Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.383

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ

З. В. Амелина, В. А. Романов

(Москва)

Рассматривается взаимодействие двух микронеоднородных полупространств, находящихся в условиях макрооднородного напряженно-деформированного состояния. Задача решается методом возмущений. В первом приближении определены в конечном виде корреляционные функции и дисперсии деформаций. Приведены численные значения коэффициентов, характеризующих концентрацию напряжений на границе взаимодействия полупространств. Исследовано изменение этих коэффициентов в зависимости от соотношения между упругими модулями сред, заполняющих полупространства. Решение данной задачи в частном случае (упругие модули зависят только от двух координат) приведено в [1].

1. Пусть случайно неоднородные полупространства $x_3 \geqslant 0$ и $x_3 \leqslant 0$, в которых реализуется макрооднородное напряженно-деформированное состояние, взаимодействуют вдоль плоскости $x_3 = 0$.

Представим перемещения, деформации и напряжения в виде [2]

$$u_i^{(k)}(\mathbf{x}) = \langle u_i^{(k)}(\mathbf{x})\rangle + v_i^{(k)}(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$
$$e_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}) = \langle e_{ij}^{(k)}(\mathbf{x})\rangle + \varepsilon_{ij}^{(k)}(\mathbf{x})$$
$$\sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{x}) = \langle \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{x})\rangle + \tau_{ij}^{(k)}(\mathbf{x})$$
$$(i, j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2)$$

Здесь $v_i^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\tau_{ij}^{(k)}$ — флуктуации перемещений деформаций и напряжений вблизи их постоянных средних значений $\langle u_i^{(k)}\rangle$, $\langle e_{ij}^{(k)}\rangle$, $\langle \sigma_{ij}^{(k)}\rangle$, определяющих макроскопически однородное напряженно-деформированное состояние; индекс k принимает значение 1 для полупространства $x_3 \geqslant 0$ и значение 2 — для $x_3 \leqslant 0$.

Уравнения равновесия для первого приближения имеют вид [3,4]

$$\varkappa_k v_{i,ij}^{(k)} + v_{j,mm}^{(k)} = -\frac{1}{\langle \mu_k \rangle}\left(\langle e_{nn}^{(k)}\rangle \alpha_{,i}^{(k)} + 2\langle e_{jp}^{(k)}\rangle \beta_{,p}^{(k)}\right) \tag{1.2}$$
$$\varkappa_k = \frac{\langle \lambda_k\rangle + \langle \mu_k\rangle}{\langle \mu_k\rangle}, \quad \lambda_k(\mathbf{x}) = \langle \lambda_k(\mathbf{x})\rangle + \alpha_k(\mathbf{x})$$
$$\mu_k(\mathbf{x}) = \langle \mu_k(\mathbf{x})\rangle + \beta_k(\mathbf{x}) \quad (i, j, m, n, p = 1, 2, 3;\ k = 1, 2)$$

Здесь и далее по индексу k суммирование не производится; $\langle \lambda_k\rangle$ и $\langle \mu_k\rangle$ — средние значения параметров Ламе, а α_k и β_k — их флуктуации.

Будем полагать, что полупространства нагружены «на бесконечности» постоянными напряжениями. Хотя для достижения контакта достаточно было бы считать отличными от нуля напряжения, нормальные к плоскости взаимодействия полупространств, здесь принято всестороннее сжатие, позволяющее несколько упростить выкладки и не наносящее ущерба существу вопроса.

Граничные условия на плоскости $x_3 = 0$ имеют следующий вид:

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)}, \quad \sigma_{n3}^{(k)} = 0 \quad (k,\ n = 1,\ 2) \tag{1.3}$$

Представим флуктуации упругих модулей интегралами Фурье ($f_k(\omega)$, $g_k(\omega)$ — обобщенные случайные функции)

$$\{\alpha_k;\ \beta_k\} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \{f_k(\boldsymbol{\omega});\ g_k(\boldsymbol{\omega})\} \exp(i\boldsymbol{\omega}\mathbf{x})\, d\boldsymbol{\omega} \tag{1.4}$$

$$\mathbf{x} = \{x_1;\ x_2;\ x_3\}, \quad \boldsymbol{\omega} = \{\omega_1;\ \omega_2;\ \omega_3\} \quad (k = 1, 2)$$

Решение (1.2) будем искать в виде

$$v_j^{(k)} = v_{(\mathrm{par})j}^{(k)} + v_{(\mathrm{gen})j}^{(k)} \quad (j = 1,\ 2,\ 3;\ k = 1,\ 2) \tag{1.5}$$

где $v_{(\mathrm{par})j}^{(k)}$ — частные решения (1.2), а $v_{(\mathrm{gen})j}^{(k)}$ — общие решения соответствующих однородных систем уравнений. Положим

$$v_{(\mathrm{par})\,j}^{(k)} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \gamma_j^{(k)}(\boldsymbol{\omega}) \exp(i\boldsymbol{\omega}\mathbf{x})\, d\boldsymbol{\omega} \tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в (1.2), получим для $\gamma_j^{(k)}$, аналогично [2], следующие выражения:

$$\gamma_j^{(k)} = i\left[\frac{\langle e_{nn}^{(k)}\rangle}{\langle\mu_k\rangle(1+\varkappa_k)}\frac{\omega_j}{\omega^2} f_k(\boldsymbol{\omega}) + \right. \tag{1.7}$$

$$\left. + 2\,\frac{(1+\varkappa_k)\,\omega^2\langle e_{jn}^{(k)}\rangle\,\omega_n - \varkappa_k\omega_j\langle e_{pq}^{(k)}\rangle\,\omega_p\omega_q}{\langle\mu_k\rangle(1+\varkappa_k)\,\omega^4}\, g_k(\boldsymbol{\omega})\right]$$

$$\omega^2 = \omega_m\omega_m \quad (j,\ m,\ n,\ p,\ q = 1,\ 2,\ 3;\ k = 1,\ 2)$$

Для нахождения общих решений однородных систем, соответствующих (1.2), воспользуемся представлением Треффтца [5] общего решения уравнений теории упругости через гармонические функции

$$v_{(\mathrm{gen})j}^{(k)} = \varphi_{j,3}^{(k)} - a_k x_3 \varphi_{m,\,jm}^{(k)}$$

$$\varphi_{m,\,nn}^{(k)} = 0, \quad a_k = \frac{\langle\lambda_k\rangle + \langle\mu_k\rangle}{\langle\lambda_k\rangle + 3\langle\mu_k\rangle} \tag{1.8}$$

$$(j,\ m,\ n = 1,\ 2,\ 3;\ k = 1,\ 2)$$

Примем $\varphi_j^{(k)}$ в виде

$$\varphi_j^{(k)} = \iint_{-\infty}^{\infty} A_j^{(k)}(\boldsymbol{\omega}_*) \exp\Omega_k d\boldsymbol{\omega}_*, \quad \Omega_k = i\boldsymbol{\omega}_*\mathbf{x}_* + \tag{1.9}$$

$$+ (-1)^k\omega_* x_3, \quad \mathbf{x}_* = \{x_1;\ x_2\}, \quad \boldsymbol{\omega}_* = \{\omega_1;\ \omega_2\}, \quad \omega_*^2 = \omega_n\omega_n$$

$$(k,\ n = 1,\ 2)$$

Используя (1.8), получим

$$v_{(\mathrm{gen})\,j}^{(k)} = \iint_{-\infty}^{\infty} [(-1)^k\omega_* A_j^{(k)} + a_k x_3\omega_j Q_A^{(k)}] \exp\Omega_k d\boldsymbol{\omega}_* \tag{1.10}$$

$$v_{(\mathrm{gen})\,3}^{(k)} = (-1)^k \iint_{-\infty}^{\infty} [\omega_* A_3^{(k)} - i a_k x_3\omega_* Q_A^{(k)}] \exp\Omega_k d\boldsymbol{\omega}_*$$

$$Q_A^{(k)} = \omega_m A_m^{(k)} - (-1)^k i\omega_* A_3^{(k)} \quad (j,\ k,\ m = 1,2)$$

$A_j^{(k)}$ ($j = 1, 2, 3$), входящие в (1.10) и содержащие интегралы по ω_3, могут быть найдены из граничных условий (1.3); здесь выражения для $A_j^{(k)}$ не приводятся ввиду их громоздкости.

Подставляя в (1.5), (1.6) и (1.10), получим выражения для перемещений в первом приближении

$$v_j^{(k)} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \{\gamma_j^{(k)} \exp(i\omega\mathbf{x}) + [(-1)^k \omega_* B_j^{(k)} + a_k x_3 \omega_j Q_B^{(k)}] \exp \Omega_k d\omega \tag{1.11}$$

$$v_3^{(k)} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \{\gamma_3^{(k)} \exp(i\omega\mathbf{x}) + (-1)^k [\omega_* B_3^{(k)} - i a_k x_3 \omega_* Q_B^{(k)}] \exp \Omega_k d\omega$$

$$Q_B^{(k)} = \omega_m B_m^{(k)} - (-1)^k i\omega_* B_3^{(k)}, \quad A_n^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} B_n^{(k)} d\omega_3 \quad (j,\ k,\ m = 1, 2;$$

$$n = 1,\ 2,\ 3)$$

Используя формулы Коши, закон Гука

$$\tau_{ij}^{(k)} = 2\,(\langle\mu_k\rangle\, \varepsilon_{ij}^{(k)} + \beta_k \langle e_{ij}^{(k)}\rangle) + (\langle\lambda_k\rangle\, \varepsilon_{nn}^{(k)} + \alpha_k < \langle e_{nn}^{(k)}\rangle)\, \delta_{ij}$$

и соотношения (1.11), можно получить выражения для возмущений деформаций и напряжений. В дальнейшем ограничимся лишь деформациями.

Выражения для флуктуаций деформаций будут иметь следующий вид:

$$\varepsilon_{mn}^{(k)} = \frac{i}{2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \{(\gamma_m^{(k)} \omega_n + \gamma_n^{(k)} \omega_m) \exp(i\omega\mathbf{x}) + \tag{1.12}$$

$$+ [(-1)^k \omega_* (\omega_n B_m^{(k)} + \omega_m B_n^{(k)}) + 2a_k \omega_m \omega_n x_3 Q_B^{(k)}] \exp \Omega_k\} d\omega$$

$$\varepsilon_{m3}^{(k)} = \frac{1}{2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \{i(\gamma_m^{(k)} \omega_3 + \gamma_3^{(k)} \omega_m) \exp(i\omega\mathbf{x}) + [(-1)^k \omega_* ((-1)^k \omega_* B_m^{(k)} +$$

$$+ i\omega_m B_3^{(k)}) + a_k \omega_m (1 + (-1)^k 2\omega_* x_3)\, Q_B^{(k)}] \exp \Omega_k\} d\omega$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \{i\gamma_3^{(k)} \omega_3 \exp(i\omega\mathbf{x}) + (-1)^k [(-1)^k B_3^{(k)} -$$

$$- i a_k (1 + (-1)^k \omega_* x_3)\, Q_B^{(k)}] \exp \Omega_k\} d\omega$$

$$\theta_k = v_{i,i}^{(k)} = i \iiint_{-\infty}^{\infty} [\gamma_p^{(k)} \omega_p \exp(i\omega\mathbf{x}) + (-1)^k (1 - a_k) \times$$

$$\times\, \omega_* Q_B^{(k)} \exp \Omega_k]\, d\omega \quad (k,\ m,\ n = 1,\ 2;\ p = 1,\ 2,\ 3)$$

В формулы для перемещений и деформаций в полупространствах $x_3 \geqslant 0$ и $x_3 \leqslant 0$ входят преобразования Фурье $f_k(\omega)$ и $g_k(\omega)$ функций α_k и β_k ($k = 1, 2$), что, казалось бы, обязывает для определения деформаций, например в полупространстве $x_3 \geqslant 0$, задавать эти функции во всем пространстве. Можно показать, что это не так, т. е. что значения, принимаемые λ_1 и μ_1 при $x_3 < 0$, а λ_2 и μ_2 при $x_3 > 0$, не влияют на значения деформаций при $x_3 \geqslant 0$.

Все вычисления проведем на примере $\varepsilon_{13}^{(1)}$; для остальных деформаций, а также для напряжений они аналогичны.

Представим выражения для f_1 и g_1 в виде

$$\{f_1; g_1\} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{F; G\} \exp(-i\omega_3 u_3)\, du_3$$

$$F = F(\omega_1;\ \omega_2;\ u_3),\quad G = G(\omega_1;\ \omega_2;\ u_3)$$

Используя эти выражения, преобразование Фурье по x_1 и x_2 деформации $\varepsilon_{13}^{(1)}$ можно привести к виду

$$P_{13}(\omega_1; \omega_2; x_3) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_{13}(\omega_1;\ \omega_2;\ x_3;\ u_3)\, du_3 \tag{1.13}$$

$$R_{13} = \frac{1}{2\pi} T_{13}(\omega_1;\ \omega_2;\ u_3) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big\{ -\omega_3 \exp(i\omega_3 x_3) +$$

$$+ \left[\omega_3 - \frac{8\varkappa_1(1+\varkappa_2)\langle\mu_1\rangle}{(2+\varkappa_1)(2+\varkappa_2)D}(\omega_3 - i\omega_*)\right] \times$$

$$\times \exp(-\omega_* x_3)\Big\} \frac{\exp(i\omega_3 u_3)}{\omega^2}\, d\omega_3$$

$$D = \frac{16}{(2+\varkappa_1)(2+\varkappa_2)}[\varkappa_1(1+\varkappa_2)\langle\mu_1\rangle + \varkappa_2(1+\varkappa_1)\langle\mu_2\rangle]$$

В силу независимости функций f_k, g_k $(k = 1, 2)$ в (1.13) входит только $f_1 \neq 0$, а $f_2 = g_1 = g_2 = 0$. Непосредственное вычисление интеграла в формуле (1.13) дает $\varepsilon_{13}^{(1)} = 0$, а это и доказывает независимость деформаций в полупространстве $x_3 \geqslant 0$ от значений, принимаемых модулями упругости при $x_3 < 0$ (для случая $g_1 \neq 0$, $f_1 = f_2 = g_2 = 0$ вычисления аналогичны и здесь не приводятся).

Покажем теперь, что деформации в $x_3 \geqslant 0$ не зависят от значений, принимаемых модулями λ_2 и μ_2 в $x_3 > 0$. Положим $f_2 \neq 0$, $f_1 = g_1 = g_2 = 0$, тогда

$$R_{13} = \frac{1}{2\pi} T_{13} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\omega_3 + i\omega_*) \exp(-\omega_* x_3) \frac{\exp(-i\omega_3 u_3)}{\omega^2}\, d\omega_3 = 0$$

что и доказывает сформулированное выше утверждение.

2. Рассмотрим более подробно деформированное состояние полупространства $x_3 \geqslant 0$. Для полупространства $x_3 \leqslant 0$ все рассуждения аналогичны.

Пусть случайные поля α_1, β_1 статистически однородны и изотропны, статистически однородно и изотропно связаны между собой и имеют известные корреляционные функции

$$K_{yz}(\xi) = \langle \overline{y_1(\mathbf{x})}\, z_1(\mathbf{x}+\xi)\rangle \quad (y, z = \alpha, \beta) \tag{2.1}$$

Здесь и далее черта означает комплексно-сопряженную величину.

Относительно α_2 и β_2 делаем те же предположения, что и относительно α_1 и β_1 и, кроме того, считаем, что

$$\langle \bar{y}_1 z_2\rangle = 0 \quad (y, z = \alpha, \beta) \tag{2.2}$$

Тогда можно получить выражения для компонентов корреляционного тензора деформации

$$K_{pqst}(\mathbf{x}, \xi) = \langle \overline{\varepsilon_{pq}^{(1)}(\mathbf{x})}\, \varepsilon_{st}^{(1)}(\mathbf{x}+\xi)\rangle \tag{2.3}$$

Из соотношений (2.3), (1.12), (2.1) и (2.2) видно, что поле деформаций стационарно в направлении осей x_1 и x_2 и нестационарно в направлении оси x_3.

Не приводя выражений K_{pqst} для всех значений p, q, s, t ввиду их громоздкости, рассмотрим корреляционные функции деформации $\varepsilon_{12}^{(1)}$ и объемного расширения θ_1.

Особый интерес представляет поведение корреляционных функций и дисперсий деформаций на границе взаимодействия полупространств. Из (1.12) имеем при $x_3 = 0$

(2.4)
$$\varepsilon_{12}^{(1)} = \frac{i}{2}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} [\gamma_1\omega_2 + \gamma_2\omega_1 - \omega_* (\omega_2 B_1 + \omega_1 B_2)] \exp(i\omega_* x_*) d\omega$$

$$\theta_1 = i\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} [\gamma_m\omega_m + (a_1 - 1)(\omega_n B_n + i\omega_* B_3)] \exp(i\omega_* x_3)\, d\omega$$

$$(m = 1, 2, 3;\ n = 1, 2)$$

Воспользовавшись (2.4), (2.2) и (2.3), получим корреляционные функции для $\varepsilon_{12}^{(1)}$ и θ_1

(2.5)
$$K_{1212}(\xi_*) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \Big\{ b_4^2 \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{\omega^4} S_1(\omega) + b_3^2 \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{\omega_*^2}\Big[\frac{\omega_2^2\omega_3^2}{\omega_*^4} b_k S_k(\omega) +$$
$$+ (1 + \varkappa_2) c_k S_k(\omega)\Big] - 2(1 + \varkappa_2) b_3 b_4 \Big(d_1 + 2h_1\frac{\omega_3^2}{\omega^2}\Big)\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{\omega_*^2\omega^2} \times$$
$$\times S_1(\omega)\Big\} \exp(i\omega_* x_*)\, d\omega$$

$$K_\theta(\xi_*) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[h_1\Big(\frac{1}{\langle\mu_1\rangle^2} + d_3\Big(d_3 + \frac{2}{\langle\mu_1\rangle}\Big)\frac{\omega_*^2}{\omega^2}\Big) S_1(\omega) +$$
$$+ d_3^2 h_2^2 \frac{\omega_*^4}{\omega^4} S_2(\omega)\Big] \exp(i\omega_* x_*)\, d\omega$$

$$b_1 = 4\langle e^{(1)}\rangle\Big[1 + \varkappa_2\Big(1 + \frac{\langle\mu_2\rangle}{\langle\mu_1\rangle}\Big)\Big], \quad b_2 = 4\langle e^{(2)}\rangle\frac{1 - \varkappa_2}{1 + \varkappa_2}$$

$$b_3 = \frac{2}{(2 + \varkappa_1)(2 + \varkappa_2) D}, \quad b_4 = \frac{\langle e^{(1)}\rangle}{(1 + \varkappa_1)\langle\mu_1\rangle}$$

$$c_k = \Big(d_k - 2h_k\frac{\omega_3^2}{\omega^2}\Big), \quad d_k = (-1)^k\langle e^{(k)}\rangle\Big(1 - \frac{\langle\lambda_k\rangle}{(1 + \varkappa_k)\langle\mu_k\rangle}\Big)$$

$$h_k = \langle e^{(k)}\rangle\frac{1}{1 + \varkappa_k}, \quad d_3 = 8(1 + \varkappa_2) b_3$$

$$S_k = 9S_{11}^{(k)} + 12S_{12}^{(k)} + 4S_{22}^{(k)}, \quad \xi_*^2 = \xi_k\xi_k$$

$$\langle e_{ij}^{(k)}\rangle = \langle e^{(k)}\rangle\delta_{ij} \quad (k = 1, 2)$$

$S_{ij}^{(k)}$ — спектральные плотности полей α_k и β_k.

Переходя в (2.5) к сферическим координатам и интегрируя по углам, получим ($J_{m/n}$ — функция Бесселя)

(2.6)
$$K_{1212}'(\xi_*) = \frac{\pi^2}{4}\int\limits_0^\infty \{b_4^2 H_1 S_1(\omega) + b_3^2[(H_2 - H_1) b_k^2 S_k(\omega) +$$
$$+ (1 + \varkappa_2)^2 c_k' S_k(\omega)] - 2(1 + \varkappa_2) b_3 b_4 [d_1 H_2 + 2h_1(H_2 -$$
$$- H_1)] S_1(\omega)\}\, \omega^2 d\omega$$

$$K_\theta(\xi_*) = 2\pi^2\int\limits_0^\infty \Big\{ h_1^2\Big[\frac{1}{\langle\mu_1\rangle^2} + d_3\Big(d_3 + \frac{1}{\langle\mu_1\rangle}\Big)\frac{1}{\omega^2}(-\nabla^2) S_1(\omega) +$$

$$+ d_3^2 h_2^2 \frac{1}{\omega^4} \nabla^4 S_2(\omega)\Big\} J_{1/2}(\eta) J_{-1/2}(\eta)\,\omega^2 d\omega$$

$$H_1 = \frac{1}{16}[J_{5/2}(\eta) J_{-5/2}(\eta) + 5J_{3/2}(\eta) J_{-3/2}(\eta) + 10J_{1/2}(\eta) J_{-1/2}(\eta) -$$

$$-(J_{9/2}(\eta) J_{-1/2}(\eta) + 5J_{7/2}(\eta) J_{1/2}(\eta) + 10J_{5/2}(\eta) J_{3/2}(\eta))\cos\psi]$$

$$H_2 = \frac{1}{4}[J_{3/2}(\eta) J_{-3/2}(\eta) + 3J_{1/2}(\eta) J_{-1/2}(\eta) -$$

$$-(J_{7/2}(\eta) J_{1/2}(\eta) + 3J_{5/2}(\eta) J_{3/2}(\eta))\cos\psi]$$

$$H_3 = J_{1/2}(\eta) J_{-1/2}(\eta) - J_{5/2}(\eta) J_{3/2}(\eta)\cos\psi$$

$$\eta = \frac{\omega\xi_*}{2}, \quad \psi = \operatorname{arctg}\frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}$$

$$c_m' = d_m^2 H_3 - 4\, d_m h_m (H_3 - H_2) + 4\, h_m^2 (H_3 - 2\, H_2 + H_1)$$

$$(k, m = 1, 2, \text{ по } m \text{ не суммировать})$$

Полагая в формулах (2.6) $\xi_* = 0$, получим выражения для дисперсий:

$$D_{1212} = \frac{\pi}{30}\int_0^\infty \{8b_4^2 S_1(\omega) + b_3^2[2b_k^2 S_k(\omega) + (1+\varkappa_2)^2 c_k' S_k(\omega)] - \tag{2.7}$$

$$-4(1+\varkappa_2) b_3 b_4 (5d_1 + 2h_1) S_1(\omega)\}\,\omega^2 d\omega$$

$$D_\theta = 2\pi\int_0^\infty \Big\{h_1^2\Big[\frac{2}{\langle\mu_1\rangle^2} + \frac{4}{3} d_3\Big(d_3 + \frac{2}{\langle\mu_1\rangle}\Big)\Big] S_1(\omega) +$$

$$+ \frac{16}{15} d_3^2 h_2^2 S_2(\omega)\Big\}\,\omega^2 d\omega \quad (k = 1, 2)$$

3. Рассмотрим некоторые предельные случаи.

1°. Полупространства заполнены одинаковой средой, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\mu_1 = \mu_2$. Тогда выражения (2.7) примут вид

$$D_{1212} = \frac{4}{15} r^2 D^* v_{1212}^2, \quad D_\theta = 2r^2 D^* v_\theta^2$$

$$D^* = \int_0^\infty \omega^2 S(\omega)\, d\omega, \quad r = \frac{\pi\langle e\rangle}{(1+\varkappa)\langle\mu_1\rangle}$$

Здесь v_{1212}, v_θ — коэффициенты изменчивости. Вычисления этих коэффициентов дают следующие результаты: $v_{1212}^2 = 0{,}10$, $v_\theta^2 = 1.96$ (коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$). Значения этих коэффициентов для всего пространства [4] таковы: $v_{1212}^2 = 0.093$, $v_\theta^2 = 1.39$.

2°. Полупространство $x_3 \leqslant 0$ однородно. Полагая, что средние значения упругих модулей для $x_3 \geqslant 0$ равны упругим модулям полупространства $x_3 \leqslant 0$, имеем $v_{1212}^2 = 0.25$, $v_\theta^2 = 2.38$.

3°. Полупространство $x_3 \leqslant 0$ абсолютно жесткое. В этом случае дисперсия объемного расширения на границе $x_3 = 0$ совпадает с дисперсией объемного расширения во всем пространстве, а коэффициент изменчивости $v_{1212}^2 = 0.116$.

4°. Полупространство $x_3 \geqslant 0$ нагружено на плоскости $x_3 = 0$ нормальными напряжениями. Имеем $v_{1212}^2 = 0.198$, $v_\theta^2 = 2.55$.

Используя (1.12) и закон Гука, можно получить выражения для флуктуаций напряжений, а затем формулы для компонентов корреляционного тензора и тензора дисперсий напряжений. Не приводя эти формулы, ограничимся здесь значениями коэффициента изменчивости для напряжений $\sigma_{11}^{(1)}$ (или $\sigma_{22}^{(1)}$), $\sigma_{12}^{(1)}$ на границе взаимодействия полупространств. Для случаев 1° — 4° имеем соответственно $v_{1111}^2 = v_{2222}^2 = 0.431$, 0.101, 0.107, 0.116; $v_{1212}^2 = 0.1$, 0.25, 0.116, 0.13. Во всем пространстве [4] $v_{1111}^2 = v_\theta^2 = 0.105$, $v_{1212}^2 = 0.093$.

Представляет интерес сравнение полученных значений коэффициентов изменчивости с соответствующими значениями, приведенными в [6]. Рассмотрим отношение коэффициента изменчивости для напряжений $\sigma_{11}^{(1)}$ $(\sigma_{22}^{(1)})$, $\sigma_{12}^{(1)}$ в полупространстве к соответствующему коэффициенту во всем пространстве (в скобках приведены значения w из [6]) $w_{1111} = 1.104$ (1.099), $w_{1212} = 2.123$ (2.109). Видно, что соответствующие значения различаются на десятые доли процента.

Таким образом, на границе раздела полупространств наблюдается значительная концентрация деформаций (напряжений), которую следует учитывать в практических расчетах.

Поступила 9 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подалков В. В., Романов В. А.* Взаимодействие двух микронеоднородных упругих тел. Тр. Московск. энерг. ин-та, 1977, вып. 334.
2. *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М., «Наука», 1970.
3. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. Изд-во МГУ, 1976.
4. *Подалков В. В., Романов В. А.* Некоторые статистические характеристики поля деформаций микронеоднородных сред. Тр. Московск. энерг. ин-та, 1975, вып. 260.
5. *Треффц Е.* Математическая теория упругости. Л.—М., Гостехиздат, 1934.
6. *Подалков В. В., Романов В. А.* Концентрация напряжений на границе микронеоднородного упругого полупространства. ПММ, 1978, т. 42, вып. 3.