Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.3

МЕТОД ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

М. И. Чебаков

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается смешанная осесимметричная задача теории упругости о кручении штампом кругового цилиндра конечных размеров. Штамп жестко сцеплен с одной плоской гранью цилиндра, другая его плоская граница неподвижна, а на цилиндрической поверхности заданы условия отсутствия перемещений либо напряжений. Задача исследуется методом однородных решений [1], который позволяет получить ее приближенное решение практически для любых значений параметров. Такая эффективность метода определяется тем, что решение задачи сводится к исследованию бесконечной алгебраической системы типа нормальных систем Пуанкаре—Коха. В случае, когда отношение высоты цилиндра к радиусу штампа достаточно велико, коэффициенты системы, контактные напряжения и другие характеристики задачи вычисляются с любой степенью точности, при малых значениях этого отношения получены эффективные асимптотические выражения. Приводятся результаты числовых расчетов.

Решение задачи для случая большого значения отношения $(R-a)/h$ и малых значениях отношения $\lambda = h/a$ получено в работе [2].

1. Постановка задачи и сведение ее к бесконечной системе. Рассматривается смешанная осесимметричная задача теории упругости о кручении штампом радиуса a кругового цилиндра $r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant h$ (r, φ, z — цилиндрические координаты). Штамп жестко сцеплен с плоской границей цилиндра $z = h$, граница цилиндра $z = 0$ и его боковая поверхность неподвижны. В этом случае задача эквивалентна следующей краевой задаче относительно функции перемещения $v(r, z)$ вдоль оси φ:

$$\Delta v - \frac{v}{r^2} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.1}$$

$$v = \delta r \quad (0 \leqslant r \leqslant a, \ \ z = h), \quad v = 0 \quad (r = R, \ \ 0 \leqslant z \leqslant h) \tag{1.2}$$

$$v = 0 \quad (z = 0, r \leqslant R), \quad \tau_{z\varphi} = G\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (a < r < R, z = h)$$

где δ — угол поворота штампа, G — модуль сдвига. Для решения краевой задачи (1.1), (1.2) используем метод однородных решений [1]. В соответствии со схемой этого метода найдем предварительно решение уравнения (1.1), когда

$$\tau_{z\varphi}^{(1)} = \begin{cases} \tau(r) & (0 \leqslant r \leqslant a, \, z = h) \\ 0 & (r > a, \, z = h) \end{cases}, \quad v^{(1)} = 0 \quad (z = 0)$$

С помощью интегрального преобразования Ханкеля получим ($J_1(x)$ — функция Бесселя первого рода)

$$v^{(1)}(r,z) = G^{-1}\int_0^a \tau(\rho)\rho\,d\rho \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} uz}{u \operatorname{ch} uh} J_1(ur)\,J_1(u\rho)\,u\,du \tag{1.3}$$

$$\tau^{(1)}(r,z) = \int_0^a \tau(\rho)\rho\,d\rho \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} uz}{\operatorname{ch} uh} J_1(ur)\,J_1(u\rho)\,u\,du$$

Далее найдем частные однородные решения уравнения (1.1), когда

$$\tau_{z\varphi}^{(2)} = 0 \quad (z = h), \quad v^2 = 0 \quad (z = 0)$$

Суммируя однородные решения, получим

$$v^{(2)}(r,z) = \sum_{k=1}^\infty B_k \operatorname{sh} u_k z J_1(u_k r) \tag{1.4}$$

$$\tau_{z\varphi}^{(2)}(r,z) = \sum_{k=1}^\infty B_k u_k \operatorname{ch} u_k z J_1(u_k r), \qquad u_k = i\frac{\pi}{h}\left(k - \frac{1}{2}\right)$$

Используя ортогональность функций $\operatorname{sh} u_k z$ на отрезке $[0, h]$, найдем B_k из условия

$$v(r,z) = v^{(1)}(r,z) - v^{(2)}(r,z) = 0 \quad (r = R) \tag{1.5}$$

$$B_k = \frac{2(-1)^k K_1(R\gamma_k)}{GhI_1(R\gamma_k)}\int_0^a \tau(\rho)\,I_1(\rho\gamma_k)\,\rho\,d\rho, \quad \gamma_k = -iu_k \tag{1.6}$$

Теперь нетрудно убедиться в том, что функция $v(r,z) = v^{(1)}(r,z) - v^{(2)}(r,z)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и всем граничным условиям (1.2), кроме первого. Удовлетворяя и этому условию, получим интегральное уравнение относительно функции распределения контактных напряжений

$$K\tau = G\delta r - G\sum_{k=1}^\infty B_k(-1)^{k+1} I_1(\gamma_k r) \quad (r \leqslant a) \tag{1.7}$$

$$K\tau = \int_0^a \tau(\rho)\rho\,d\rho \int_0^\infty \operatorname{th} uh J_1(ur)\,J_1(u\rho)\,du$$

Представим решение этого уравнения в виде

$$\tau(r) = G\tau_0(r) - G\sum_{k=1}^\infty B_k(-1)^{k+1}\tau_k(r) \tag{1.8}$$

$$K\tau_k = \begin{cases} \delta r & (k = 0) \\ I_1(\gamma_k r) & (k \geqslant 1) \end{cases} \tag{1.9}$$

Тогда, подставляя (1.8) в (1.6), для определения постоянных $B_k = x_k[hI_1(R\gamma_k)]^{-1}$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$x_k = g_k - \sum_{n=1} a_{kn} x_n \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.10}$$

$$g_k = 2(-1)^k K_1(R\gamma_k) T_{0,k}, \quad a_{kn} = \frac{2(-1)^{k+n+1} K_1(R\gamma_k)}{hI_1(R\gamma_n)} T_{n,k}$$

$$T_{n,k} = \int_0^a \tau_n(\rho) I_1(\rho\gamma_k)\rho\, d\rho \tag{1.11}$$

Исследуем бесконечную систему (1.10). Можно показать, что

$$T_{n,k} \leqslant (2\pi a)^{-1} I_1(a\gamma_k) M_n, \quad M_n = 2\pi \int_0^a \tau_n(r) r^2\, dr$$

Оценим M_n $(n \geqslant 1)$, для этого обе части уравнения (1.9) при $k \geqslant 1$ умножим на $r\tau_0(r)$ и проинтегрируем от 0 до a. Изменив порядок интегрирования, получим

$$M_n = 2\pi T_{0,n} \leqslant a^{-1} I_1(a\gamma_k) M_0$$

Отсюда следуют оценки

$$| g_k | \leqslant (\pi a)^{-1} I_1(a\gamma_k) K_1(R\gamma_k) M_0$$
$$| a_{kn} | \leqslant (\pi a^2 h)^{-1} K_1(R\gamma_k) I_1(a\gamma_k) I_1(a\gamma_n) I_1^{-1}(R\gamma_n) M_0$$

Принимая во внимание асимптотическое поведение модифицированных функций Бесселя $K_1(x)$ и $I_1(x)$ при больших значениях аргумента, получим

$$|g_k| \sim \frac{1}{2k-1} \exp\left[-\frac{\pi(R-a)}{h}\left(k-\frac{1}{2}\right)\right] \quad (k \to \infty)$$
$$|a_{kn}| \sim \frac{1}{2k-1} \exp\left[-\frac{\pi(R-a)}{h}(k+n-1)\right] \quad (k, n \to \infty)$$

Видим, что при $R > a$ свободные члены системы (1.10) и коэффициенты ее матрицы экспоненциально убывают с ростом номеров. Таким образом, система (1.10) относится к типу нормальных систем Пуанкаре — Коха.

Такие системы возникают также при исследовании некоторых типов смешанных задач методом кусочно-однородных решений [3].

Для вычисления элементов системы (1.10) необходимо знать решения интегральных уравнений (1.9), которые соответствуют хорошо изученной контактной задаче о кручении штампом упругого слоя, и поэтому для их решения с успехом могут быть использованы эффективные асимптотические методы [4].

2. Решение интегрального уравнения (1.9) методом больших λ. Уравнение (1.9) эквивалентно парному интегральному уравнению

$$\int_0^\infty \Phi_k(\tau) \operatorname{th} \tau\lambda J_1(\tau x)\, d\tau = f_k(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{2.1}$$

$$\int_0^\infty \Phi_k(\tau) J_1(\tau x)\tau\, d\tau = 0 \quad (x > 1)$$

$$\Phi_k(u) = \int_0^1 \eta_k(y) J_1(uy) y\, dy, \quad \eta_k(y) = \tau_k(ya) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$f_k(x) = (\delta x, \text{ если } k = 0;\ a^{-1} I_1(a\gamma_k x), \text{ если } k \geqslant 1), \quad \lambda = \frac{h}{a}$$

В свою очередь, парное уравнение (2.1) эквивалентно интегральному уравнению Фредгольма второго рода [5]

$$\varphi^k(t) - \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1}\varphi^k(\tau)\, M\left(\frac{t-\tau}{\lambda}\right)d\tau = d_k(t) \quad (|t|\leqslant 1) \tag{2.2}$$

$$M(y) = \int_0^\infty [1-\operatorname{th} u]\cos uy\, du = \sum_{k=0}^\infty b_k y^{2k} \tag{2.3}$$

$$b_k = \frac{1}{(2k)!}\int_0^\infty [1-\operatorname{th} u]\, u^{2k}\, du = (-1)^k 2^{-2k}\sum_{i=1}^\infty i^{-2k}(-1)^{i+1}$$

$$d_k(t) = (2\delta t, \text{ если } k=0;\ a^{-1}\operatorname{sh}(a\gamma_k t), \text{ если } k\geqslant 1)$$

При этом

$$\eta_k(r) = \tau_k(ra) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dr}\int_r^1 \frac{\varphi^k(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\tau^2-r^2}}, \quad \Phi_k(\tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \varphi^k(u)\sin\tau u\, du \tag{2.4}$$

В соответствии со схемой метода больших λ (см., например, [6]) решение уравнения (2.2) будем разыскивать в виде

$$\varphi^m(t) = \sum_{n=0}^\infty \varphi_n^m(t)\lambda^{-n} \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) и ряд (2.3) в уравнение (2.2) и приравнивая слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим рекуррентные соотношения для определения $\varphi_n{}^m(t)$

$$\varphi_0{}^m(t) = d_m(t) \tag{2.6}$$

$$\varphi_n^m(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{[n-1/2]} b_k \int_{-1}^{1}\varphi_{n-2k-1}^m(\tau)(t-\tau)^{2k}\, d\tau \quad (n\geqslant 1)$$

(здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа). Можно убедиться, если следовать работе [6], что

$$\varphi_{2s}{}^m(t) = \sum_{j=0}^{s-3}\alpha_{sj}{}^m t^{2j+1} \quad (s\geqslant 3) \tag{2.7}$$

$$\varphi_{2s+1}^m(t) = \sum_{j=0}^{s-1}\beta_{sj}{}^m t^{2j+1} \quad (s\geqslant 1), \quad \varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_4(t) = 0$$

Подставляя теперь (2.7) в (2.6) и приравнивая слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях t, получим рекуррентные соотношения для определения чисел $\alpha_{sj}{}^m$ и $\beta_{sj}{}^m$

$$\alpha_{sj}{}^m = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=j+1}^{s-2} z_{kj}b_k \sum_{p=0}^{s-k-2}\frac{\beta_{s-k-1,\,p}^m}{2k-2j+2p+1} \quad \begin{pmatrix} s\geqslant 3 \\ 0\leqslant j\leqslant s-3\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

$$\beta_{sj}{}^m = -\frac{2}{\pi}z_{sj}b_s B_{sj}{}^m -$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{k=j+1}^{s-3} z_{kj}b_k\sum_{p=0}^{s-k-3}\frac{\beta_{s-k,\,p}^m}{2k-2j+2p+1} \quad \begin{pmatrix} s\geqslant 1 \\ 0\leqslant j\leqslant s-1\end{pmatrix}$$

$$B_{sj}{}^m = \begin{cases} 2\delta(2s-2j+1)^{-1} & (m=0) \\ a^{-1}F_{s-j}^m & (m\geqslant 1)\end{cases}, \quad z_{kj} = \frac{(2k)!}{(2j+1)!\,(2k-2j-1)!}$$

$$(2.9)\qquad F_n^m = \frac{(2n-1)!}{(a\gamma_m)^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(a\gamma_m)^{2k+1}}{(2k+1)!} \operatorname{ch} a\gamma_m - \frac{(a\gamma_m)^{2k}}{(2k)!} \operatorname{sh} a\gamma_m \right] \qquad (m \geqslant 1)$$

Таким образом, формулы (2.4), (2.5), (2.7), (2.8) позволяют получить решение интегрального уравнения (1.9) с любой степенью точности в области сходимости предложенного здесь метода больших λ в виде элементарных и удобных для расчетов выражений

$$(2.10)\qquad \varphi^m(t) = d_m(t) + W_m(t^{2j+1})$$

$$(2.11)\qquad W_m(t^{2j+1}) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^{-2s-1} \sum_{j=0}^{s-1} \beta_{sj}{}^m t^{2j+1} + \sum_{s=3}^{\infty} \lambda^{-2s} \sum_{j=0}^{s-3} \alpha_{sj}{}^m t^{2j+1}$$

Воспользовавшись формулами (1.11) и (2.4), найдем

$$T_{n,k} = \frac{2a^2}{\pi} \int_0^1 \varphi^n(\tau) \operatorname{sh} a\gamma_k\tau \, d\tau$$

Подставив сюда $\varphi^n(\tau)$ в виде (2.10), (2.11), получим

$$(2.12)\qquad T_{0,k} = \frac{2a^2}{\pi} [2\delta F_1{}^k + W_0(F_{j+1}^k)]$$

$$T_{n,k} = \frac{2a^2}{\pi} \left[\frac{1}{2a^2} \left(\frac{\operatorname{sh} a(\gamma_k + \gamma_n)}{\gamma_k + \gamma_n} - \frac{\operatorname{sh} a(\gamma_k - \gamma_n)}{\gamma_k - \gamma_n} \right) + W_n(F_{j+1}^k) \right]$$

$$(n, k \geqslant 1)$$

($W_n(F_{j+1}{}^k)$ описывается по аналогии с (2.11)). Теперь элементы бесконечной системы (1.10) вычислим с использованием (2.12), а приближенное решение этой системы найдем методом редукции.

Контактные напряжения под штампом $\tau_{z\varphi}(r, h) = \tau(r)$ вычисляются по формуле (1.8), в которой, если использовать (2.4), (2.10), (2.11)

$$(2.13)\qquad \tau_0(ra) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{2\delta r}{\sqrt{1-r^2}} + W_0(S_j(r)) \right]$$

$$\tau_k(ra) = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{a} \frac{d}{dr} \int_r^1 \frac{\operatorname{sh}(a\gamma_m\tau)\, d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} + W_k(S_j(r)) \right]$$

$$S_j(r) = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} j! \sum_{k=0}^{j} \frac{r^{2(j-k-1)}}{k!\,(j-k)!} (1-r^2)^k \frac{[(2j+1)r^2 - 2(j-k)]}{2k+1}$$

($W_k(S_j(r))$ описывается по аналогии с (2.11)).

Связь между моментом M, приложенным к штампу, и углом поворота штампа δ найдем из условия

$$(2.14)\qquad M = 2\pi \int_0^a \tau(r) r^2 \, dr$$

Используя (1.8), (2.4), (2.10), (2.11), получим

$$(2.15)\qquad M = G \left[M_0 + \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{(-1)^k M_k}{I_1(R\gamma_k)} \right]$$

$$M_k = 8a^3 \int_0^1 \tau\varphi^k(\tau)\, d\tau, \qquad M_k = 8a^3 \left[a^{-1} F_1{}^k + W_k\left(\frac{1}{2j+3} \right) \right] \qquad (k \geqslant 1)$$

$$M_0 = 8a^3\left[\frac{2\delta}{3} + W_0\left(\frac{1}{2j+3}\right)\right]$$

($W_k(1/(2j+3))$ описывается по аналогии с (2.11), F_1^k см. (2.9)).

Таким образом, используя метод больших λ для решения уравнения (1.9), удалось получить решение задачи для больших значений параметра λ через решение бесконечной системы (1.10) в элементарных выражениях с любой степенью точности, при этом в формулах для контактных напряжений особенность явно выделена. Коэффициенты бесконечной системы также получены в элементарных выражениях.

Об области применимости такого подхода к решению задачи будет сказано в п. 4.

3. Решение интегрального уравнения (1.9) методом малых λ. Рассмотрим парное уравнение (2.1), эквивалентное уравнению (1.9), и получим его решение методом сведения к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с сингулярной матрицей [7]. В качестве решения последней возьмем главный член его асимптотики при малых λ [8].

Согласно [2]

$$\tau_0(r) = \frac{\delta r}{h} + \delta\sum_{n=1}^{\infty} y_n^\circ I_1(\delta_n r) I_1^{-1}(\delta_n a), \quad \delta_n = \frac{\pi n}{h} \tag{3.1}$$

$$\tau_k(r) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^k I_1(\delta_n r) I_1^{-1}(\delta_n a) \quad (k \geqslant 1,\ r \leqslant a)$$

$Y^k = \{y_n^k\}$ $(k \geqslant 0)$ — вектор, являющийся решением бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$BY^k = D^k, \quad B = \left\{\frac{\gamma_m K_0(\gamma_m a) I_1(\delta_n a) + \delta_n I_0(\delta_n a) K_1(\gamma_m a)}{(\delta_n^2 - \gamma_m^2) K_1(\gamma_m a) I_1(\delta_n a)}\right\} \tag{3.2}$$

$$D^\circ = \left\{\frac{aK_2(\gamma_m a)}{h\gamma_m K_1(\gamma_m a)}\right\}, \quad D^k = \frac{h}{2aK_1(\gamma_k a)}\{\delta_m^k\} \quad (k \geqslant 1)$$

Здесь B, D^k — символы матрицы и вектора соответственно, δ_m^k — символ Кронекера. При малых λ главный член асимптотики решения бесконечной системы является решением вырожденной бесконечной системы [8]

$$AY^k = D_1^k, \quad A = \{(\delta_n - \gamma_m)^{-1}\} \tag{3.3}$$

$$D_1^\circ = \left\{\frac{a}{h\gamma_m}\right\}, \quad D_1^k = he^{\gamma_k a}\sqrt{\frac{\gamma_k}{2\pi a}}\{\delta_m^k\} \quad (k \geqslant 1)$$

Система (3.3) формально получена из системы (3.2) в результате предельного перехода при $\lambda \to 0$ (δ_n, $\gamma_m \to \infty$ $(n, m \geqslant 1)$). Для матрицы A известна обратная матрица A^{-1} [9]

$$A^{-1} = \{\tau_{nm}\}, \quad \tau_{nm} = \frac{(2n-1)!!\,(2m-3)!!}{h(2n-2)!!\,(2m-2)!!\,(2n-2m+1)}$$

и, следовательно, решение системы (3.3), а соответственно и главный член асимптотики решения системы (3.2) примут вид

$$y_n^\circ = \frac{a(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.4}$$

$$y_n^k = e^{\gamma_k a}\sqrt{\frac{\gamma_k}{2\pi a}}\,\frac{(2n-1)!!\,(2k-3)!!}{(2n-2)!!\,(2k-2)!!\,(2n-2k+1)} \quad (n, k = 1, 2, \ldots)$$

Вывод второй формулы (3.4) очевиден, а первая формула (3.4) в таком виде получена, например, в работе [2].

Величина контактных напряжений под штампом и величина момента, приложенного к штампу, с использованием (1.8), (3.1), (2.14), (2.15), (3.4) при малых λ примут вид

$$\tau(r) = \frac{G\delta}{h}\left[r + a\sum_{n=1}^{\infty} z_n \frac{I_1(\delta_n r)(2n-1)!!}{I_1(\delta_n a)(2n)!!}\right] \tag{3.5}$$

$$M = \frac{2\pi a^3 G\delta}{\lambda}\left[\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} z_n \frac{(2n-1)!!\, I_2(\delta_n a)}{n(2n)!!\, I_1(\delta_n a)}\right]$$

$$z_n = 1 + \frac{\pi n}{a\delta h}\sqrt{\frac{R}{a}}\sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!(2n-2k+1)} e^{-\gamma_k(R-a)}$$

где x_k ($k = 1, 2, \ldots$) — решение бесконечной системы (1.10), в которой с учетом малости параметра λ, формул (3.1) и (3.4)

$$g_k = \delta \frac{(-1)^k 4a^2 h e^{-\gamma_k(R-a)}}{\pi^2\sqrt{Ra}(2k-1)}\left[\frac{1}{2k-1} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!(2m+2k-1)}\right] \tag{3.6}$$

$$a_{kn} = \frac{2(-1)^{k+n+1} e^{-(\gamma_k+\gamma_n)(R-a)}(2n-1)!!}{\pi(2k-1)(2n-2)!!} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)!!}{(2m-2)!!(2m-2n+1)(2m+2k-1)}$$

При получении формул (3.5), (3.6) использовалась малость параметра $\lambda = h/a$, если же, кроме этого, потребовать малости параметра $\varkappa = h/(R-a)$, то выражения (3.5), (3.6) для величин контактных напряжений и момента можно значительно упростить. Учитывая соотношение $\gamma_k = \pi(2k-1)(2h)^{-1}$, можно показать, что

$$z_n = 1 + \frac{\pi}{a\delta h}\sqrt{\frac{R}{a}}\frac{n}{(2n-1)} x_1 e^{-\frac{1}{2}\pi/\varkappa}(1 + O(e^{-\pi/\varkappa}))$$

$$x_1 = g_1(1 + O(e^{-\pi/\varkappa})) \quad \left(\varkappa = \frac{h}{R-a} \ll 1\right)$$

Подставив сюда вместо x_1 значение g_1 из (3.6), получим

$$z_n = 1 + \frac{4n}{\pi(2n-1)} e^{-\pi/\varkappa}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!(2m+1)}\right)(1 + O(e^{-1/\varkappa})) \tag{3.7}$$

Формулы (3.5), (3.7) дают простое асимптотическое решение задачи при малых значениях параметров λ и $\varkappa$.

Учитывая, что $I_2(\delta_n a) I_1^{-1}(\delta_n a) \sim 1$ при малых λ, и взяв z_n в виде (3.7), вторую формулу (3.5) можно упростить, просуммировав в ней ряд. Получим

$$M = \pi G\delta a^3\left[\frac{1}{2\lambda} + \frac{2\ln 4}{\pi} + \frac{4}{\pi} e^{-\pi(R-a)/h}(1 + O(\lambda e^{-1/\varkappa})) + O(\lambda)\right] \tag{3.8}$$

Аналогично при малых λ и $\varkappa$ упрощается первая формула (3.5), если $0 \leqslant r \leqslant a$

$$\tau(r) = G\delta\left\{\frac{r}{h} + \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{a}{r}}\left[(1 - e^{-\pi(a-r)/h})^{-1/2} - 1 + \right.\right. \tag{3.9}$$
$$\left.\left. + e^{-\pi(R-r)/h}(1 - e^{-\pi(a-r)/h})^{-1/2}(1 + O(\lambda e^{-1/\varkappa})) + O(\lambda)\right]\right\}$$

Здесь явно выделена особенность при $r \to a$.

Таким образом, при малых значениях параметра λ для искомых величин задачи получено два набора формул: (3.5), (3.6), (1.10) и (3.8), (3.9). Первый набор связан с решением бесконечной системы (1.10), (3.6), второй набор с этим не связан, но учитывает малость параметра $\varkappa$. Об области применимости этих результатов сказано ниже.

4. Числовые примеры и анализ результатов. Исследуем численно безразмерные величины

$$M^* = {}^3/_{16}\,(G\delta a^3)^{-1}M, \quad \tau^*(\rho) = (G\delta)^{-1}\tau(\rho a) \quad (0 \leqslant \rho \leqslant 1) \tag{4.1}$$

характеризующие соответственно связь между приложенным к штампу моментом и углом поворота штампа и контактные напряжения под штампом, при разных значениях параметров $\lambda = h/a$ и $R^* = R/a$. При этом для вычисления величин M и $\tau(r)$ будем использовать алгоритмы и формулы, полученные в п. 2 и 3.

Метод больших λ (см. п. 2) позволяет с использованием ЭВМ находить с любой степенью точности величины M^* и $\tau^*(\rho)$ при $\lambda \geqslant 1$ и любых практически возможных R^*. Ограничение по λ связано со сходимостью рядов типа (2.11).

Бесконечную систему (1.10) — (1.12) будем решать методом урезания. Обозначим через n_1 число уравнений системы. Коэффициенты этой системы и величины (4.1) будем вычислять с точностью до членов порядка $O(\lambda^{-n_2})$. При этом n_1 и n_2 будем выбирать такими, чтобы погрешность окончательных результатов не превышала заданного значения. Заметим, что выбор значения n_2 зависит только от параметра λ, а выбор значения n_1 зависит от значения величины $(R - a)/h$. При этом чем меньше λ, тем большим должно быть n_2, и чем меньше $(R - a)/h$, тем большим должно быть n_1.

Например, точность в 0.01% при $\lambda = 1$ достигается при $n_2 = 60$, при $\lambda = 1.5$ $n_2 = 10$, а точность в 1% при $\lambda = 1$ достигается при $n_2 = 20$. Для того чтобы при $(R - a)/h > 0.1$ погрешность не превышала 0.1%, необходимо брать $n_1 \leqslant 5$, хотя уже при $(R - a)/h > 0.2$ и $n_1 = 5$ погрешность не будет превышать 0.0003%. Точность в 1% при $(R - a)/h = 0.0007$ достигается, если $n_1 = 30$, при $(R - a)/h = 0.07$ $n_1 = 5$.

Использование метода малых λ (см. п. 3) позволяет находить приближенное значение величин M^* и $\tau^*(\rho)$ по формулам (3.5), (3.6), (1.10) с использованием ЭВМ с погрешностью, не превышающей 3% при $\lambda \leqslant 0.5$. Если $0.5 < \lambda < 1$, то для вычисления коэффициентов бесконечной системы (1.10) необходимо методом урезания находить решение системы (3.2), асимптотически не упрощая ее, как это было сделано в работе [2]. Относительно выбора n_1 здесь справедливо сказанное выше.

Формулы (3.8), (3.9) позволяют вычислять M^* и $\tau^*(\rho)$ с погрешностью, не превышающей 3% при $\lambda < 0.5$ и $(R - a)/h > 0.5$.

Ниже приведены значения величин M^* и $\tau^*(\rho)$ при разных значениях параметров ρ, λ и R^*

$R^* = 1.3;\ 1.5$	1.3	1.5	1.5	1.5	1.5
$\lambda = 0.1$	1.5	0.3	1.0	1.0[2]	1.5
$\tau^*(0.1) = 1.000$	0.1492	0.3336	0.1469	0.1457	0.1417
$\tau^*(0.3) = 3.000$	0.4689	1.002	0.4572	—	0.4442
$\tau^*(0.5) = 5.000$	0.8697	1.679	0.8380	0.8336	0.8188
$\tau^*(0.7) = 7.000$	1.503	2.422	1.422	—	1.400
$\tau^*(0.9) = 9.235$	3.266	3.853	3.007	2.983	2.983
$\tau^*(0.95) = 10.77$	4.864	5.117	4.441	—	4.412
$M^* = 3.448$	1.244	1.464	1.145	1.021	1.135
$R^* = 1.01$	1.01	1.05	1.05	1.1	1.1
$\lambda = 0.1$	1.0	0.1	1.5	0.1	1.5
$\tau^*(0.1) = 1.000$	0.1782	1.000	0.1709	1.000	0.1646
$\tau^*(0.3) = 3.000$	0.5689	3.000	0.5437	3.000	0.5258
$\tau^*(0.5) = 5.000$	1.097	5.000	1.038	5.000	0.9913
$\tau^*(0.7) = 7.001$	2.082	7.001	1.911	7.001	1.778
$\tau^*(0.9) = 9.606$	6.068	9.336	4.896	9.255	4.220
$\tau^*(0.95) = 12.79$	11.09	11.29	7.966	10.87	6.524
$M^* = 4.131$	2.940	3.606	1.973	3.478	1.627

При $\lambda \geqslant 1$ использованы результаты п. 2, когда решение интегрального уравнения (1.9) находилось методом больших λ, в этом случае значения M^* и τ^* (ρ) приведены с точностью до четырех цифр. При $\lambda < 1$ использованы результаты п. 3. В этом случае чем меньше λ, тем точнее результат.

Числовые результаты хорошо согласуются с результатами работы [2].

Автор благодарит В. М. Александрова за внимание к работе и обсуждение результатов.

Поступила 23 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* Метод однородных решений в контактных задачах теории упругости для тел конечных размеров. Изв. Северо-Кавказск. научн. центра высшей школы. Сер. естеств. наук, 1974, № 4.
2. *Александров В. М., Чебаков М. И.* Метод парных рядов по функциям Бесселя в смешанных задачах теории упругости для круглой плиты. ПММ, 1977, т. 41, вып. 3.
3. *Нуллер Б. М.* Контактные задачи для упругого полубесконечного цилиндра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
4. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
5. *Александров В. М., Чебаков М. И.* Смешанные задачи механики сплошных сред, связанные с интегральными преобразованиями Ханкеля и Мелера — Фока. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
6. *Чебаков М. И.* О дальнейшем развитии «метода больших λ» в теории смешанных задач. ПММ, 1976, т. 40, вып. 3.
7. *Александров В. М., Чебаков М. И.* Об одном методе решения парных интегральных уравнений. ПММ, 1973, т. 37, вып. 6.
8. *Бабешко В. А., Гарагуля В. А.* Асимптотическое решение задачи о действии штампа, круглого в плане, на упругий слой. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 1.
9. *Бабешко В. А.* Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.