

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ В СВОБОДНОЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЕ

Л. А. Шенявский

(Москва)

Получены точные волновые решения уравнений движения тонкой пластины в одномерном случае модели первого приближения. Рассчитаны зависимости скорости распространения изгибно-продольных волн от частоты для различных значений амплитуды изгибных составляющих.

Нелинейность связи деформаций с перемещениями в теории тонких оболочек может привести к эффектам, не описываемым линейным приближением, даже в тех случаях, когда закон Гука еще применим [1]. Представляет интерес оценка величин смещений, при которых начинают сказываться эффекты, обусловленные геометрической нелинейностью.

1. Введем декартовы координаты x , y и z так, чтобы плоскость $z = 0$ совпадала со срединной поверхностью пластины. Обозначим компоненты перемещения точек срединной поверхности по направлениям x , y и z соответственно u , v и w . Для упрощения расчетов воспользуемся моделью первого приближения теории тонких оболочек и рассмотрим случай одномерного движения, т. е. будем считать u , v и w функциями времени t и координаты x . Из уравнений движения пологих тонких оболочек, приведенных в [2], устремив радиусы кривизны к бесконечности, получим

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho \frac{1 - \sigma^2}{E_n} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{1 - \sigma}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho \frac{1 - \sigma^2}{E_n} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho \frac{1 - \sigma^2}{E_n} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

где E_n , σ , ρ и h — модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность материала пластины и ее толщина соответственно. Если отбросить нелинейные члены в (1.1), то получатся уравнения классической теории пластинок, условия применимости которой обсуждены в работе [3], где проведено сравнение теоретически рассчитанных дисперсионных кривых с экспериментальными данными. Второе уравнение системы (1.1), описывающее поперечную волну, при сделанных предположениях оказывается независимым. Решение для u и w будем искать в виде волн, распространяющихся с одинаковыми скоростями c : $u = u(\xi)$, $w = w(\xi)$, где $\xi = t - x/c$. Обозначив $du/d\xi = X$, $dw/d\xi = Z$ и $c_0^2 = E_n/(\rho(1 - \sigma^2))$, проинтегрируем уравнения для X и Z . Так как стороны пластины физически неразличимы, то систему,

описывающую изгибно-продольные волны, можно представить в виде

$$(1.2) \quad X = \frac{1}{2ac} (C_1 - Z^2) \\ \frac{h^2}{12} \frac{d^2 Z}{d\xi^2} + cXZ + c^2(a+1)Z = 0 \quad \left(a = \frac{c^2}{c_0^2} - 1 \right)$$

Можно убедиться, что при $a = 0$ имеются лишь неволновые решения для изгибной составляющей $Z = \text{const}$, поэтому будем считать, что $a \neq 0$.

2. При учете физической нелинейности уравнение продольных колебаний пластины имеет решение в виде распространяющихся уединенных импульсов (солитонов) [4]. В рассматриваемом случае изгибно-продольных волн для подобного решения при $\xi \rightarrow \infty$ должны выполняться условия: $X \rightarrow 0$, $Z \rightarrow 0$ и $dZ/d\xi \rightarrow 0$. В этом случае в (1.2) $C_1 = 0$ и система имеет следующие решения для изгибной составляющей: $Z = 0$, $Z = Z_0 = 2c\sqrt{a(a+1)}$ и $Z = Z_0 \operatorname{sech}(2\sqrt{3}c^2\xi/(hc_0))$. Эти решения не удовлетворяют условиям на бесконечности. Так как система (1.1) справедлива для пологих оболочек, то ее решения должны иметь конечные производные. Отсюда следует, что в рамках модели первого приближения для изгибно-продольных волн не существует решений в виде уединенных распространяющихся импульсов.

Будем искать периодические волновые решения. Тогда из первого уравнения (1.2) следует, что $C_1 \geq 0$. Исключив X из системы, приведем уравнение относительно Z к виду

$$(2.1) \quad \frac{ah^2}{3} \left(\frac{dZ}{d\xi} \right)^2 = Z^4 - 2AZ^2 + C_2 \quad \left(A = C_1 + 2a \frac{c^4}{c_0^2} \right)$$

Согласно [5], решение уравнения (2.1) выражается через эллиптические функции, конкретный вид которых определяется числом положительных корней трехчлена в правой части (2.1). Так как функции Z и $dZ/d\xi$ должны периодически обращаться в нуль, то из (2.1) следует, что знак C_2 совпадает со знаком a . Таким образом, вид решения уравнения (2.1) определяется знаком a .

В случае $a > 0$ выражение (2.1) удобно представить в виде

$$\frac{ah^2}{3} \left(\frac{dZ}{d\xi} \right)^2 = (\alpha^2 - Z^2)(\beta^2 - Z^2) \quad (\alpha > \beta)$$

Согласно [5,6], имеем

$$(2.2) \quad Z = \beta \operatorname{sn}(\Omega\xi), \quad \Omega = (\alpha/h)/\sqrt{a/3}$$

Здесь sn — эллиптический синус, $k = \alpha/\beta$ — его модуль. Подставив полученное значение Z в (1.2), найдем X . Интегрируя выражение для X , выделим осциллирующую часть, выразив ее через дзета-функцию Якоби zn [6,7]. При этом, чтобы функция u была периодической, необходимо принять

$$(2.3) \quad C_1 = \alpha^2 (1 - E/K)$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. При выполнении равенства (2.3) имеем

$$(2.4) \quad u = \frac{\alpha^2}{2ac\Omega} \operatorname{zn}(\Omega\xi)$$

Воспользовавшись (2.2) и выбрав соответствующим образом постоянную интегрирования, представим w в симметричной относительно $w = 0$ форме

$$(2.5) \quad w = h \sqrt{\frac{a}{3}} \ln \frac{\operatorname{dn} \eta - k \operatorname{cn} \eta}{\sqrt{1-k^2}}, \quad \eta = \Omega \xi$$

$$\left(w_0 = \max w = \frac{1}{2} h \sqrt{\frac{a}{3}} \ln \frac{1+k}{1-k} \right)$$

Здесь cn и dn — функции Якоби: эллиптический косинус и дельта амплитуды. Величина w_0 представляет собой амплитуду изгибной составляющей w .

Периоды эллиптических функций выражаются через полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$, поэтому вместо Ω целесообразно ввести $\nu = \Omega/(4K)$. Учитывая (2.1) и (2.3), а также используя взаимосвязь величин α и β , можно выразить их через модуль k . Таким образом, принимая во внимание (2.2), (2.4) и (2.5), для случая $c > c_0$ волновые решения системы (1.1), описывающие изгибно-продольные колебания, можно представить в виде

$$(2.6) \quad w(\xi) = h \sqrt{\frac{a}{3}} \ln \frac{\operatorname{dn}(4K\nu\xi) - k \operatorname{cn}(4K\nu\xi)}{\sqrt{1-k^2}}, \quad u(\xi) = \frac{2h^2 K \nu}{3c} \operatorname{zn}(4K\nu\xi)$$

$$\nu = \frac{\sqrt{3} c^2}{2hc_0} \frac{1}{\sqrt{K(\mu) E(\mu)}}, \quad \mu = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$$

Для количественной оценки степени нелинейности волны разложим w в ряд Фурье. Воспользовавшись тригонометрическим рядом для функции sn , приведенным в [6], и интегрируя почленно этот ряд, получим

$$w_{0n} = 4h \sqrt{\frac{a}{3}} \frac{q^{n-1/2}}{(2n-1)(1-q^{2n-1})}, \quad q = \exp\left(-\pi \frac{K'}{K}\right)$$

Здесь w_{0n} — n -я гармоника $w(\xi)$, $K' = K(k')$, $k' = \sqrt{1-k^2}$ — дополнительный модуль. Отсюда, в частности, для отношения первой гармоники ко второй имеем

$$\gamma_{12} = w_{01}/w_{02} = 3 [1 + 2 \operatorname{ch}(\pi K'/K)]$$

Справедливы также соотношения

$$\lim_{k \rightarrow 0} \gamma_{12} = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow 1} \gamma_{1n} = (2n-1)^2$$

где γ_{1n} — отношение первой и n -й гармоник. Таким образом, при изменении k от нуля до единицы форма волны составляющей w меняется от гармонической до треугольной.

Для численного анализа соотношений (2.6) удобно ввести безразмерные величины

$$(2.7) \quad V = c/c_0, \quad \zeta_0 = \sqrt{3} w_0/h, \quad \nu_0 = 2h\nu/(\sqrt{3} c_0)$$

На фиг. 1 представлены характерные профили составляющих w и u , а также профиль смещения (штриховая кривая), рассчитанные на ЭЦВМ при $\zeta_0 = 6.5$ и $\nu_0 = 3.7$ ($k = 0.98$). По оси абсцисс отложены значения ξ , выраженные в длинах волн. Для наглядности значения w нанесены в масштабе $\sim 0,76$, и ординаты кривой $u(\xi)$ увеличены приблизительно в 1.5 раза. Для некоторых значений $\xi = \xi_i$ построены также век-

торы деформации $\{u_i, w_i\}$, изображающие перемещения точек $\xi = \xi_i$ срединной поверхности.

Если при фиксированном ζ_0 уменьшить ν_0 (или при фиксированном ν_0 увеличить ζ_0), то профиль составляющей w станет ближе к треугольному, составляющая u уменьшится и профиль смещения станет ближе к профилю составляющей w . При увеличении ν_0 профиль составляющей w стремится к гармоническому, составляющая u возрастает и профиль смещения будет изменяться, стремясь сначала к П-образному, а затем к Ω -образному. При дальнейшем увеличении составляющей u уравнения описывают физически нереализуемые самоперекрывающиеся профили смещения. По мере уменьшения ζ_0 при фиксированном ν_0 составляющая u уменьшается, а профили изгибной составляющей и смещения приближаются к гармоническим.

В случае $a < 0$, как видно из (2.1), $C_2 < 0$. Представим уравнение для Z в виде

$$\frac{-ah^2}{3} \left(\frac{dZ}{d\xi} \right)^2 = (\alpha^2 + Z^2)(\beta^2 - Z^2)$$

Рассуждения и расчеты, аналогичные приведенным выше, показывают, что решения системы (1.1) для изгибно-продольных волн при $c < c_0$ можно записать следующим образом:

$$(2.8) \quad w(\xi) = h \sqrt{\frac{-a}{3}} \arcsin [k \operatorname{sn}(4K\nu\xi)], \quad u(\xi) = \frac{2h^2K\nu}{3c} \operatorname{zn}(4K\nu\xi)$$

$$\nu = \frac{\sqrt{3}c^2}{2hc_0} \{K(k) [2E(k) - K(k)]\}^{-1/2}$$

Выражение для амплитуды n -й гармоники составляющей w при $a < 0$ имеет вид

$$w_{0n} = 4h \sqrt{\frac{-a}{3}} \frac{q^{n-1/2}}{(2n-1)(1+q^{2n-1})}$$

Отсюда

$$\gamma_{12} = 3 [2 \operatorname{ch}(\pi K'/K) - 1] (\lim_{k \rightarrow 0} \gamma_{12} = \infty, \lim_{k \rightarrow 1} \gamma_{12} = 2n - 1)$$

Следовательно, при изменении k от нуля до единицы форма волны составляющей w трансформируется от гармонической к прямоугольной. Во всех выражениях, соответствующих случаю $a < 0$, модуль k ограничен величиной k_* , где $k_* \approx 0.91$ — корень уравнения $2E(k) = K(k)$.

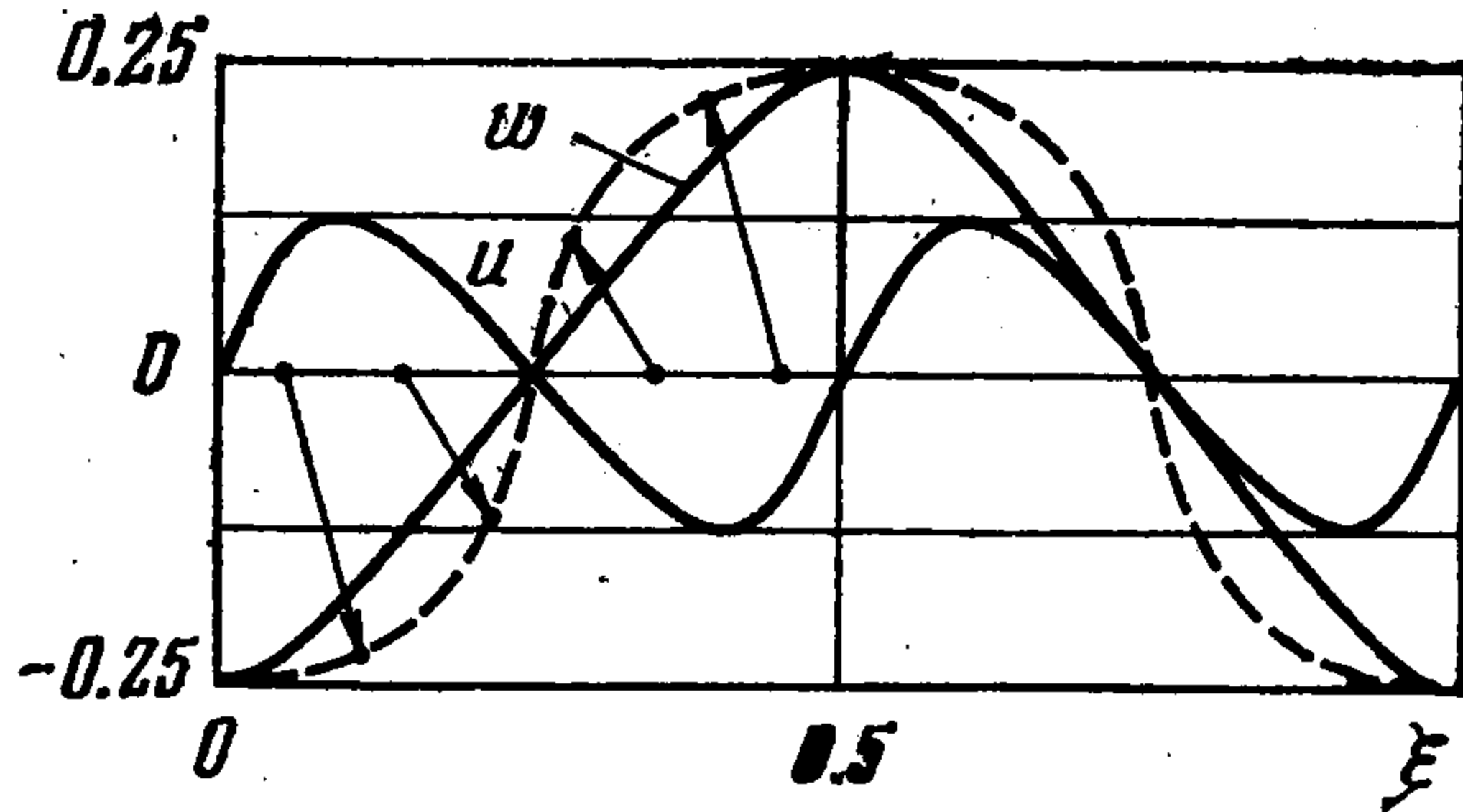
Характерные профили составляющих w , u и профиль смещения для случая $c < c_0$ показаны на фиг. 2, аналогичной фиг. 1, при $\zeta_0 \approx 0.97$ и $\nu_0 \approx 0.66$ ($k = 0.9$). Значения составляющей w увеличены в 3.56 раза, а значения ординат $u(\xi)$ — приблизительно в два раза.

Если при фиксированном ν_0 увеличивать ζ_0 (или увеличивать ν_0 при фиксированном ζ_0), то профили составляющих w и u существенно не изменятся, значения u возрастут и профиль смещения будет стремиться к треугольному. При дальнейшем увеличении ζ_0 (или ν_0) профиль смещения станет самопересекающимся. С уменьшением ζ_0 (или ν_0) профиль w стремится к гармоническому, составляющая u уменьшается и профиль смещения будет приближаться к профилю составляющей w .

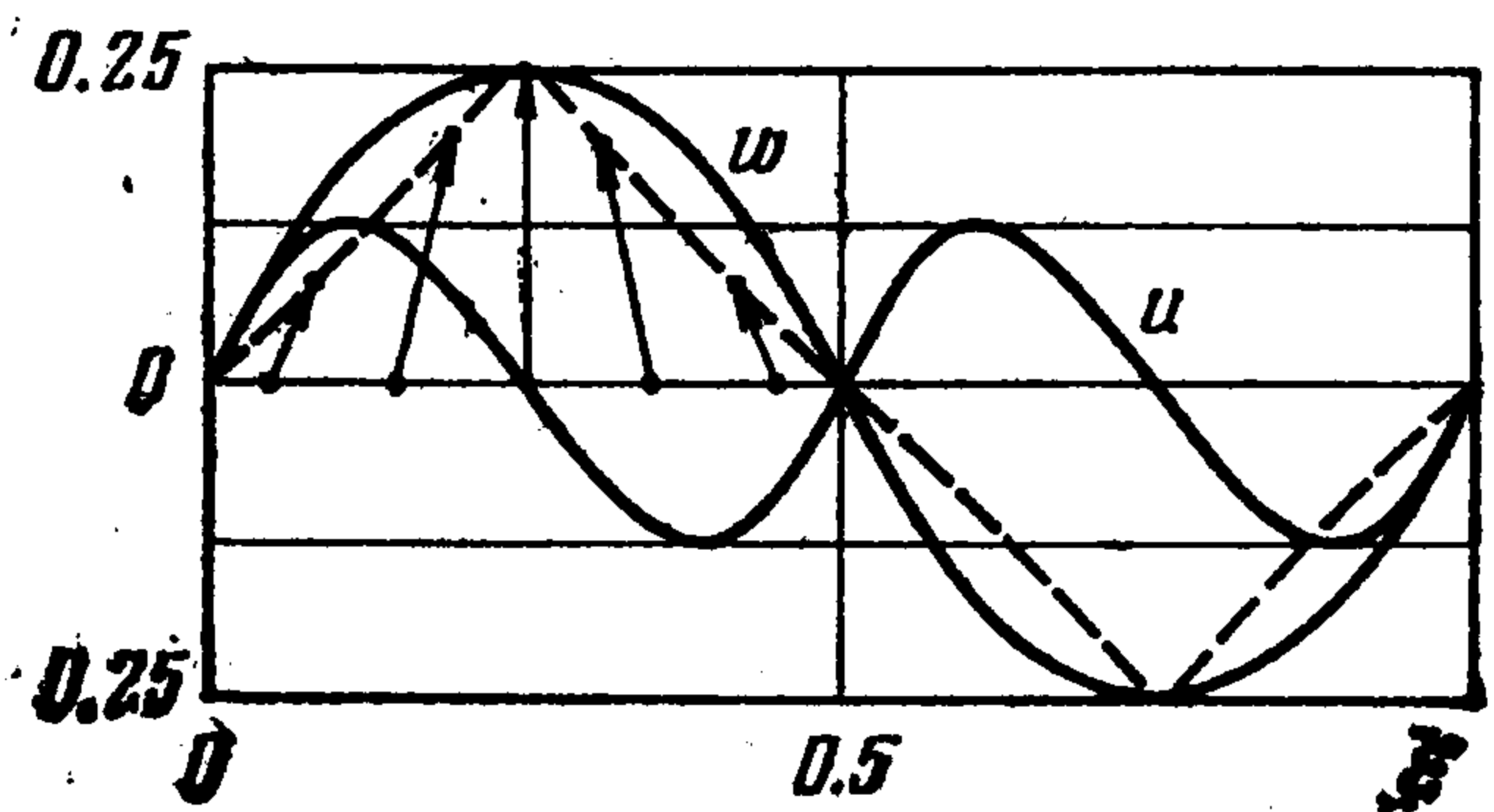
Таким образом, в зависимости от скорости распространения система (1.1) допускает решения, описывающие два типа связанных изгибно-продольных волн. Период дзета-функции вдвое меньше периода функций sn и cn , поэтому из (2.6) и (2.8) следует, что частота колебаний составляю-

щей u равна удвоенной частоте колебаний изгибной составляющей. Эти связанные волны полностью определяются двумя параметрами, например скоростью распространения и модулем k .

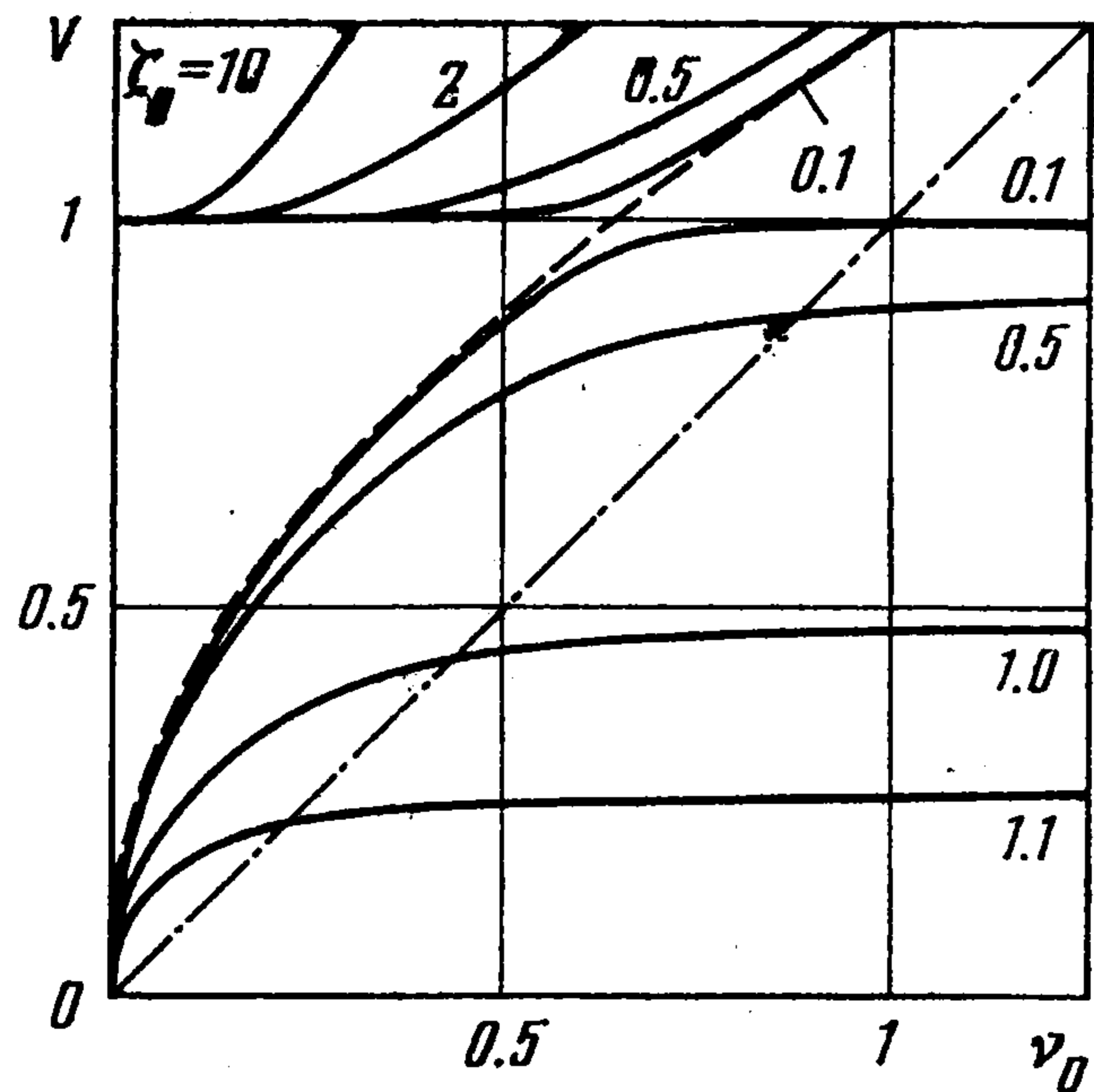
3. Наиболее доступна для измерений величина w , поэтому при исследовании зависимости скорости распространения от частоты целесообразно в качестве параметра использовать амплитуду изгибной составляющей w_0 .



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Воспользовавшись безразмерными величинами (2.7), из (2.5), (2.6) и (2.8) получим

$$(3.1) \quad \zeta_0 = \begin{cases} (V^2 - 1)^{1/2} \operatorname{Arth}(k), & V > 1 \\ (1 - V^2)^{1/2} \arcsin(k), & V < 1 \end{cases}$$

$$\nu_0 = \begin{cases} V^2 \{K(\mu) E(\mu)\}^{-1/2}, & V > 1 \\ V^2 \{K(k) [2E(k) - K(k)]\}^{-1/2}, & V < 1 \end{cases}$$

На фиг. 3 приведены зависимости V от ν_0 для различных ζ_0 , рассчитанные на ЭЦВМ. Кривые, показанные на графике, — аналоги дисперсионных кривых для нелинейной пластины. Штриховой линией нанесена дисперсионная кривая для линейной пластины, уравнение которой в переменных V , ν_0 имеет вид $V^2 = \pi\nu_0/2$.

Уравнения теории оболочек справедливы, когда длина распространяющейся волны λ больше h . Если ввести безразмерную длину волны $\Lambda = \sqrt{3}\lambda/(2h)$, то это условие можно записать в виде $\Lambda < 1$. Прямая, для точек которой $\Lambda = 1$, представлена штрихпунктиром.

Кривые, расположенные ниже прямой $V = 1$, соответствуют типу волн с П-образным профилем изгибной составляющей. Для этих волн $\zeta_0 < \zeta_*$, где $\zeta_* = \arcsin k_* = 1.1433$. Кривые имеют горизонтальные асимптоты, определяемые формулой $V = \sqrt{1 - (\zeta_0 / \zeta_*)^2}$. Величина k вдоль кривой плавно возрастает с увеличением V , стремясь асимптотически к k_* . Вместе с ней, как это следует из (2.8), возрастает составляющая u , которая при k , близких к k_* , становится преобладающей для любых значений ζ_0 .

Выше прямой $V = 1$ располагаются кривые, описывающие волны с треугольно-образной составляющей w . Чтобы найти их асимптотическое поведение при k , близких к единице, воспользуемся разложением K по степеням дополнительного модуля. В частности, если учесть только первый член разложения, то получим $K(\mu) \approx \approx 2(\ln 2 + \zeta_0 / \sqrt{a})$. В этом же приближении $E(\mu) \approx 1$. Подставив эти значения в (3.1), при $\zeta_0 / \sqrt{a} \gg \ln 2$ получим следующую асимптотическую формулу:

$$(3.2) \quad v_0 \approx V^2 (V^2 - 1)^{1/4} (2\zeta_0)^{-1/2}$$

Расчеты показывают, что при $\zeta_0 < 2$ формула (3.2) применима, лишь если $V \approx 1$ ($V \leq 1.01$ при $\zeta_0 = 0.5$). Для $\zeta_0 \geq 10$ при $V = 1.5$ погрешность в определении v_0 с помощью (3.2) не превышает 4% и становится еще меньше с уменьшением V .

Оценим предельное значение коэффициента распределения $\kappa = w_0/u_0$, где u_0 — амплитуда составляющей u . Используя (2.6) и (3.1), представим κ в виде

$$(3.3) \quad \kappa = \frac{(1+k)\zeta_0}{V z_{n_0}} \sqrt{\frac{E(\mu)}{K(\mu)}}$$

Здесь z_{n_0} — амплитуда дзета-функции. Из соотношений, приведенных в [5,7], можно показать, что $z_{n_0} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow 1$. Подставив в (3.3) $z_{n_0} = 1$ и переходя к пределу при $k \rightarrow 1$, найдем, что $\kappa \rightarrow \sqrt{2} \xi_0 \sqrt{a}/V$. Отсюда, в частности, следует, что если $V \rightarrow 1$, то $\kappa \rightarrow 0$, т. е. составляющая u становится преобладающей. Следует отметить, что при $k \rightarrow 1$ минимум радиуса кривизны профиля составляющей w стремится к нулю. Если при этом λ не стремится к бесконечности достаточно быстро, то теория пологих оболочек становится неприменимой.

Из графиков фиг. 3 видно, что при $\zeta_0 \leq 0.1$ кривые почти совпадают с дисперсионной кривой линейной системы всюду, кроме области, в которой скорость c близка к c_0 . В этой области отличие волн обоих типов от линейной волны становится существенным, однако при $c \rightarrow c_0$ нелинейные волны вырождаются в чисто продольную волну, удовлетворяющую системе (1.1) при $w \equiv 0$.

Из сравнения дисперсионных кривых классической теории пластинок с экспериментальными данными [3] следует, что для частот, при которых $c > c_t = c_0 \sqrt{(1-\sigma)/2}$, существенную роль играет инерция вращения элемента пластинки, не учитываемая при выводе исходных уравнений (1.1). Влияние инерции вращения может значительно изменить вид кривых, соответствующих случаю $c > c_0$.

Поступила 4 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Л.—М., Гостехиздат, 1948.
2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., «Наука», 1972.
3. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. М., «Мир», 1971.
4. Островский Л. А., Сутин А. М. Нелинейные упругие волны в стержнях. ПММ, 1977, т. 41, вып. 3.
5. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., «Наука», 1970.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
7. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1968.