Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТЫХ, НАГРУЖЕННЫХ ПО ГРАНИЧНЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ ПЛАСТИН

В. Н. Максимович

(Львов)

Строится общее решение задачи теории упругости для пластины постоянной толщины при условии, что к граничным плоскостям приложены нормально усилия и пластина неравномерно нагрета. Решение получено в результате применения к дифференциальным уравнениям бесконечно высокого порядка, полученным А. И. Лурье символическим методом [1,2], формулы разложения М. Е. Ващенко-Захарченко — путем раздельного рассмотрения симметричных и антисимметричных относительно срединной плоскости задач теории упругости: 1) при постоянной температуре и заданных усилиях на граничных плоскостях; 2) при заданном неравномерном нагреве и отсутствии усилий. Приводятся простые формулы для определения напряженного состояния в случае медленно изменяющихся внешней нагрузки и температуры неограниченной пластины. Для ограниченной пластины общее решение при отсутствии усилий на граничных плоскостях и нагрева приводится к решению А. И. Лурье [1].

1. Пусть на граничных плоскостях равномерно нагретого слоя толщины $2h$ заданы напряжения

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{\pm}, \quad z = \pm h$$

Проведем раздельное решение симметричной и антисимметричной задач, используя представление $\sigma_{\pm} = q \pm p$.

1°. Упругодеформированное состояние в симметричном случае ($p = 0$) на основании работы [2] может быть представлено в виде

$$u = -\frac{\partial}{\partial x} f_1(d,\zeta)\varkappa, \quad w = -\frac{d^2}{h} f_2(d,\zeta)\varkappa \tag{1.1}$$

$$\sigma_{xx} = 2G\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_1(d,\zeta) + \frac{2\nu}{h^2} d^2 f_0(d,\zeta)\right]\varkappa, \ \sigma_{zz} = 2G\frac{d^2}{h^2} f_3(d,\zeta)\varkappa$$

$$f_0(d,\zeta) = \cos d\zeta \sin d/d, \ f_1(d,\zeta) = g(d,\zeta) - (1-2\nu) f_0(d,\zeta)$$

$$f_2(d,\zeta) = [-d\cos d \sin d\zeta + d\zeta \cos d\zeta \sin d - 2(1-\nu) \times$$
$$\times \sin d\zeta \sin d] d^{-2}$$

$$f_3(d,\zeta) = g(d,\zeta) + f_0(d,\zeta), \quad g(d,\zeta) = \cos d\zeta \cos d +$$
$$+ \zeta \sin d\zeta \sin d$$

$$\zeta = \frac{z}{h}, \quad \varkappa = \frac{h^2}{2G}\frac{q}{d^2(1+\sin 2d/2d)}, \quad d^2 = h^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

Перемещения v и напряжения σ_{yy} здесь и ниже могут быть получены из соотношений для u и σ_{xx} путем замены в них $\partial / \partial x$ на $\partial / \partial y$ и $\partial / \partial y$ на $\partial / \partial x$. Другие компоненты тензора напряжений можно найти на основании найденных u, v, w.

В формулы (1.1) входят функции вида $\Phi = f(d)\varkappa$, причем $f(d)$ — целая функция аргументов d и d^2. Видно, что функция Φ — решение дифференциального уравнения бесконечно высокого порядка

$$d^2(1 + \sin 2d / 2d)\,\Phi = h^2 f(d) q / 2G \tag{1.2}$$

Для решения уравнения (1.2) применим формулу разложения М. Е. Ващенко-Захарченко [3,4]. Тогда для функций $f = f_j(d, \zeta)$ $(j = 0, \ldots, 3)$ получим

$$\frac{f(d)\,q}{d^2(1 + \sin 2d / 2d)} = \sum_i \frac{f(\alpha_i)\,q_i}{\cos^2\alpha_i} + \frac{f(0)\,q_0}{2} \tag{1.3}$$

Здесь α_i — корни алгебраического уравнения $1 + \sin 2\alpha / 2\alpha = 0$, причем $\operatorname{Re}\alpha_i > 0$; функции q_i — решения уравнений второго порядка $(d^2 - \alpha_i^2)q_i = q$ при $i \neq 0$ и $d^2 q_0 = q$.

Рассмотрим далее лишь случай неограниченной пластины. В этом случае функции q_k $(k = 0, 1, \ldots)$ определяются однозначно из дополнительного условия, что $q_i \to 0$ $(i \neq 0)$, $\partial q_0 / \partial x \to 0$, $\partial q_0 / \partial y \to 0$ при x, $y \to \infty$.

Используя формулу (1.3), получим

$$u = -\frac{h^2}{2G}\frac{\partial}{\partial x}(Q_1 + \nu q_0), \quad w = -\frac{h}{2G}[d^2 Q_2 - (1 - \nu)\zeta q] \tag{1.4}$$

$$\sigma_{xx} = -h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}Q_1 + 2\nu d^2 Q_0 + \nu h^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}q_0, \quad \sigma_{zz} = d^2 Q_3 + q$$

$$Q_j = \sum \frac{f_j(\alpha_i, \zeta)\,q_i}{\cos^2\alpha_i}$$

Видно, что для ограниченных функций q ряды сходятся.

Пусть $q(x, y)$ — медленно изменяющаяся в зависимости от x / h, y / h функция (или h — малая величина), имеющая непрерывные вторые производные. Тогда приближенным решением уравнения $(d^2 - \alpha_i^2)q_i = q$ будет $q_i \approx -q / \alpha_i^2$. Учитывая формулу

$$\sum_i \frac{f(\alpha_i)}{\alpha_i^2\cos^2\alpha_i} = -\left(\frac{f}{6} + \frac{f''}{4}\right)\Big|_{d=0}$$

(которая следует из формулы (1.3), если положить формально $d = 0$, $f = 1$), получим, например

$$Q_1 = \nu h^2\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}\frac{\zeta^2 - {}^1/_3}{2} + Q_1^*, \quad Q_3 = Q_3^*$$

$$Q_j^* = \sum_i \frac{f_j(\alpha_i, \zeta)(q_i + q / \alpha_i^2)}{\cos^2\alpha_i}$$

Отсюда находим

$$\sigma_{xx} = \nu h^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}q_0 - \frac{h^2}{2}\left(\zeta^2 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)q +$$

$$+ d^2(-Q_1^* + 2\nu Q_0^*) + h^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}Q_1^*$$

Ряды для Q_j^* будут при этом сходиться быстрее. Для весьма медленно изменяющихся функций q приближенно можно положить $Q_j^* \approx 0$.

Для достаточно гладких и медленно изменяющихся функций q можно строить и более точное (асимптотическое) решение, положив $q \approx -q / \alpha_i^2 - d^2 q / \alpha_i^4 - \ldots$ и суммируя возникающие при этом ряды. Такие приближенные выражения для Q_j получаются также путем непосредственного разложения в ряды по степеням d функций

$$\left[\frac{f_j(d, \zeta)}{d^2(1+\sin 2d/2d)} - \frac{f_j(0, \zeta)}{2d^2}\right] q$$

Пусть теперь q — уже не медленно изменяющаяся функция. Выписанное приближенное решение для q_i будет справедливым (для достаточно гладких функций $q(x, y)$ и в этом случае, но только при больших номерах i. Пусть такое решение — достаточно точное при $i \geqslant m$. Асимптотическое выражение для Q_j тогда будет иметь вид

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f_j(\alpha_i, \zeta)\, q_i}{\cos^2\alpha_i} + (a_{0j} + a_{2j} d^2 + \ldots)\, q$$

Здесь a_{kj} — коэффициенты разложения в ряд по степеням d функций

$$\frac{f_j(d, \zeta)}{d^2(1+\sin 2d/2d)} - \frac{f_j(0, \zeta)}{2d^2} - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{f_j(\alpha_i, \zeta)}{\cos^2\alpha_i} \frac{1}{d^2 - \alpha_i^2}$$

Данный способ получения приближенного решения аналогичен обычному методу улучшения сходимости рядов.

Оценим теперь сходимость рядов, через которые выражено решение. Для этого представим функции q_i в виде ($K_0(x)$ — функция Макдональда, D — область $-\infty < x_0,\ y_0 < \infty$)

$$q_i(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_D q(x_0, y_0)\, K_0(\alpha_i r)\, dx_0 dy_0 \quad \left(r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right) \tag{1.5}$$

Формула (1.5) может быть записана так:

$$q_i(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} q_*(x, y; \eta, \varphi)\, K_0(\alpha_i \eta)\, \eta\, d\varphi\, d\eta \tag{1.6}$$

$$q_*(x, y; \eta, \varphi) = q(x + \eta\cos\varphi,\ y + \eta\sin\varphi)$$

Разобьем интеграл по η на два интеграла: от 0 до l и от l до ∞, выбирая постоянную l такой, чтобы функция q_* при $\eta < l$ была непрерывной вместе с двумя первыми производными по η. Предположим также, что q — ограниченная в D функция. На участке $(0, l)$ функцию q_* представим в виде ряда Маклорена по переменной η

$$q_*(x, y; \eta, \varphi) = q(x, y) + \eta \left.\frac{\partial q_*}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} + \frac{\eta^2}{2} \left.\frac{\partial^2 q_*}{\partial \eta^2}\right|_{\eta=\eta_*}$$

$$0 \leqslant \eta_* \leqslant l$$

а на участке (l, ∞) используем асимптотическое представление

$$K_0(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} \left(1 - \frac{1}{8x} + \ldots\right), \quad x \gg 1$$

В результате имеем представление для функций q_n при больших n

$$q_n(x, y) = -q / \alpha_n^2 + O(\alpha_n^{-4}) + O(\exp(-\alpha_n l)) \tag{1.7}$$

Подчеркнем, что точка (x, y) принадлежит такой области D_0, в которой $q(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая по x и y функция, а l — расстояние от точки (x, y) до границы области D_0.

Учитывая формулу (1.7), а также оценки $\alpha_n = O(n)$, $\exp(i\zeta\alpha_n) = O(\alpha_n^{\zeta/2})$, видим, что будут сходиться как ряды, через которые выражены функции Q_j и Q_j^*, так и ряды, полученные путем почленного дифференцирования их по x и y. Ряды, через которые выражены функции Q_j^*, можно дифференцировать почленно по x и y дважды. Таким образом, решение, выраженное через функции Q_j^*, как и указывалось выше, более удобное; при этом члены рядов для перемещений, полученных после почленного дифференцирования, будут при больших n иметь порядок n^{-3}, а члены в рядах для напряжений — порядок n^{-2}.

Можно для более гладких функций q получить решение в еще быстрее сходящихся рядах. Так, если функция q имеет четыре непрерывные производные по x и y в области D_0, то вместо формулы (1.7) получим

$$q_n(x, y) = -q/\alpha_n^2 - d^2q/\alpha_n^4 + O(\alpha_n^{-6}) + O(\exp(-\alpha_n l)) \quad (x, y) \in D_0$$

Поступая, как и выше, т. е. суммируя ряды и вводя в рассмотрение функции

$$Q_j^{**} = \sum_i \left(g_i + \frac{q}{\alpha_i^2} + \frac{d^2q}{\alpha_i^4}\right)\frac{f_j(\alpha_i\zeta)}{\cos^2\alpha_i}$$

получим для перемещений ряды, члены которых имеют при больших n порядок n^{-5} и для напряжений — порядок n^{-4}. Значительно быстрее сходятся ряды в области D_c, в которой $q = \text{const}$. Тогда на основании формул (1.4) и (1.5) с учетом асимптотического представления для функций $K_0(x)$ при больших x видим, что члены рядов, через которые определяются перемещения и напряжения в области D_c, при больших n будут иметь порядок $\exp(-\alpha_n\rho)$ (ρ — расстояние от точки (x, y) до границы области D_c).

2°. В антисимметричном случае ($q \equiv 0$) упругодеформированное состояние пластины может быть представлено в виде

$$u = -\frac{h^2}{2G}\frac{\partial}{\partial x}(P_1 + \omega_1), \quad w = \frac{h}{2G}(P_2 + \omega_2) \tag{1.8}$$

$$\sigma_{xx} = -h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(P_1 + \omega_1) + 2\nu d^2(P_0 + \omega_0)$$

$$\sigma_{zz} = d^2P_3 + \frac{3}{2}\left(\zeta - \frac{\zeta^3}{3}\right)p$$

$$P_j = \sum_i \frac{\varphi_j(\beta_i, \zeta)p_i}{\sin^2\beta_i}, \quad \omega_0 = -\frac{3}{2}\zeta p_0 + \frac{3}{2}\left(0{,}3\zeta + \frac{\zeta^3}{6}\right)d^2p_0$$

$$\omega_1 = 3(1-\nu)\zeta p_0 + [0.5(\nu-2)\zeta^3 + 0.3(2+3\nu)\zeta]d^2p_0$$

$$\omega_2 = 3(1-\nu)p_0 + [1{,}5\nu\zeta^2 - 0{,}3(8-3\nu)]d^2p_0$$

$$\varphi_0(d, \zeta) = -\cos d \sin d\zeta/d, \quad \varphi_1(d, \zeta) = (1-2\nu)\varphi_0(d, \zeta) + \psi(d, \zeta)$$

$$\varphi_2(d, \zeta) = 2(1-\nu)\cos d\zeta\cos d + d\,\zeta\sin d\zeta\cos d - d\sin d\cos d\zeta$$

$$\varphi_3(d, \zeta) = \psi(d, \zeta) + \varphi_0(d, \zeta), \quad \psi(d, \zeta) = \zeta\cos d\zeta\cos d + \sin d\zeta\sin d$$

Здесь функции p_i определяются из решения уравнений $(d^2 - \beta_i^2)p_i = p$ при $i \neq 0$, $d^4 p_0 = p$, β_i — корни уравнений $1 - \sin 2\beta / 2\beta = 0$, причем $\operatorname{Re} \beta_i > 0$.

Решение (1.8) получено способом, аналогичным примененному в п. 1.1°.

Из уравнений (1.8) видим, что уравнение для прогибов пластины может быть записано в виде

$$
\begin{aligned}
(1.9) \qquad & w = w_0 + w_* \\
& w_* = \frac{h}{2G} P_2, \quad d^4 w_0 = \frac{h}{2G} \{3(1-\nu)p + \\
& + [1.5\nu\zeta^2 - 0.3(8 - 3\nu)] d^2 p\}
\end{aligned}
$$

Формула (1.9) является обобщением, найденной приближенным способом уравнения для прогибов пластин средней толщины [5], где при этом получено $w_* = 0$.

Если p — медленно изменяющаяся функция переменных x / h и y / h, то $p_i \approx -p / \beta_i^2$. Суммируя, как и выше, ряды, получим при $\zeta = 1$

$$
P_1 = 0.063(1-\nu)p + P_1^*, \quad P_2 = 0.246(1-\nu)p + P_2^*
$$

$$
P_j^* = \sum_i \left(p_i + \frac{p}{\beta_i^2}\right) \frac{\varphi_j(\beta_i, \zeta)}{2\sin^2\beta_i}
$$

Для весьма медленно изменяющихся функций имеем $P_j^* \approx 0$. Исследование сходимости рядов может быть проведено так же, как и в п. 1.1°.

2. Рассмотрим задачу определения термоупругого состояния слоя в условиях неравномерного нагрева. Решение такой задачи проведено известным способом [2]: сначала определено частное решение уравнений термоупругости, не удовлетворяющее всем заданным (нулевым) граничным условиям, затем найдено корректирующее решение изотермической задачи.

Компоненты вектора перемещений и тензора напряжений, соответствующие частному решению, могут быть представлены в виде [2]

$$
u = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \tau_{zx} = 2G \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)
$$

$$
\sigma_{xx} = 2G\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T t\right), \quad \sigma_{zz} = -2G \frac{d^2}{h^2} F
$$

Здесь t — температура слоя, α_T — коэффициент линейного расширения, функция F определяется из уравнения

$$
(2.1) \qquad \Delta F = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T t, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{d^2}{h^2}
$$

1°. Пусть температура t слоя — симметричная относительно плоскости $z = 0$ функция. Тогда функцию t можно представить в виде

$$
(2.2) \qquad t = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n t_n \cos \mu_n \zeta
$$

$\varepsilon_n = 1$ при $n \geqslant 1$, $\varepsilon_0 = 0.5$, $\mu_n = \pi n$, $t_n = \int\limits_{-h}^{h} t \cos \mu_n \zeta \, dz$

Решением уравнения (2.1), удовлетворяющим условиям $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ при $z = \pm h$, тогда будет

$$F = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T h \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{t_n}{d^2 - \mu_n^2} \cos \mu_n \zeta \tag{2.3}$$

Здесь $1 / (d^2 - \mu_n^2)$ — оператор, обратный к оператору $d^2 - \mu_n^2$, т. е. если обозначить функцию $t_n / (d^2 - \mu_n^2)$ через t_n^*, то t_n^* определяется из уравнения $(d^2 - \mu_n^2) t_n^* = t_n$.

Отсюда видим, что напряжения, соответствующие корректирующему решению, должны удовлетворять условиям

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \quad \sigma_{zz} = \sigma_0, \quad z = \pm h$$

$$\sigma_0 = 2G \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \frac{d^2}{h} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \frac{t_n}{d^2 - \mu_n^2}$$

Таким образом, задача определения корректирующего решения сведена к задаче из п. 1 при $q = \sigma_0$.

В дальнейшем снова ограничимся нахождением только частного решения возникающих уравнений. Полученное решение будет общим только для бесконечного слоя. Входящие в формулы для перемещений и напряжений функции $f(d)\varkappa$ с помощью формулы разложения, учитывая, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \frac{t_n}{\alpha_i^2 - \mu_n^2} = \frac{\tau_i}{2\alpha_i \sin \alpha_i}$$

$$\tau_i = \int_{-h}^{h} t \cos \alpha_i \zeta \, dz$$

представим в виде

$$f(d)\varkappa = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T h \Big[\sum_i b_i f(\alpha_i) \frac{\tau_i}{d^2 - \alpha_i^2} + \tag{2.4}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(\mu_n) \frac{t_n}{d^2 - \mu_n^2} + \frac{f(0)}{4} \frac{t_0}{d^2} \Big], \quad b_i = -\frac{1}{2\cos\alpha_i}$$

Суммируя перемещения и напряжения, соответствующие частному и корректирующему решениям, получим

$$u = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T h \frac{\partial}{\partial x}\left(T_1 - \frac{1-\nu}{2}\frac{t_0}{d^2}\right) \tag{2.5}$$

$$w = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T h \left(-\frac{d^2}{h^2} T_2 + \int_0^{\zeta} t \, d\zeta - \frac{\nu\zeta}{2h} t_0\right)$$

$$\sigma_{xx} = 2G \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T h \left(-\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + 2\nu \frac{d^2}{h^2} T_0 - \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{t_0}{d^2} + \frac{t_0}{2h^2} - \frac{t}{h}\right)$$

$$\sigma_{zz} = 2G \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha_T}{h} d^2 T_3, \quad T_j = \sum_i b_i f_j(\alpha_i, \zeta) \frac{\tau_i}{d^2 - \alpha_i^2}$$

Рассмотрим случай, когда t (а значит, и функции τ_i) медленно изменяется в зависимости от переменных x / h, y / h. Тогда $\tau_i / (d^2 - \alpha_i^2) \approx$

$\approx -\tau_i / \alpha_i^2$. Функции T_j в этом случае могут быть представлены в простом виде. Ограничимся нахождением величины σ_{xx} при $\zeta = 1$. Имеем

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} T_1 + 2\nu \frac{d^2}{h^2} T_0 = -2 \frac{d^2}{h^2} B$$

$$B = \sum_i b_i \frac{\tau_i}{d^2 - \alpha_i^2} \approx \frac{1}{24} \int_{-h}^{h} t(1 + 3\zeta^2)\, dz$$

Здесь использованы соотношения ($f = f_j$, $j = 0, \ldots, 3$)

$$\sum_i \frac{f(\alpha_i)}{\alpha_i \sin \alpha_i (1 + \cos 2\alpha_i)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{f(\mu_n)}{\mu_n^2} + \frac{1}{8} [f(0) + f''(0)]$$

Таким образом, для медленно изменяющихся функций t при $\zeta = 1$

$$\sigma_{xx} \approx 2G \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T h \left[-\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{t_0}{d^2} + \frac{t_0}{2h^2} - \frac{t}{h} \Big|_{\zeta=1} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \int_{-h}^{h} t(1 + 3\zeta^2)\, dz \right]$$

2°. Аналогичным путем получено также решение для случая, когда температура — антисимметричная относительно $z = 0$ функция. Приведем без вывода формулы для перемещений и напряжений

$$u = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T h \frac{\partial}{\partial x} T_{1,1} + \frac{3}{2}(1+\nu)\zeta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_{0,1}}{d^2} \tag{2.6}$$
$$w = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T h T_{2,1} - \frac{3}{2}(1+\nu) \frac{\alpha_T}{h} \frac{\tau_{0,1}}{d^2}$$
$$\sigma_{xx} = 2G \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T h \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} T_{1,1} + 2\nu \frac{d^2}{h^2} T_{0,1} - \frac{t}{h} + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2} \frac{\zeta}{h^3} \tau_{0,1} - \frac{3}{2h}(1-\nu)\zeta \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\tau_{0,1}}{d^2} \right]$$
$$T_{j,1} = \sum_i b_{i,1} \varphi_j(\beta_j, \zeta) \frac{\tau_{i,1}}{d^2 - \beta_i^2}; \quad \tau_{i,1} = \int_{-h}^{h} t \sin \beta_i \zeta\, dz, \quad i \neq 0$$
$$\tau_{0,1} = \int_{-h}^{h} tz\, dz, \quad b_{i,1} = -\frac{1}{2 \sin \beta_i}$$

3. Рассмотрим ограниченную пластину, занимающую область Ω. Граница состоит из поверхностей $z = \pm h$ и цилиндрической поверхности Γ, уравнение которой имеет вид $\gamma(x, y) = 0$, $|z| < h$. Задача термоупругости для такой пластины при заданных на плоскостях $z = \pm h$ усилиях может быть сведена обычным путем к решению задачи теории упругости для ненагретой и ненагруженной по граничным плоскостям пластины, т. е. к задаче А. И. Лурье. При этом на поверхности Γ к заданным перемещениям или напряжениям добавляются дополнительные слагаемые, определяющиеся из решения задачи термоупругости для бесконечного слоя, в котором температура и напряжения при $z = \pm h$ в области Ω такие же, какими они были для конечной пластины, а вне области Ω температура и напряжения при $z = \pm h$ могут выбираться произвольным образом. Назовем такую задачу основной. Трудность, возникающая при

таком способе решения, состоит в нахождении достаточно простого решения задачи термоупругости для бесконечного слоя.

Отметим, что основная задача имеет простое решение, кроме известных случаев, (p = const, q = const, t = const, нагружение плиты с полостями на бесконечности и т. п.), также и тогда, когда температурное поле пластины стационарное. Это позволило авторам работ [6,7] получить эффективное решение ряда задач термоупругости для ограниченных плит и плит с полостями. Отметим, что полученные в данной работе в п. 1, 2 решения могут быть использованы для нахождения решения основной задачи.

Возможен и другой путь решения задачи — без предварительного определения упругодеформированного состояния основной задачи. Для этого обобщим формулы А. И. Лурье [1] на случай, когда $t \neq 0$, $p \neq 0$, $q \neq 0$. Предположим сначала, что на поверхности Г заданы напряжения или перемещения, а на плоскостях $z = \pm h$ приложены нормально усилия. Решение такой задачи может быть снова получено путем раздельного рассмотрения соответствующих симметричной и антисимметричной задач с последующим их суммированием.

Решение симметричной задачи в данном случае ($\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, $\sigma_{zz} = q$ при $z = \pm h$) складывается из трех слагаемых. Первое дается формулами (1.4), в которых о функциях q_i известно только то, что они служат решениями соответствующих дифференциальных уравнений. Два других слагаемых (обращающихся в нуль в случае бесконечной пластины) — бигармоническое и вихревое напряженно-деформированные состояния [1,8,9]. Решение в антисимметричном случае складывается из двух слагаемых. Первое дается формулами (1.8), второе — вихревое напряженно-деформированное состояние [1,8,9].

Аналогичным путем получим представление решения для ограниченной плиты в случае неравномерного нагрева. Общее решение складывается из решений (2.5) и (2.6), а также бигармонических и вихревых напряженных состояний, приведенных в работах [1,8,9]. Полученное в работе решение при $p = q = t = 0$ может быть приведено к виду, данному в [1,8,9].

Для решения конкретных задач по определению напряженного состояния неравномерно нагретых, нагруженных по граничным плоскостям пластин можно использовать с незначительными изменениями методы, разработанные в [6–10].

Поступила 26 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2.
2. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
3. *Ващенко-Захарченко М. Е.* Символическое исчисление и приложение его к интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений. Киев, 1862.
4. *Максимович В. Н., Пляцко Г. В.* К задаче определения нестационарных температурных полей в пластинах и оболочках. В сб.: Математические методы в термомеханике. Киев, «Наукова думка», 1978.
5. Справочник по теории упругости. Киев, «Будивельник», 1971.
6. *Ложкин В. Н.* Пространственная задача термоупругости для изотропных пластин. В сб.: Механика твердого тела, вып. 6. Киев, «Наукова думка», 1974.
7. *Космодамианский А. С., Ложкин В. Н., Шалдырван В. А.* Пространственная задача термоупругости для слоя, ослабленного цилиндрическими полостями. Доп. АН УССР. Сер. А, 1975, № 10.
8. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
9. *Ворович И. И., Малкина О. С.* Напряженное состояние толстой плиты. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
10. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Периодическая задача для толстой пластины с круговыми цилиндрическими полостями. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 1.