этом наблюдаются области, где фундаментальное решение тождественно обращается в нуль,— это так называемые лакуны. В случае пространства ($n = 3$) одной из лакун является область, ограниченная внутренним волновым фронтом. В части пространства, находящейся перед внешним волновым фронтом, фундаментальное решение также равно тождественно нулю и в этом смысле также является лакуной.

И. Г. Петровский [3] установил необходимые и достаточные условия существования лакун. Эти условия зависят от топологических свойств сечения поверхности $P(1, \theta_1, \ldots, \theta_n) = 0$, отвечающей линейному гиперболическому уравнению

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u(x) = 0$$

плоскостью $\theta \cdot x + t = 0$. Проверка этих условий, сформулированных в терминах гомологичности нулю определенных циклов на поверхности $P(1, \theta_1, \ldots, \theta_n)$, представляет собой для системы (2.1) при $n = 3$ самостоятельную сложную задачу. Задача сильно упрощается при $n = 2$, а также при $n = 3$ в частном случае, когда все поверхности Σ_l выпуклые. Для выпуклых Σ_l при $n = 3$ лакунами являются только область, ограниченная внутренним фронтом волны, и область перед внешним фронтом, а области между фронтами не могут быть лакунами [4].

3. Будем интересоваться решениями вида

$$u_p = u_{p0}(x) \exp(-i\alpha t) \tag{3.1}$$

Для стационарной части смещений u_{p0} получаем из (1.1) эллиптическую систему уравнений

$$c_{pqrs} \frac{\partial^2 u_{r0}}{\partial x_q \partial x_s} + \alpha^2 u_{p0} = 0 \tag{3.2}$$

В дальнейшем будем рассматривать только стационарную часть решений, причем нулевой индекс будем опускать.

Рассмотрим систему вида (3.2) с правой частью $f_p(x)$, являющейся некоторой финитной функцией координат

$$c_{pqrs} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x_q \partial x_s} + \alpha^2 u_p = f_p \tag{3.3}$$

и будем интересоваться решениями системы (3.3), определенными во всем пространстве R^n, $n = 3$. Правая часть $f_p(x)$ системы (3.3) с физической точки зрения определяет систему распределенных источников колебаний, заданных в конечной части пространства. Естественно, что эта система источников должна единственным образом определять поле смещений во всем пространстве, причем смещения должны стремиться к нулю на бесконечности. В то же время известно, что система уравнений (3.3) типа уравнений Гельмгольца допускает бесконечное множество решений, если ограничиваться только требованием убывания решения на бесконечности. Это связано с наличием бесконечного множества убывающих на бесконечности решений однородной системы (3.2).

Прежде чем определить конкретный вид условия на бесконечности, таких, чтобы удовлетворяющие им решения однородной задачи могли быть только тождественным нулем, необходимо сначала изучить асимптотику на бесконечности фундаментальной матрицы системы (3.2), т. е. решений системы с правой частью в виде дельта-функции координат

$$c_{pqrs}\frac{\partial^2 u_r}{\partial x_q \partial x_s} + \alpha^2 u_p = -\delta_p{}^j \delta(x) \tag{3.4}$$

Применяя к обеим частям (3.4) обобщенное преобразование Фурье, решая полученную систему для трансформант Фурье и применяя затем обратное преобразование Фурье, получаем решение задачи в виде

$$u_p{}^j = (2\pi)^{-3}\int\limits_H W_p{}^j(s)\frac{\exp[i(s\cdot x)]}{P(s)}\,ds \tag{3.5}$$

Здесь H — подходящая лестница Хермандера, представляющая собой разрывное многообразие в пространстве четырех измерений, определяемых вещественными σ_1, σ_2, σ_3 и мнимой составляющей τ_1. Привлечение ее связано с необходимостью выхода в комплексную область хотя бы по одной переменной для существования интеграла [1]. В качестве H берем гиперплоскость, такую, что при фиксированных σ_2, σ_3 $(-\infty < \sigma_2 < \infty, -\infty < \sigma_3 < \infty)$ соответствующее сечение H представляет собой прямую в плоскости $s = \sigma_1 + i\tau_1$, параллельную вещественной оси σ_1.

Функции $U_p{}^j = W_p{}^j(s)\,/\,P(s)$ определяются из решения системы

$$(L - \alpha^2 E)\,U^j = A^j, \quad A^j = (\delta_1{}^j,\ \delta_2{}^j,\ \delta_3{}^j)$$
$$U^j = (U_1{}^j,\ U_2{}^j,\ U_3{}^j), \quad L = \|\sigma_q\sigma_s c_{pqrs}\|$$

Здесь $P(s)$ — характеристический многочлен, $W_p{}^j = \det M^j$, где M^j — матрица, получающаяся при замене p-столбца матрицы $L - \alpha^2 E$ на вектор A^j, E — единичная матрица, $\delta_p{}^j$ — символ Кронекера.

4. Рассмотрим произвольное направление в пространстве x, определяемое единичным вектором $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, и выбираем координаты так, чтобы ось x_1 проходила в направлении вектора ω. Формула (3.5) перепишем тогда в виде

$$u_p{}^j = (2\pi)^{-3}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} d\sigma_2 d\sigma_3\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_p{}^j(\sigma')\frac{\exp(is_1x_1)}{P(\sigma')}\,d\sigma_1\right) \tag{4.1}$$
$$(\sigma' = (s_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad s_1 = \sigma_1 + i\tau_1)$$

Знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль на поверхности S (состоящей из трех отдельных ветвей S_l). Фиксируя σ_2, σ_3 и интегрируя по σ_1, получаем, используя теорию вычетов, следующее выражение:

$$u_p{}^j = \frac{i}{8\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} W_p{}^j(\sigma)\frac{\exp(i\sigma_1 x_1)}{P'_{\sigma 1}(\sigma)}d\sigma_2 d\sigma_3 \tag{4.2}$$

причем σ_1, σ_2, σ_3 связаны уравнением $P(\sigma) = 0$, но $P_{\sigma 1}'(\sigma) \neq 0$ в силу условия 3°, $\sigma 1 \equiv \sigma_1$.

Для оценки асимптотического значения $u_p{}^j$ при $x_1 \to \infty$ используем принцип стационарной фазы [5, 6]. Согласно этому принципу, асимптотически вклад при $x_1 \to \infty$ в значение интеграла вносят только точки на поверхности вещественных нулей характеристического уравнения, в которых нормаль параллельна оси x_1. В окрестности каждой из таких точек S_l можно представить в виде

$$\sigma_1 = \sigma_{1\nu} + {}^1/_2\, k_2(\sigma_2 - \sigma_{2\nu})^2 + {}^1/_2\, k_3(\sigma_3 - \sigma_{3\nu})^{2} + \ldots$$

Здесь k_2 и k_3 — главные кривизны, взятые положительными (отрицательными) в случае, когда поверхность в окрестности точки σ_ν выпуклая (вогнутая). Предполагается, что $k_i \neq 0$. Оси x_2, x_3 выбраны совпадающими с направлениями главных кривизн. Обозначая через $u_{p\nu}{}^j$ вклад точки σ_ν, получаем по принципу стационарной фазы [5]

$$u_{p\nu}^j = \frac{i}{8\pi^2}\frac{W_p{}^j(\sigma_\nu)}{P'_{\sigma 1}(\sigma_\nu)}\exp(i\sigma_{1\nu}x_1)\times$$

$$\times\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\left(i\frac{k_2}{2}\right)(\sigma_2-\sigma_{2\nu})^2x_1 + \left(i\frac{k_3}{2}\right)(\sigma_3-\sigma_{3\nu})^2x_1\right]d\sigma_2 d\sigma_3$$

Используя подстановку $\sigma_i - \sigma_{i\nu} = t\exp[i(\pi/4)\operatorname{sgn} q_i]$, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\left(\frac{k_i}{2}\right)(\sigma_i-\sigma_{i\nu})^2x_1\right]d\sigma_i = 2C_i\int\limits_0^{\infty}\exp(-q_i^2t^2)\,dt = C_i\frac{\sqrt{\pi}}{|q_i|}$$

$$C_i = \exp(i(\pi/4)\operatorname{sgn} q_i),\quad q_i = k_i x_1,\quad x_1 > 0,\quad i = 2,3$$

Окончательно получаем

$$u_{p\nu}^j = \frac{i}{4\pi x_1}\frac{W_p{}^j(\sigma_\nu)\exp(i\sigma_{1\nu}x_1)}{\sqrt{|k_2k_3|}\,P'_{\sigma 1}(\sigma_\nu)}\exp\left[i\left(\frac{\pi}{4}\right)(\operatorname{sgn}k_2 + \operatorname{sgn}k_3)\right]$$

Для того чтобы получить асимптотическое выражение в направлении единичного вектора ω, в исходной системе координат достаточно заменить x_1 на r, производную по σ_1 — производной от $P(\sigma)$ по направлению ω, $\sigma_{1\nu}x_1$ — на скалярное произведение $\sigma_\nu\cdot x$ векторов $(\sigma_{1\nu}, \sigma_{2\nu}, \sigma_{3\nu})$ и (x_1, x_2, x_3), произведение k_2k_3 — на гауссову кривизну k. Учитывая, что в точке, в которой берется производная от $P(\sigma)$, нормаль параллельна ω, получаем

$$u_p{}^j = \sum_\nu \frac{1}{4\pi r}\frac{KW_p{}^j(\sigma_\nu)\exp[ir(\sigma_\nu\cdot\omega)]}{|\operatorname{grad}P(\sigma_\nu)|\sqrt{|k|}} + O(r^{-2}) \tag{4.3}$$

Суммирование производится по всем точкам σ_ν поверхностей S_l, где нормаль параллельна вектору ω. Предполагается, что гауссова кривизна

$k \neq 0$ во всех этих точках, $K = \pm i$ для $k < 0$ и grad $P(\sigma)$ берется в направлении $\pm\omega$, $K = \pm 1$ при $k > 0$ (поверхность выпуклая) по отношению к $\pm$grad P. (Поверхности S_l — это поверхности вещественных нулей в пространстве волновых чисел σ_l (векторов σ). Поверхности Σ_l, рассмотренные выше, также поверхности вещественных нулей характеристического многочлена, но в пространстве величин, обратных к скоростям — θ_l).

Выражение $\sigma_\nu \cdot \omega$ — проекция волнового вектора ($\sigma_{1\nu}$, $\sigma_{2\nu}$, $\sigma_{3\nu}$), проведенного из начала координат в точку на поверхности S, где нормаль параллельна единичному вектору ω, на направление вектора ω. В упругой анизотропной среде волновой вектор — однородная функция первой степени от частоты α, следовательно, можно записать

(4.4) $$(\sigma_\nu \cdot \omega) = \alpha c_\nu(\omega).$$

Здесь $c_\nu(\omega)$ — величина, обратная к лучевой скорости, которая определяется как скорость, с которой возмущение, возникшее в момент $t = 0$ в точке $x = 0$ (например, от сосредоточенного импульсного источника), достигает точки (x_1, x_2, x_3). Другими словами, геометрическое место точек, до которых в момент $t = 1$ доходят возмущения от сосредоточенного импульсного источника, —волновые поверхности. В дальнейшем будем обозначать

(4.5) $$k_\nu(\omega) = \alpha c_\nu(\omega)$$

Подставляя (4.5) в (4.3) и учитывая множитель exp $(-i\alpha t)$, имеем при $r \to \infty$

(4.6) $$u_p^j = r^{-1} \sum_\nu T_\nu^{pj}(\omega) \exp\{ik_\nu(\omega)[r - w_\nu(\omega)t]\} + O(r^{-2})$$

где $w_\nu = c_\nu^{-1}$ — лучевая скорость в направлении вектора ω.

Получаем, что на бесконечности фундаментальное решение вырождается в бегущие расходящиеся волны, причем кривые равной фазы совпадают с фронтами волн, распространяющимися от сосредоточенного импульсного источника. Точка с данной фазой движется в направлении вектора ω с лучевой скоростью. В случае строго выпуклых поверхностей вещественных нулей характеристического многочлена полученное асимптотическое разложение справедливо при любом ω. Полная кривизна в любой точке положительна. В общем случае поверхности вещественных нулей в зависимости от ω могут быть выпуклыми или вогнутыми, так, что на данных поверхностях наблюдаются точки (или целые кривые), где кривизна обращается в нуль. Направления нормалей в данных точках определяют в физическом пространстве направления лучей, которые проходят через угловые точки (точки возврата) на фронтах (волновых поверхностях.) Приведенные выше рассуждения справедливы только для лучей, не проходящих через угловые точки лакун.

Рассмотрим случай, когда одна из главных кривизн равна нулю. Этот случай охватывает, в частности, все трансверсально-изотропные среды, когда S_l — поверхности вращения. Направляя x_1 по нормали к поверхности, а оси x_2, x_3 — так, что $k \neq 0$, $k_3 = 0$, имеем

(4.7) $$\sigma_1 = \sigma_{1c} + (k/2)(\sigma_2 - \sigma_{2c})^2 + \lambda_3(\sigma_3 - \sigma_{3c})^3 + \ldots$$

Асимптотическое разложение при $x_1 \to \infty$ в данном направлении имеет вид [5]

$$u_{pc}^j = Q_p^j(\sigma_c)\sqrt{\frac{2\pi}{x_1|k_2|}}\,\frac{\sqrt{3}}{3!\,(x_1\lambda_3)^{1/3}}\exp\left(i\sigma_{1c}x_1 + \left(\frac{\pi i}{4}\right)\operatorname{sgn} k_2\right)$$

и, следовательно, амплитуда волны убывает как $r^{-5/6}$ в направлении края остроугольной кромки на волновой поверхности. Для исследования асимптотики в окрестности данных направлений в (4.7) следует сохранить слагаемое $(k_3 / 2)(\sigma_3 - \sigma_{3c})^2$.

5. Выражение (4.4) с учетом (4.5) записываем в виде

$$i(\sigma_\nu \cdot \omega) - ik_\nu(\omega) = 0 \tag{5.1}$$

Точка $\sigma_\nu = (\sigma_{1\nu}, \sigma_{2\nu}, \sigma_{3\nu})$ — точка на S_l, в которой нормаль параллельна вектору ω и направлена в ту же сторону, т. е. точка $\sigma_+^l(\omega)$. Обозначая левую часть (5.1) через $Q_l(\omega, \sigma)$, будем иметь

$$Q[\omega, \sigma_+^l(\omega)] = 0,\ Q[\omega, \sigma_-^l(\omega)] \neq 0,\ l = 1, 2, 3$$

если в качестве многочлена $Q(\omega, \sigma)$, рассмотренного выше, взять

$$Q(\omega, \sigma) \equiv \prod_{l=1}^{3}[i(\sigma\cdot\omega) - ik_l(\omega)] \equiv \prod_{l=1}^{3} Q_l(\omega, \sigma)$$

Заменяя вектор σ дифференциальным вектором D, получаем

$$Q_l(\omega, D) = \frac{\partial}{\partial r} - ik_l(\omega)$$

$$D = i^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right), \quad \frac{\partial}{\partial r} = -iD\cdot\omega$$

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать теорему единственности для случая, когда поверхности вещественных нулей S_l характеристического многочлена $P(\sigma)$ строго выпуклые.

Теорема 1. Пусть функции u_p, дважды непрерывно дифференцируемые, удовлетворяют системе уравнений

$$c_{pqrs}\frac{\partial^2 u_r}{\partial x_q \partial x_s} + \alpha^2 u_p = 0 \tag{5.2}$$

во всем пространстве $x \in R^n (n = 3)$ и представимы в виде

$$u_p = \sum_{j=1}^{3} u_{pj}$$

$$u_{pj} = O(r^{-1}), \quad \frac{\partial u_{pj}}{\partial r} - ik_j(\omega)u_{pj} = o(r^{-1}), \quad r \to \infty \tag{5.3}$$

Тогда функции u_p тождественно равны нулю.

Изотропные среды можно рассматривать как частный случай сред кубической симметрии при условии, что упругие постоянные связаны соотношением $a_{11} - a_{12} = 2a_{44}$. При этом поверхности S_l становятся сферическими. Две поверхности совпадают и получаем

$$k_2(\omega) = k_3(\omega) = \alpha\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}, \quad k_1(\omega) = \alpha\sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}$$

где λ, μ — коэффициенты Ламе. Условия (5.3) переходят в условия Зоммерфельда.

Как и в случае условий Зоммерфельда, объединяя запись условий на бесконечности для плоского ($n = 2$) [7] и пространственного ($n = 3$) случаев, имеем

$$|u_{pl}| < Cr^{(1-n)/2}, \quad \left|\frac{\partial u_{pl}}{\partial r} - ik_l(\omega) u_{pl}\right| < Cr^{-(1+n)/2} \tag{5.4}$$

В плоском случае $p = 1, 2,\ l = p, s$ [7] и в пространственном случае $p = 1, 2, 3,\ l = 1, 2, 3$. Аналогичные условия, но для сходящихся волн отличаются от (5.4) только знаком перед множителем $ik_l(\omega)$.

В случае трансверсально-изотропных сред допустимы осесимметричные колебания, при этом условия на бесконечности, соответствующие расходящимся волнам, записываются в виде (5.4) при $n = 3$, где, как и в плоском случае, $p = 1, 2,\ l = p, s$, причем функции $k_l(\omega) = k_l(\varphi)$ не отличаются от приведенных в [7] для плоского случая (φ — угол, отсчитываемый от оси симметрии).

6. Результаты п. 5 относятся к случаю строго выпуклых поверхностей S_l. Приведенное выше исследование случая, когда только одна из главных кривизн обращается в нуль, уже показывает на сильное отличие поведения фундаментального решения на бесконечности в направлениях, совпадающих с направлениями нормалей в точках перегиба поверхностей S_l. Будем, следуя [2], называть единичный вектор ω неособым, если во всех точках поверхностей S_l, в которых нормаль параллельна ω, полная кривизна не равна нулю. Пусть коэффициенты многочлена $Q(\omega, \sigma)$ определены только для неособых векторов ω, причем для неособых векторов ω многочлен $Q(\omega, \sigma)$ по-прежнему обращается в нуль в точках S_l, в которых нормаль к S_l не только параллельна, но и совпадает с ω по направлению и $Q(\omega, \sigma)$ не равен нулю в точках, в которых направление нормали противоположно ω. Неособые векторы образуют открытое множество на единичной сфере. В общем случае, когда поверхности S_l удовлетворяют только первым трем условиям, приведенным в п. 1, не представляется возможным решить задачу изучения асимптотического поведения фундаментальных решений до конца, однако теорему единственности вполне можно сформулировать, используя некоторые интегральные соотношения, которым должно удовлетворять решение неоднородной задачи.

Используя результаты работы [2], можно показать, что справедлива следующая

Теорема 2. Если выполнены условия 1° — 3°, то для любых финитных функций $f_p^r(x)$ система (3.3) имеет, и притом единственное, решение, локально принадлежащее L_2 и удовлетворяющее условиям

$$\varlimsup_{R\to\infty} R^{-1} \int\limits_{R\leqslant x\leqslant 2R} |u_p(x)|^2 dx < \infty$$

$$\lim_{R\to\infty} R^{-1} \int\limits_{\substack{R\leqslant x\leqslant 2R \\ x\in K}} |Q(\omega, D) u_p(x)|^2 dx = 0$$

для любого неособого конуса K с вершиной в начале координат, т. е. конуса, пересечение которого с единичной сферой состоит из неособых векторов.

Здесь нужно взять

$$Q(\omega, D) = \prod_{l=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik_l(\omega)\right)$$

причем величина N зависит от ω. Для конусов, образуемых лучами, не пересекающими лакун, $N = 3$. Для конусов, составленных из лучей, пересекающих лакуны, число N увеличивается на число границ лакун, пересекаемых данными лучами (т. е. на дополнительное число точек на S_l, в которых направления нормалей совпадают с ω).

Поступила 25 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вайнберг Б. Р.* Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными. Успехи матем. наук, 1966, т. 21, вып. 3(129).
2. *Грушин В. В.* Об условиях типа Зоммерфельда для некоторого класса дифференциальных уравнений в частных производных. Матем. сб., 1963, т. 61, вып. 2 (110).
3. *Petrowsky I.* On the diffusion of waves and the laqunas for hyperbolic equations. Матем. сб., 1945, т. 17, № 3.
4. *Боровиков В. А.* Обобщение формул Герлотца — Петровского и диффузия волн. Докл. АН СССР, 1956, т. 106, № 4.
5. *Lighthill M. J.* Studies on Magneto-hydrodynamic wave and other anisotropic wave motions. Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A, 1960, vol. 252, No. 1014.
6. *Jeffreys H.* Asymptotic approximations. Oxford, Clarendon Press, 1962.
7. *Будаев В. С.* Единственность решения внешних задач теории упругих колебаний анизотропных сред. ПММ, 1978, т. 42, вып. 2.