Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.3

МЕТОД РАССЛОЕНИЯ В ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

О. Д. Тананайко

(Ленинград)

Показано, что на основе некоторых упрощений, вносимых в физические и геометрические зависимости, можно достичь такого «расслоения» оболочки, при котором волокна каждого из двух слоев деформируются подобно тонким стержням, оси которых совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки. Подход к расчету оболочек, основанный на получаемых ниже соотношениях, назван «методом расслоения».

Вопрос о возможности представления расчетной схемы пластин и оболочек в виде набора пересекающихся взаимно ортогональных стержней интересовал, как известно [1], еще Л. Эйлера и Я. Бернулли. В связи с появлением современных быстродействующих вычислительных машин эта идея подробно обсуждалась в работах [2–5]. Был предложен [6] метод расчленения дифференциальных уравнений теории оболочек, с помощью которого оболочка сводится к четырехслойной и непрерывной на каждом слое квазистержневой системе. Иной вариант метода расчленения дан в [7]. Следует отметить, что для изгибаемых ортотропных пластин бездиагональная стержневая аналогия была, по существу, найдена значительно раньше [8].

При построении стержневых моделей наибольшую трудность представляет учет коэффициента Пуассона. На основе уравнений технической теории оболочек В. З. Власова было показано [9], что при задании всех тангенциальных граничных условий в усилиях цепные напряжения в оболочке не зависят от коэффициента Пуассона. Отсюда следует, что если тангенциальные граничные условия кинематические, то неточный учет упругих констант может заметным образом сказаться на напряжениях только вблизи опорного контура и не влияет на цепное напряженное состояние оболочки в целом. В связи с этим представляется возможным пренебречь влиянием коэффициента Пуассона в физических зависимостях между нормальными силами и соответствующими им деформациями. При рассмотрении же сдвигов срединной поверхности оболочки, а также ее изгиба и кручения корректный учет коэффициента Пуассона оказывается вполне осуществимым.

Запишем, как это делается обычно, потенциальную энергию деформации оболочки в виде суммы $U = U_\varkappa + U_\varepsilon$, где (все обозначения стандартны)

$$U_\varkappa = \frac{1}{2}\iint\limits_\Omega D\left[\varkappa_1^2 + 2\nu\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2 + 2(1-\nu)\chi^2\right] ds_1\, ds_2$$

$$U_\varepsilon = \frac{1}{2}\iint\limits_\Omega \left[\frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2) + Gh\omega^2\right] ds_1\, ds_2$$

Общность окончательных результатов не пострадает, если в качестве величин, характеризующих положение точки срединной поверхности в криволинейной системе координат, принять $\alpha_1 = s_1$ и $\alpha_2 = s_2$, где s_i —

длина дуги, отсчитываемая вдоль координатной линии $\alpha_{3-i} = \text{const}$ от некоторой кривой, целиком лежащей в той же поверхности; при этом параметры Ламе $A_1 = A_2 = 1 = \text{const}$, а деформации кривизны и кручения в $U_\varkappa$ таковы:

$$\varkappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial s_1^2} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial u}{\partial s_1} - \frac{u}{R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial s_1}$$

$$\varkappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial s_2^2} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial v}{\partial s_2} - \frac{v}{R_2^2}\frac{\partial R_2}{\partial s_2}$$

$$\chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial u}{\partial s_2} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial v}{\partial s_1}$$

Вторые слагаемые в выражениях для $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, а также второе и третье слагаемые в выражении для χ имеют порядок ε_i / R_j (предполагается, конечно, что все виды деформаций имеют соответственно одинаковые порядки малости, т. е., например, $\partial u / \partial s_1 \sim \partial u / \partial s_2 \sim \partial v / \partial s_1$ и т. д.). Один из результатов работы [10] состоит в том, что в формулах для параметров изгибной деформации допустимо без снижения порядка погрешности, определяемого применением гипотез Кирхгофа—Лява, отбрасывать слагаемые порядка ε_i / R_j. С учетом сказанного можно принять

$$U_\varkappa = \frac{1}{2}\iint\limits_\Omega \left[D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s_1^2} + \frac{R_{11}}{R_1^2}u\right)^2 + 2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s_1^2} + \frac{R_{11}}{R_1^2}u\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s_2^2} + \frac{R_{22}}{R_2^2}v\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s_2^2} + \frac{R_{22}}{R_2^2}v\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s_1 \partial s_2}\right)^2\right] ds_1 ds_2 \quad \left(R_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial s_j}\right)$$

Наряду с $U_\varkappa$ рассмотрим несколько отличающийся от него функционал

$$U_\varkappa^* = \frac{1}{2}\iint\limits_\Omega D\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s_1 \partial s_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s_2^2}\right)^2 + \right.$$
$$+ 2\left(\frac{R_{11}}{R_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s_1^2}u + \frac{R_{22}}{R_2^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s_2^2}v\right) + \left(\frac{R_{11}}{R_1^2}\right)^2 u^2 + \left(\frac{R_{22}}{R_2^2}\right)^2 v^2 +$$
$$\left. + 2\nu\left(\frac{R_{22}}{R_2^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s_1^2}v + \frac{R_{11}}{R_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s_2^2}u + \frac{R_{11}R_{22}}{R_1^2R_2^2}uv\right)\right] ds_1 ds_2$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что все уравнения Эйлера для $U_\varkappa^*$ (при варьировании по кинематическим параметрам) полностью совпадают с соответствующими уравнениями для $U_\varkappa$. Поэтому, имея в виду получить вариационным путем уравнения в перемещениях, будем при записи потенциальной энергии деформации пользоваться новым, более удобным для данного исследования функционалом (здесь оказывается существенным отсутствие в $U_\varkappa^*$ произведения $(\partial^2 w / \partial s_1^2) \times$ $\times (\partial^2 w / \partial s_2^2)$).

Учитывая геометрические зависимости для углов поворота нормали ϑ_1 и ϑ_2 и отбрасывая в выражении, связывающем эти углы со смешанной производной $\partial^2 w / \partial s_1 \partial s_2$, члены порядка ε_i / R_j, можем принять в функционале $U_\varkappa^*$

$$2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s_1 \partial s_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_2} + \frac{R_{12}}{R_1^2}u\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_1} + \frac{R_{21}}{R_2^2}v\right)^2$$

присоединяя в качестве дополнительных условий равенства

$$\vartheta_1 = -\frac{\partial w}{\partial s_1} + \frac{u}{R_1}, \quad \vartheta_2 = -\frac{\partial w}{\partial s_2} + \frac{v}{R_2}$$

Переходя к функционалу U_ε, можем пренебречь, в соответствии с оговоренным выше упрощением, влиянием коэффициента Пуассона, т. е. отбросить слагаемое $2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2$. Член, зависящий от сдвиговой деформации, запишем в виде

$$Gh\omega^2 = 2Gh\left[\left(\frac{\partial v}{\partial s_1} - \vartheta_n\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s_2} + \vartheta_n\right)^2\right]$$

где угол поворота элемента оболочки вокруг нормали выражается формулой [10]

$$\vartheta_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial s_1} - \frac{\partial u}{\partial s_2}\right)$$

При обычных выражениях для ε_1, ε_2 имеем

$$U_\varepsilon = \frac{1}{2}\iint\limits_\Omega \left\{E^*h\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s_1} + \frac{w}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_2} + \frac{w}{R_2}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + 2Gh\left[\left(\frac{\partial v}{\partial s_1} - \vartheta_n\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s_2} + \vartheta_n\right)^2\right]\right\} ds_1\, ds_2, \quad E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$$

Если на оболочку действуют распределенные нагрузки q_1, q_2 и q_n, а также распределенные моменты m_1, m_2, то потенциал (полная энергия) системы

$$\Pi = U - \iint\limits_\Omega [q_1 u + q_2 v + q_n w + m_1\vartheta_1 + m_2\vartheta_2]\, ds_1\, ds_2$$

причем можно считать, что с помощью дельта-функции в работу внешних нагрузок включены контурные силы и моменты, приложенные к незакрепленным кромкам.

Представим Π в виде суммы двух слагаемых

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2, \quad \Pi_i = U_{\varkappa i}{}^* + U_{\varepsilon i} + \Delta\Pi_i$$

Выпишем подробно только выражения для членов, образующих первое слагаемое

$$U_{\varkappa 1}^* = \frac{1}{2}\iint\limits_\Omega D\left[\left(\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial s_1{}^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta_2^{(1)}}{\partial s_1} + \frac{R_{21}}{R_2^2}v^{(1)}\right)^2 + \right.$$

$$+ 2\frac{R_{11}\partial^2 w^{(1)}}{R_1^2\,\partial s_1{}^2}u^{(1)} + \left(\frac{R_{11}}{R_1^2}u^{(1)}\right)^2 +$$

$$\left. + 2\nu\left(\frac{R_{22}}{R_2^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s_1^2}v^{(1)} + \frac{1}{2}\frac{R_{11}R_{22}}{R_1^2R_2^2}u^{(1)}v^{(1)}\right)\right] ds_1\, ds_2$$

$$U_{\varepsilon 1} = \frac{1}{2}\iint\limits_\Omega \left[E^*h\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial s_1} + \frac{w^{(1)}}{R_1}\right)^2 + 2Gh\left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial s_1} - \vartheta_n^{(1)}\right)^2\right] ds_1\, ds_2$$

$$\Delta\Pi_1 = -\iint\limits_\Omega \left[q_1 u^{(1)} + m_2\vartheta_2^{(1)} + \frac{1}{2}q_n w^{(1)}\right] ds_1\, ds_2$$

Здесь верхний индекс в обозначениях кинематических параметров указывает номер слоя (1 или 2), к которому относится данный параметр.

При введении функционалов $\Delta\Pi_1$ и аналогичного ему $\Delta\Pi_2$ к первому слою отнесена работа нагрузок q_1 и m_2, а ко второму — работа нагрузок q_2 и m_1. Работа нагрузок q_n поделена между двумя слоями поровну. Поскольку одноименные параметры обоих слоев должны быть равны между собой, то в окончательный минимизируемый функционал Φ включаются левые части соответствующих дополнительных условий с лагранжевыми множителями λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3

$$\Phi = \Pi + \iint\limits_{\Omega} \Big\{\lambda_1 (u^{(1)} - u^{(2)}) + \lambda_2 (v^{(1)} - v^{(2)}) +$$
$$+ \lambda_3 (w^{(1)} - w^{(2)}) + \mu_1 \left[\vartheta_1^{(2)} + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial s_1} - \frac{u^{(1)}}{R_1}\right] +$$
$$+ \mu_2 \left[\vartheta_2^{(1)} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial s_2^2} - \frac{v^{(2)}}{R_2}\right] + \mu_3 (\vartheta_n^{(1)} - \vartheta_n^{(2)})\Big\} ds_1 ds_2$$

Варьируя Φ по всем кинематическим параметрам и по лагранжевым множителям, получим полную систему уравнений для определения этих неизвестных. Укажем только результат варьирования по кинематическим параметрам, относящимся к первому слою (т. е. по $w^{(1)}$, $\vartheta_2{}^{(1)}$, $u^{(1)}$, $v^{(1)}$, $\vartheta_n{}^{(1)}$)

$$\begin{aligned}
(1) \qquad & \frac{\partial^2}{\partial s_1{}^2}\left[D\left(\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial s_1{}^2} + \frac{R_{11}}{R_1{}^2} u^{(1)} + \nu \frac{R_{22}}{R_2{}^2} v^{(1)}\right)\right] + \\
& + \frac{E^* h}{R_1}\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial s_1} + \frac{w^{(1)}}{R_1}\right) = \frac{1}{2} q_n - \lambda_3 + \frac{\partial \mu_1}{\partial s_1} \\
& - \frac{\partial}{\partial s_1}\left[D\left(\frac{\partial \vartheta_2^{(1)}}{\partial s_1} + \frac{R_{21}}{R_2{}^2} v^{(1)}\right)\right] = m_2 - \mu_2 \\
& - \frac{\partial}{\partial s_1}\left[E^* h\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial s_1} + \frac{w^{(1)}}{R_1}\right)\right] + D\left[\frac{R_{11}}{R_1{}^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s_1{}^2} + \right. \\
& \left. + \left(\frac{R_{11}}{R_1{}^2}\right)^2 u^{(1)} + \frac{\nu}{2}\frac{R_{11} R_{22}}{R_1{}^2 R_2{}^2} v^{(1)}\right] = q_1 - \lambda_1 + \frac{\mu_1}{R_1} \\
& - \frac{\partial}{\partial s_1}\left[2Gh\left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial s_1} - \vartheta_n^{(1)}\right)\right] + D\left[\frac{R_{21}}{R_2{}^2}\left(\frac{\partial \vartheta_2^{(1)}}{\partial s_1} + \frac{R_{21}}{R_2{}^2} v^{(1)}\right) + \right. \\
& \left. + \nu \frac{R_{22}}{R_2{}^2}\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial s_1{}^2} + \frac{\nu}{2}\frac{R_{11} R_{22}}{R_1{}^2 R_2{}^2} u^{(1)}\right] = q_2 - \lambda_2 \\
& 2Gh\left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial s_1} - \vartheta_n^{(1)}\right) = -\mu_3
\end{aligned}$$

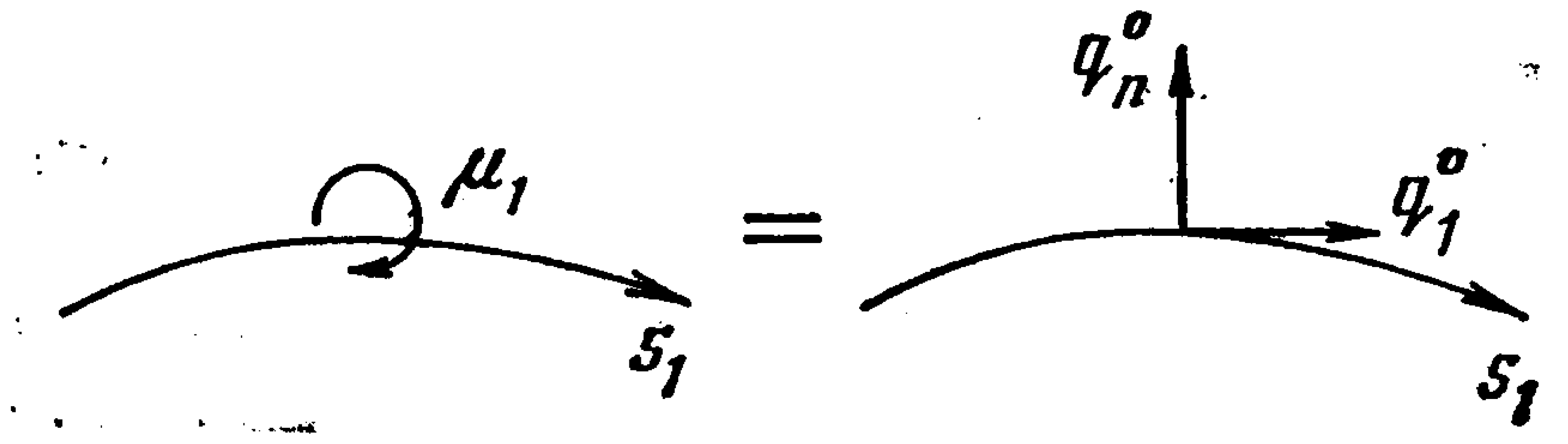
Первое из этих уравнений описывает изгиб бесконечно узких «стержней» первого слоя, второе — их кручение, третье — растяжение, четвертое и пятое — сдвиговую деформацию в срединной поверхности оболочки.

Выясним физический смысл лагранжева множителя μ_1. Известно, что при постановке граничных условий крутящий момент заменяется эквивалентными сдвигающей и поперечной силами. Совершенно аналогично внешний (по отношению к стержням первого слоя) погонный момент μ_1 может быть заменен нормальной нагрузкой $q_n{}^\circ = \partial\mu_1 / \partial s_1$ и касательной нагрузкой $q_1{}^\circ = \mu_1 / R_1$ (фиг. 1). Указанные нагрузки вошли в первое и третье уравнения (1).

Итак, на «стержень» первого направления в нормальной плоскости, содержащей орт $\mathbf{e}_1$, действует момент μ_1. При варьировании же по $\vartheta_1{}^{(2)}$

окажется, что в той же точке на стержень второго направления в той же плоскости действует момент $(-\mu_1)$. Иными словами, μ_1 — момент взаимодействия между стержнями двух слоев, обеспечивающий равенство углов поворота нормали вокруг орта $\mathbf{e}_2$. Аналогичную роль выполняет момент μ_2; λ_1, λ_2, λ_3 — тангенциальные и нормальная нагрузки взаимодействия; μ_3 — момент, действующий в плоскости, касательной к срединной поверхности.

Для того чтобы выяснить особенности работы «расслоенной» оболочки на сдвиг, рассмотрим стержень, ось которого совпадает с контуром поперечного сечения цилиндрической оболочки (т. е. положим $R_2 = \infty$), и



Фиг. 1

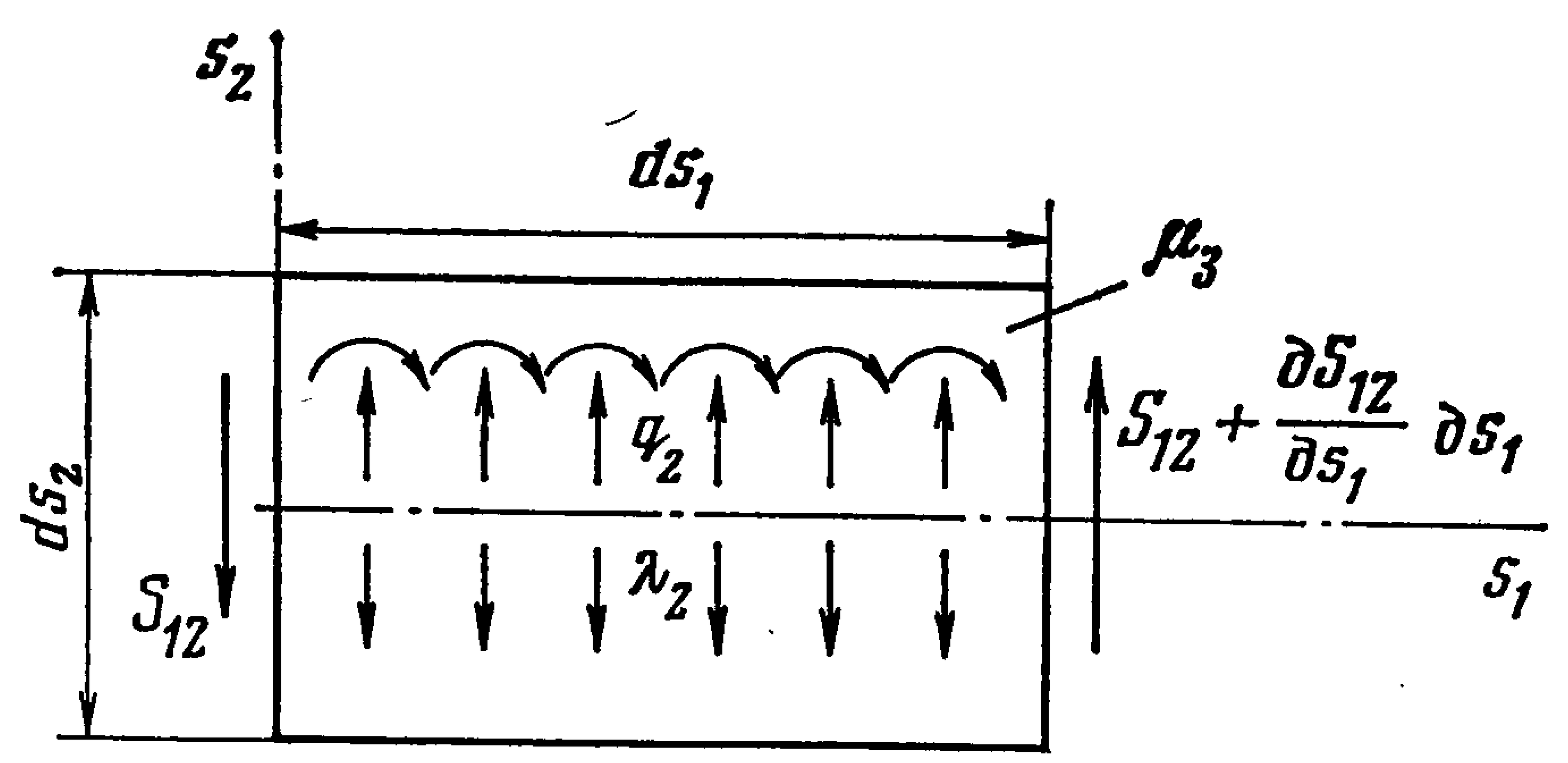
будем считать толщину оболочки h постоянной. Тогда четвертое уравнение примет вид

$$-2Gh\left(\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial s_1^2} - \frac{\partial \vartheta_n^{(1)}}{\partial s_1}\right) = q_2 - \lambda_2$$

или

$$-Gh\frac{\partial \omega}{\partial s_1} = q_2 - \lambda_2$$

где сдвиговая деформация ω при выполнении включенных в Ф дополнительных условий должна быть одинаковой для стержней обоих направ-



Фиг. 2

лений. Последнее уравнение показывает, что сдвигающие силы $S_{12} = Gh\omega$ (фиг. 2) уравновешиваются заданной нагрузкой q_2 и нагрузкой взаимодействия λ_2. Пятое уравнение можно представить в виде

$$S_{12} + \mu_3 = 0$$

откуда видно, что момент взаимодействия μ_3 компенсирует вращающий эффект сдвигающих сил. Таким образом, момент μ_3 заменяет для первого слоя действие парных к S_{12} сдвигающих сил S_{21}, так как в стержнях этого слоя последние отсутствуют.

Поскольку контурные силы были, как указывалось, включены в функционалы $\Delta\Pi_i$, то обеспечено выполнение статических граничных условий в смысле Сен-Венана: на тех кромках, где заданы нагрузки и варьируются перемещения, внутренние усилия в стержнях статически эквивалентны этим нагрузкам. Кинематические граничные условия легко учитываются путем придания стержням соответствующих опорных закреплений.

Следовательно, имеются два семейства стержней, между которыми в каждой точке срединной поверхности действуют шесть обычных (стержневых) усилий взаимодействия. Для сравнения укажем, что в методе расчленения [6] число усилий взаимодействия равно тринадцати, а при нулевом коэффициенте Пуассона во всех физических зависимостях — девяти.

Приведем три простых примера расслоения двумерных объектов.

1°. При действии на пластину нормальной нагрузки q_n положим $s_1 \equiv x$, $s_2 \equiv y$, $m_1 = m_2 = u = v = \vartheta_n = 0$. Уравнения, которым подчиняются стержни каждого из слоев, имеют вид

$$D\frac{\partial^4 w^{(1)}}{\partial x^4} = \frac{1}{2}q_n - \lambda_3 + \frac{\partial\mu_1}{\partial x}, \quad D\frac{\partial^2\vartheta_2^{(1)}}{\partial x^2} = \mu_2$$

$$D\frac{\partial^4 w^{(2)}}{\partial y^4} = \frac{1}{2}q_n + \lambda_3 + \frac{\partial\mu_2}{\partial y}, \quad D\frac{\partial^2\vartheta_1^{(2)}}{\partial y^2} = \mu_1$$

при дополнительных условиях

$$w^{(1)} = w^{(2)}, \quad \vartheta_2^{(1)} = -\frac{\partial w^{(2)}}{\partial y}, \quad \vartheta_1^{(2)} = -\frac{\partial w^{(1)}}{\partial x}$$

Эти уравнения описывают изгиб и кручение плоской ортогональной системы прямых балок и в совокупности эквивалентны уравнению Софи Жермен.

2°. Для осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки радиуса R с осью, параллельной оси z декартовой системы координат, при действии нормальной и продольной нагрузок получим

$$D\frac{d^4 w^{(1)}}{dz^4} = \frac{1}{2}q_n - \lambda_3, \quad -E^*h\frac{d^2 u^{(1)}}{dz^2} = q_1$$

$$\frac{E^*h}{R^2}w^{(2)} = \frac{1}{2}q_n + \lambda_3$$

Первые два уравнения описывают соответственно изгиб и растяжение продольных стержней, а третье — обжатие окружных стержней. Ясно, что совокупность первого и третьего уравнений (при условии $w^{(1)} = w^{(2)}$) эквивалентна обычному уравнению симметричного изгиба цилиндрической оболочки.

3°. Для пологой оболочки при нагрузке q_n примем $s_1 \equiv x_1$, $s_2 \equiv x_2$, $u \equiv u_1$, $v \equiv u_2$. Предположим также, что $R_{ij} \approx 0$. $\mu_i / R_i \approx 0 \quad \forall i, j$. Тогда для стержней каждого из направлений ($i = 1, 2$) получается система уравнений

$$D\frac{\partial^4 w^{(i)}}{\partial x_i^4} + \frac{E^*h}{R_i}\varepsilon_i - \frac{1}{2}q_n - (-1)^i\lambda_3 - \frac{\partial\mu_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2}$$

$$-D\frac{\partial^2\vartheta_{3-i}^{(i)}}{\partial x_i^2} + \mu_{3-i} = 0, \quad -E^*h\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial x_i} + (-1)^i\lambda_i = 0$$

$$2Gh\frac{\partial\omega^{(i)}}{\partial x_i} + (-1)^i\lambda_{3-i} = 0, \quad -Gh\omega^{(i)} + \mu_3 = 0$$

Из последнего соотношения следует $\omega^{(1)} = \omega^{(2)} \equiv \omega$ и, далее, $S_{12} = S_{21} = Gh\omega \equiv S$. Принимая $N_1 = E^*h\varepsilon_1$ и $N_2 = E^*h\varepsilon_2$, получаем возможность ввести функцию напряжений Ψ. Тем самым автоматически удовлетворяются тангенциальные уравнения равновесия, которые в данном случае могут рассматриваться как следствие из третьего и четвертого соотношений (2). Соответствующая комбинация первого и второго уравнений (2) (при $w^{(1)} = w^{(2)} \equiv w$, $\vartheta_{3-i}^{(i)} = -\partial w / \partial x_{3-i}$) дает

$$D\nabla^4 w - \frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} - \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} = q_n$$

Для получения второго разрешающего уравнения теории пологих оболочек учтем, что из геометрических зависимостей

$$\varepsilon_i = \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_i} + \frac{w^{(i)}}{R_i}, \quad \omega^{(i)} = 2\left[\frac{\partial u_{3-i}^{(i)}}{\partial x_i} + (-1)^i \vartheta_n^{(i)}\right]$$

при дополнительных требованиях $u_i^{(1)} = u_i^{(2)}$, $\vartheta_n^{(1)} = \vartheta_n^{(2)}$ следует условие совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}$$

откуда далее и получается обычным путем искомое соотношение. Таким образом, совокупность систем типа (2) для стержней двух направлений эквивалентна системе разрешающих уравнений теории пологих оболочек.

Отметим в заключение, что на основе указанного способа расслоения могут быть построены эффективные алгоритмы приближенного расчета оболочек как условных стержневых систем.

Поступила 18 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П.* История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. М., Гостехиздат, 1957.
2. *Филин А. П.* Расчет оболочек произвольного очертания на основе дискретной расчетной схемы. Тр. конф. по теории пластин и оболочек (Казань, 1960). Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1961.
3. *Чернева И. М.* Стержневая расчетная схема пластин и оболочек и метод конечных элементов. Тр. Ленингр. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1968, вып. 284.
4. *Лосаберидзе А. А.* Расчет арочных плотин. Тбилиси, «Мецниереба», 1966.
5. *Тананайко О. Д.* Об одной стержневой модели в теории тонких оболочек. Тр. Ленингр. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1973, вып. 349.
6. *Розин Л. А.* Метод расчленения в теории оболочек. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
7. *Хуберян К. М., Гудушаури И. И., Лосаберидзе А. А.* Теория расчета арочных плотин. В сб.: Исследования по строительной механике. Тбилиси, «Мецниереба», 1973.
8. *Massonet C.* Contribution au calcul des ponts à poutres multiples. Annales Travaux Public de Belgique, 1950, vol. 103, No. 3, 5, 6 [377—422, 749—796, 927—964].
9. *Монахенко Д. В.* Учет коэффициента Пуассона при моделировании напряженного состояния тонких оболочек. Тр. Ленингр. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1962, вып. 190.
10. *Koiter W. T.* A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. Proc. IUTAM sympos. theory thin elastic shells, Delft, 1959. Amsterdam, 1960.