

## О КОЛЕБАНИЯХ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ С ЖИДКОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ГАСИТЕЛЯ

В. А. Бужинский

(Москва)

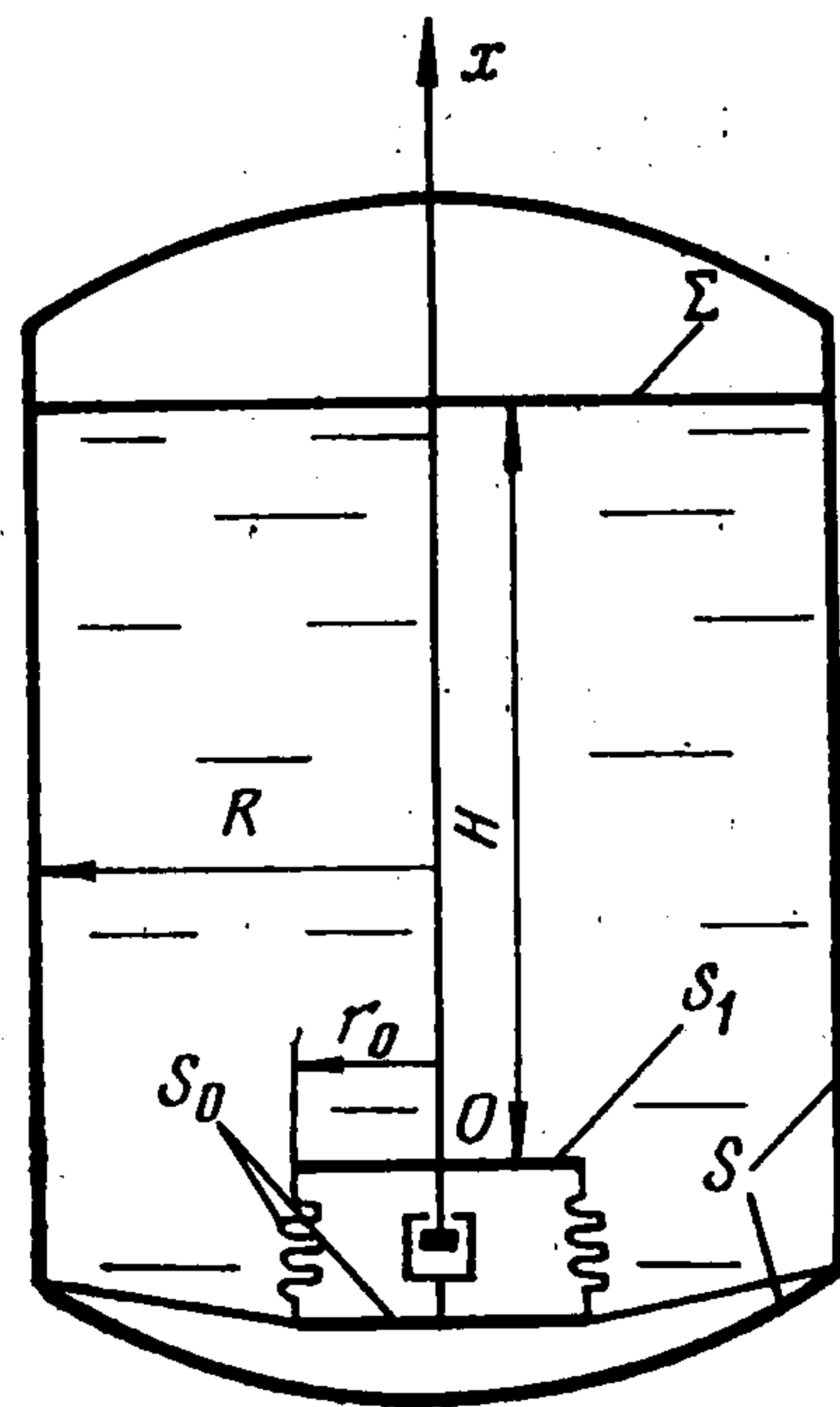
Предлагается модель гидродинамического гасителя колебаний. С использованием этой модели получены уравнения продольных колебаний конструкции, включающей оболочку, частично заполненную жидкостью, при наличии в ней гидродинамического гасителя. Показано, что применение гасителя позволяет на определенных частотах значительно повысить демпфирование колебаний конструкции.

В современной технике встречаются разнообразные задачи, связанные с ограничением амплитуд осесимметричных колебаний оболочек и продольных колебаний конструкций, составленных из оболочек, частично заполненных жидкостью. Для решения этих задач предлагались различные устройства [1]. Общий элемент таких устройств — заполненная газом упругая оболочка, которая устанавливается в жидкости. Собственная частота колебаний этой оболочки в жидкости настраивается на нужную величину. Действие такого устройства аналогично действию динамического гасителя колебаний в механических системах [2]. В качестве массы динамического гасителя служит часть массы жидкости в оболочке. Поэтому такие устройства будем называть гидродинамическими гасителями колебаний.

**1. Постановка задачи.** Введем в рассмотрение модель гидродинамического гасителя, в которой оболочка образована сильфоном с жесткими крышками по торцам (фиг. 1). Нижняя крышка посредством достаточно жестких стержней соединяется с опорным шпангоутом, верхняя подвижна. Внутри образованной газовой полости поместим демпфер с вязким трением.

Исследуем влияние гидродинамического гасителя на осесимметричные колебания оболочки, частично заполненной жидкостью, и на совместные продольные колебания корпуса конструкции и осесимметричные продольно-поперечные колебания оболочки с жидкостью. Решение последней задачи проведем применительно к осесимметричной упругой конструкции, включающей в себя как часть оболочку, частично заполненную жидкостью, с установленным в ней гидродинамическим гасителем. В качестве расчетной схемы воспользуемся схемой упругого стержня с присоединенными осцилляторами [3].

Введем следующие допущения. Жидкость идеальная, несжимаемая; волнообразованием на свободной поверхности, а также изменением гидро-



Фиг. 1

статического давления вследствие деформации оболочки можно пренебречь. Невозмущенная свободная поверхность жидкости перпендикулярна продольной оси  $Ox$ , направление которой противоположно вектору поля массовых сил. Опорный шпангоут оболочки абсолютно жесткий.

2. Уравнения колебаний оболочки с гидродинамическим гасителем. Смещение шпангоута оболочки по оси  $Ox$  обозначим  $u(t)$ , отклонение верхней крышки сильфона от положения равновесия  $\zeta(t)$ .

Уравнения свободных колебаний оболочки при  $\zeta = 0$  имеют вид [3]

$$(2.1) \quad (m_0 + m)u'' + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n0} u_n'' = 0$$

$$\mu_{n0} (u_n'' + \omega_{n0}^2 u_n) + \lambda_{n0} u'' = 0 \quad (n = 1, \dots, \infty)$$

где  $m_0$  и  $m$  — масса оболочки и жидкости соответственно,  $\lambda_{n0}$ ,  $\mu_{n0}$  — присоединенные массы жидкости,  $\omega_{n0}$  — парциальные частоты осесимметричных колебаний оболочки с жидкостью,  $n$  — номер тона колебаний. За обобщенные координаты  $u_n$  можно, например, принять воображаемые смещения плоской свободной поверхности жидкости при  $n$ -й форме колебаний оболочки, с жестко заземленным опорным шпангоутом.

Поставим в соответствие уравнениям (2.1) некоторую функцию Лагранжа  $L_0 = T_0 - \Pi_0$ . Функцию Лагранжа оболочки с гидродинамическим гасителем представим в виде  $L = L_0 + L_1$  и найдем  $L_1$ .

Введем потенциал смещений жидкости

$$(2.2) \quad \chi = \chi_0 + \zeta V, \quad \chi_0 = ux + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \Phi_n$$

Функции  $\Phi_n$  и  $V$  — гармонические и удовлетворяют граничным условиям

$$\Phi_n = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \partial \Phi_n / \partial \nu = w_n \text{ на } S, \quad \partial \Phi_n / \partial \nu = 0 \text{ на } S_0 + S_1$$

$$V = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \partial V / \partial \nu = 1 \text{ на } S_1, \quad \partial V / \partial \nu = 0 \text{ на } S + S_0$$

где  $S$  и  $\Sigma$  — поверхность оболочки и свободная поверхность жидкости,  $S_1$  и  $S_0$  — поверхность верхней крышки сильфона и неподвижная поверхность гасителя,  $\nu$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности, ограничивающей объем  $\tau$ , занятый жидкостью,  $w_n$  — парциальные формы колебаний оболочки, частично заполненной жидкостью.

Составим выражения кинетической и потенциальной энергий рассматриваемой механической системы

$$T = T_0 + \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} \left( \nabla \frac{\partial \chi}{\partial t} \right)^2 d\tau - \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} \left( \nabla \frac{\partial \chi_0}{\partial t} \right)^2 d\tau, \quad \Pi = \Pi_0 + \frac{1}{2} c \zeta^2$$

Здесь  $\rho$  и  $c$  — плотность жидкости и жесткость гасителя. Учитывая (2.2), найдем

$$(2.3) \quad L_1 = \frac{1}{2} b \zeta^2 + \varepsilon_0 u \dot{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{n0} \zeta \dot{u}_n - \frac{1}{2} c \zeta^2$$

$$b = \rho \int_{\tau} (\nabla V)^2 d\tau, \quad \varepsilon_0 = \rho \int_{\tau} \nabla x \nabla V d\tau, \quad \varepsilon_{n0} = \rho \int_{\tau} \nabla V \nabla \Phi_n d\tau$$

Отметим, что [3]

$$\mu_{n0} = \rho \int_{\tau} (\nabla \Phi_n)^2 d\tau, \quad \lambda_{n0} = \rho \int_{\tau} \nabla x \nabla \Phi_n d\tau$$

Принимая во внимание (2.1), запишем уравнения Лагранжа

$$(2.4) \quad (m_0 + m) u'' + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n0} u_n'' + \varepsilon_0 \zeta'' = 0$$

$$\mu_{n0} (u_n'' + \omega_{n0}^2 u_n) + \lambda_{n0} u'' + \varepsilon_{n0} \zeta'' = 0 \quad (n = 1, \dots, \infty)$$

$$b (\zeta'' + \omega_{\zeta}^2 \zeta) + \varepsilon_0 u'' + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{n0} u_n'' = 0, \quad \omega_{\zeta}^2 = \frac{c}{b}$$

Собственной массой гасителя пренебрегаем.

При  $\omega_{\zeta} \ll \omega_{10}$ , полагая в (2.4)  $u_n = 0$ , приходим к уравнениям колебаний жесткой оболочки с гидродинамическим гасителем. Эти уравнения позволяют ввести простой механический аналог, включающий основную массу  $M = m_0 + m - m_1$  и дополнительную массу  $m_1 = \varepsilon_0^2/b$ , соединенную с  $M$  пружиной жесткости  $c_1 = c\varepsilon_0^2/b^2$ . Как будет показано ниже, эффективность гасителя зависит от величины  $m_1$ .

Дадим оценку  $m_1$  для цилиндрической оболочки с пологим днищем. Введем цилиндрическую систему координат  $Ox r \theta$  с началом в центре верхней крышки сиффона. Краевую задачу для потенциала  $V$  сформулируем приближенно в виде

$$(2.5) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad \text{в } \tau$$

$$\partial V / \partial r = 0, \quad r = R; \quad V = 0, \quad x = H$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \begin{cases} 1, & x = 0, \quad 0 \leq r \leq r_0 \\ 0, & x = 0, \quad r_0 < r \leq R \end{cases}$$

Здесь  $H$  — высота столба жидкости над сиффоном,  $R$  и  $r_0$  — радиус оболочки и сиффона соответственно.

Применяя к задаче (2.5) метод Фурье разделения переменных, получим

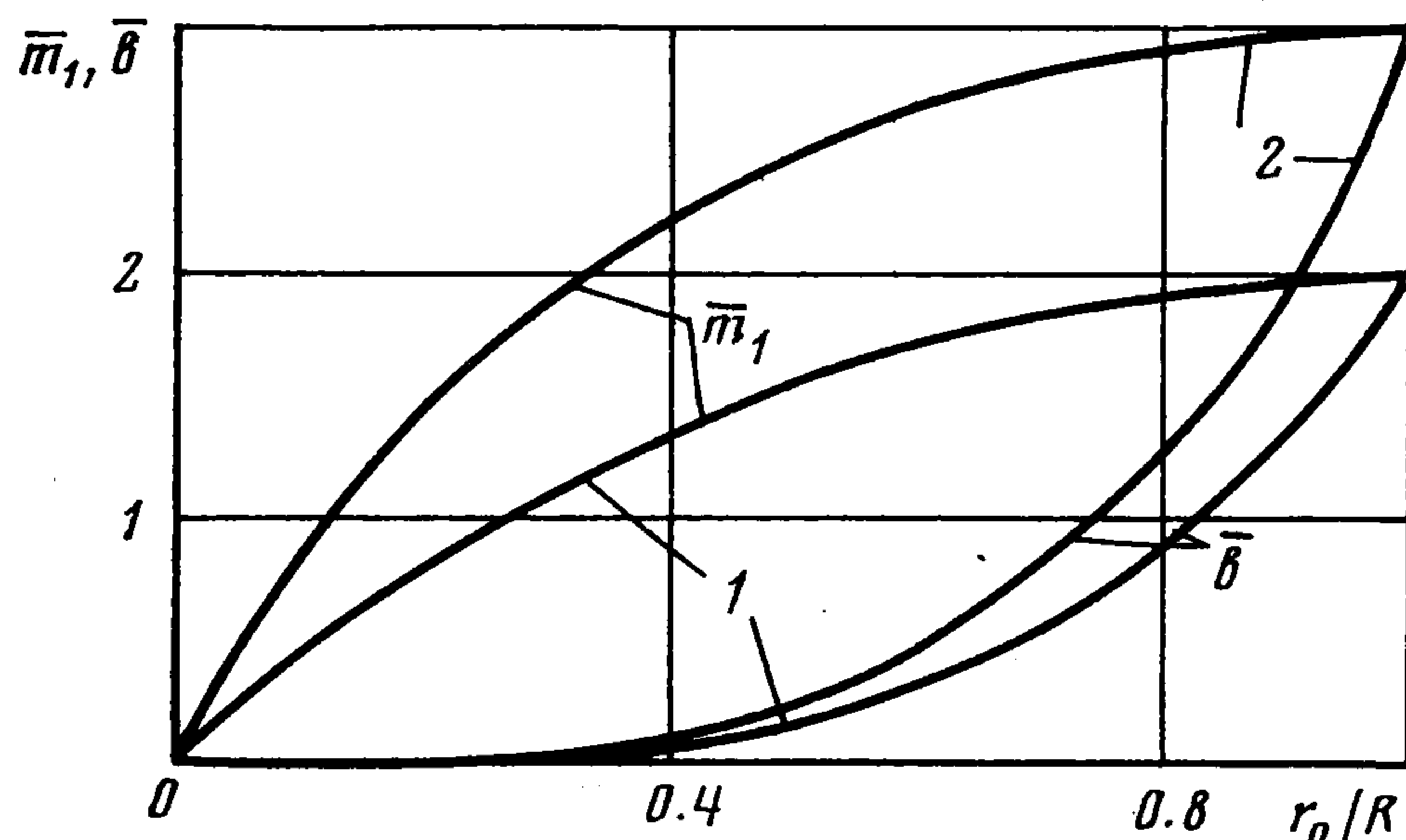
$$V(x, r) = \frac{(x-H)r_0^2}{R^2} + 2R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0 J_1(\xi_n r_0/R)}{R \xi_n^2 J_0^2(\xi_n)} \frac{\text{sh}[\xi_n(x-H)/R]}{\text{ch}(\xi_n H/R)} J_0\left(\frac{\xi_n r}{R}\right)$$

где  $J_0, J_1$  — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка,  $\xi_n$  — корни уравнения  $J_1(\xi) = 0$ . Применяя к (2.3) формулу Грина и учитывая граничные условия (2.5), находим

$$b = \pi \rho \frac{r_0^4 H}{R^2} + 4\pi \rho R^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{th}(\xi_n H/R)}{\xi_n^2} \frac{r_0^2 J_1^2(\xi_n r_0/R)}{R^2 J_0^2(\xi_n)}$$

$$\varepsilon_0 = \pi \rho r_0^2 H$$

На фиг. 2 приведены результаты расчетов. Кривые 1 и 2 показывают зависимость безразмерных присоединенных масс  $\bar{m}_1 (r_0 / R) = m_1 / (\pi r R^3)$  и  $\bar{b} (r_0 / R) = b / (\pi r R^3)$  при  $H / R = 2$  и  $H / R = 3$  соответственно. Как видно, масса  $m_1$  составляет значительную часть всей массы жидкости в оболочке при относительно небольших размерах гидродинамического гасителя, что обусловлено малой величиной присоединенной



Фиг. 2

массы  $b$ . Отмеченный факт имеет большое значение для применения гидродинамического гасителя.

3. Уравнения продольных колебаний конструкции с гидродинамическим гасителем. Длину конструкции обозначим через  $l$ , через  $\mu(x)$  — погонную массу без учета жидкости, через  $EF(x)$  — жесткость на сжатие (растяжение). Примем, что опорный шпангоут нижнего днища оболочки расположен в сечении конструкции  $x = x_1$ . Собственные формы  $\eta_j$  и частоты  $\sigma_j$  совместных продольных колебаний свободной конструкции как стержня и осесимметричных продольно-поперечных колебаний оболочки с жидкостью при  $\zeta = 0$  определяются в результате решения задачи [3]

$$\frac{d}{dx} \left( EF \frac{d\eta}{dx} \right) + \sigma^2 \left[ \mu \eta + \sum_{n=1}^{\infty} \delta(x - x_1) \frac{m_{n0} \omega_{n0}^2}{\omega_{n0}^2 - \sigma^2} \eta \right] = 0, \quad m_{n0} = \frac{\lambda_{n0}^2}{\mu_{n0}}$$

$$\eta'(0) = \eta'(l) = 0$$

где  $m_{n0}$  — массы эквивалентных оболочке с жидкостью осцилляторов,  $\delta(x - x_1)$  — функция Хевисайда. Условия ортогональности собственных форм колебаний имеют вид

$$(3.1) \quad \int_0^l \mu \eta_i \eta_j dx + m \eta_i(x_1) \eta_j(x_1) + \eta_i(x_1) \sum_{n=1}^{\infty} m_{n0} g_{nj}^{\circ} +$$

$$+ \eta_j(x_1) \sum_{n=1}^{\infty} m_{n0} g_{ni}^{\circ} + \sum_{n=1}^{\infty} m_{n0} g_{ni}^{\circ} g_{nj}^{\circ} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$(3.2) \quad g_{nj}^{\circ} = g_{nj} - \eta_j(x_1), \quad g_{nj} = \frac{\omega_{n0}^2}{\omega_{n0}^2 - \sigma_j^2} \eta_j(x_1)$$

Разложим продольные смещения корпуса конструкции в ряд

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) \eta_j$$

и примем коэффициенты  $q_j$  за обобщенные координаты системы конструкция — гидродинамический гаситель.

Потенциал смещений жидкости в оболочке с гасителем можно представить в виде

$$(3.3) \quad \chi = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \eta_j(x_1) x + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \Phi_n + \zeta V$$

При заданном движении опорного шпангоута оболочки из уравнений (2.4), полагая  $\zeta = 0$  и учитывая соотношения (3.2), находим

$$(3.4) \quad u_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n0}}{\mu_{n0}} g_{nj}^{\circ} q_j$$

Подставляя (3.4) в (3.3), получим

$$(3.5) \quad \chi = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \left[ \eta_j(x_1) x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n0}}{\mu_{n0}} g_{nj}^{\circ} \Phi_n \right] + \zeta V$$

Составим выражение кинетической энергии конструкции с гидродинамическим гасителем

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \left[ \sum_{j=1}^{\infty} q_j \eta_j \right]^2 dx + \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} \left( \nabla \frac{\partial \chi}{\partial t} \right)^2 d\tau$$

Подставляя в это выражение потенциал смещений (3.5) и используя условия ортогональности (3.1), находим

$$(3.6) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j q_j'^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j q_j' + \frac{1}{2} b \zeta'^2$$

$$a_j = \int_0^l \mu \eta_j^2 dx + \sum_{n=1}^{\infty} m_{n0} q_{nj}^2, \quad \varepsilon_j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n0} \varepsilon_{n0}}{\mu_{n0}} g_{nj}$$

Выражение потенциальной энергии конструкции, если воспользоваться условиями ортогональности (3.1), может быть приведено к виду

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sigma_j^2 q_j^2 + \frac{1}{2} b \omega_{\zeta}^2 \zeta^2$$

Теперь запишем уравнения Лагранжа

$$a_j (q_j'' + \sigma_j^2 q_j) + \varepsilon_j \zeta'' = Q_j \quad (j = 1, \dots, \infty)$$

$$b (\zeta'' + \omega_{\zeta}^2 \zeta) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j q_j'' = 0$$

где обобщенные силы  $Q_j$  определяются обычным образом.

Полученная форма уравнений движения представляется наиболее удобной для исследования влияния гидродинамического гасителя на динамические свойства конструкции. Обобщение на случай конструкции с произвольным числом оболочек, а также гидродинамических гасителей трудности не представляет.

4. Анализ эффективности гидродинамического гасителя колебаний. Рассматривая первую из сформулированных выше задач, отметим, что наиболее важно уменьшить амплитуды колебаний оболочки по первому тону, так как ему отвечает основная часть колеблющейся массы жидкости. Настройку гасителя поэтому следует осуществлять на этот тон колебаний.

Учтем диссипацию энергии в гасителе. Рассеянием энергии в оболочке и жидкости, а также влиянием высших тонов пренебрегаем. Из (2.4) получим уравнения колебаний оболочки при движении опорного шпангоута по закону  $u(t) = u_0 e^{i\omega t}$

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \mu_{10} (u_1'' + \omega_{10}^2 u_1) + \varepsilon_{10} \zeta'' &= -\lambda_{10} u'' \\ b (\zeta'' + g\omega \zeta' + \omega_\zeta^2 \zeta) + \varepsilon_{10} \mu_{10}'' &= -\varepsilon_0 u'' \end{aligned}$$

где  $g$  — относительный коэффициент демпфирования гасителя.

Используя свойства инвариантных точек резонансных кривых [2], получим для системы (4.1) условие наилучшей настройки гасителя по ускорению

$$\frac{\omega_\zeta^2}{\omega_{10}^2} = 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{10}}{b \lambda_{10}}$$

Если при этом еще подобрать оптимальное демпфирование в гасителе, то для наибольших амплитуд резонансной кривой оболочки по ускорению имеем

$$u_{1*}'' = \frac{\lambda_{10}}{\mu_{10}} \frac{2 - \alpha - \sqrt{(2 - \alpha)\kappa}}{\sqrt{(2 - \alpha)\kappa} - \kappa} |u''|, \quad \kappa = \frac{\varepsilon_{10}^2}{b \mu_{10}}$$

Такая резонансная амплитуда ускорений при отсутствии гидродинамического гасителя получается, когда относительный коэффициент демпфирования колебаний оболочки с жидкостью по первому тону

$$(4.2) \quad g_{10} = \frac{\sqrt{(2 - \alpha)\kappa} - \kappa}{2 - \alpha - \sqrt{(2 - \alpha)\kappa}}$$

Можно показать, что для цилиндрических оболочек с пологими днищами  $\alpha \approx \kappa \approx m_1 / m$ . Очевидно, что легко, например, обеспечить  $\alpha \approx \kappa = 0.25$ , для которых получаем  $g_{10} = 0.39$ . Для сравнения отметим, что относительные коэффициенты демпфирования оболочек с жидкостью, как правило, значительно меньше 0.01 [3]. Таким образом, применение гидродинамического гасителя с оптимальными параметрами позволяет увеличить демпфирование оболочки по первому тону колебаний в десятки раз.

Рассмотрим вторую задачу. Пусть гаситель настроен на частоту  $j$ -го тона продольных колебаний конструкции. Соответствующие этому случаю уравнения колебаний запишем в виде

$$a_j (q_j'' + \sigma_j^2 q_j) + \varepsilon_j \zeta'' = Q_j, \quad b (\zeta'' + g\omega \zeta' + \omega_\zeta^2 \zeta) + \varepsilon_j q_j'' = 0$$

Ради простоты исследования демпфирование в конструкции не учитываем.

Условие наилучшей настройки гасителя и выражение для наименьших резонансных амплитуд ускорений конструкции, возможных при оптимальном демпфировании в гасителе, имеют вид

$$\frac{\omega_\zeta}{\sigma_j} = 1, \quad q_{j*}'' = \frac{Q_j}{a_j} \frac{2 - \sqrt{2\kappa_j}}{\sqrt{2\kappa_j} - \kappa_j}, \quad \kappa_j = \frac{\varepsilon_j^2}{b a_j}$$

Эффективность гидродинамического гасителя определяется величиной параметра  $\kappa_j$ . Для цилиндрических оболочек с пологими днищами имеем [3]

$$(4.3) \quad m_{10} \approx m, \quad m_{n0} / m \ll 1 \quad (n = 2, \dots, \infty)$$

Если выполняется (4.3), то

$$\frac{\lambda_{10} \varepsilon_{10}}{\mu_{10}} \approx \varepsilon_0, \quad \frac{\lambda_{n0} \varepsilon_{n0}}{\varepsilon_0 \mu_{n0}} \ll 1 \quad (n = 2, \dots, \infty)$$

Отсюда, принимая во внимание (3.2), (3.6), заключаем, что гидродинамический гаситель желательно устанавливать в оболочке, парциальная частота низшего тона которой  $\omega_{10}$  близка к частоте продольных колебаний конструкции  $\sigma_j$ . В этом случае

$$(4.4) \quad \kappa_j = \frac{\varepsilon_0^2}{b a_j} g_{1j}^2 = \frac{m_1}{a_j} \frac{\omega_{10}^4 \eta_j^2(x_1)}{(\omega_{10}^2 - \sigma_j^2)^2}$$

Как видно из (4.4),  $\kappa_j$  может принимать относительно большие значения. Например, для конструкции, состоящей из шести оболочек, заполненных жидкостью, можно обеспечить  $m_1 \eta_j^2(x_1) / a_j = 0.02$  и, если даже  $\omega_{10}^2 = 2\sigma_j^2$ , то  $\kappa_j = 0.08$ .

Аналогично (4.2) можно ввести эквивалентный эффекту гасителя относительный коэффициент демпфирования конструкции при колебаниях по  $j$ -му тону

$$g_j = \frac{\sqrt{2\kappa_j} - \kappa_j}{2 - \sqrt{2\kappa_j}}$$

При  $\kappa_j = 0.08$  имеем  $g_j = 0.2$ . Для тонкостенных конструкций, содержащих большие массы жидкости, значения относительных коэффициентов демпфирования находятся, как правило, в диапазоне  $0.01 \div 0.05$  [3]. Гидродинамический гаситель может быть использован для устранения динамической неустойчивости продольных колебаний таких конструкций.

Автор благодарит Г. Н. Микишева за постановку задачи.

Поступила 29 IX 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Колесников К. С., Самойлов Е. А., Рыбак С. А. Динамика топливных систем ЖРД. М., «Машиностроение», 1975.
2. Ден-Гартог Дж. П. Теория колебаний. М.—Л., Гостехиздат, 1942.
3. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М., «Машиностроение», 1971.