

О НЕСКОЛЬКИХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДРЕНАЖА

В. Н. Эмих

(Новосибирск)

На схеме одиночной дрены (точечного стока) в пласте, неограниченном по глубине и простиранию, исследуется в непосредственной связи с физическими параметрами локальная депрессия, возникающая на свободной поверхности над дренажной при некоторых условиях, одним из которых является увеличение расхода дрены. Выясняется, что такое увеличение лимитируется определенным (при данной ширине незатопленного участка и глубине дренажного стока) значением, соответствующим известному [1] предельному случаю — с точкой заострения на кривой депрессии. Для более общих моделей плоских безнапорных течений условия существования локальной депрессии были сформулированы автором ранее [2-4] в терминах параметров конформного отображения; физические же предпосылки проявления этого эффекта удавалось наметить лишь ориентировочно.

Продолжение решения для упомянутой схемы по одному из параметров отображения приводит к появлению новых гидродинамических моделей: приток к точечному стоку, расположенному на поверхности вертикальной завесы, и переток через завесу или подземный выступ. В заключение рассматривается схема, обобщающая предыдущие: переток через завесу с частичным перехватом потока дренажным стоком, находящимся на поверхности завесы. В случаях, близких к предельному, устанавливаются простые приближенные зависимости между фильтрационными характеристиками потока и определяющими геометрическими параметрами. Выполнены числовые расчеты, результаты которых иллюстрируются графиками.

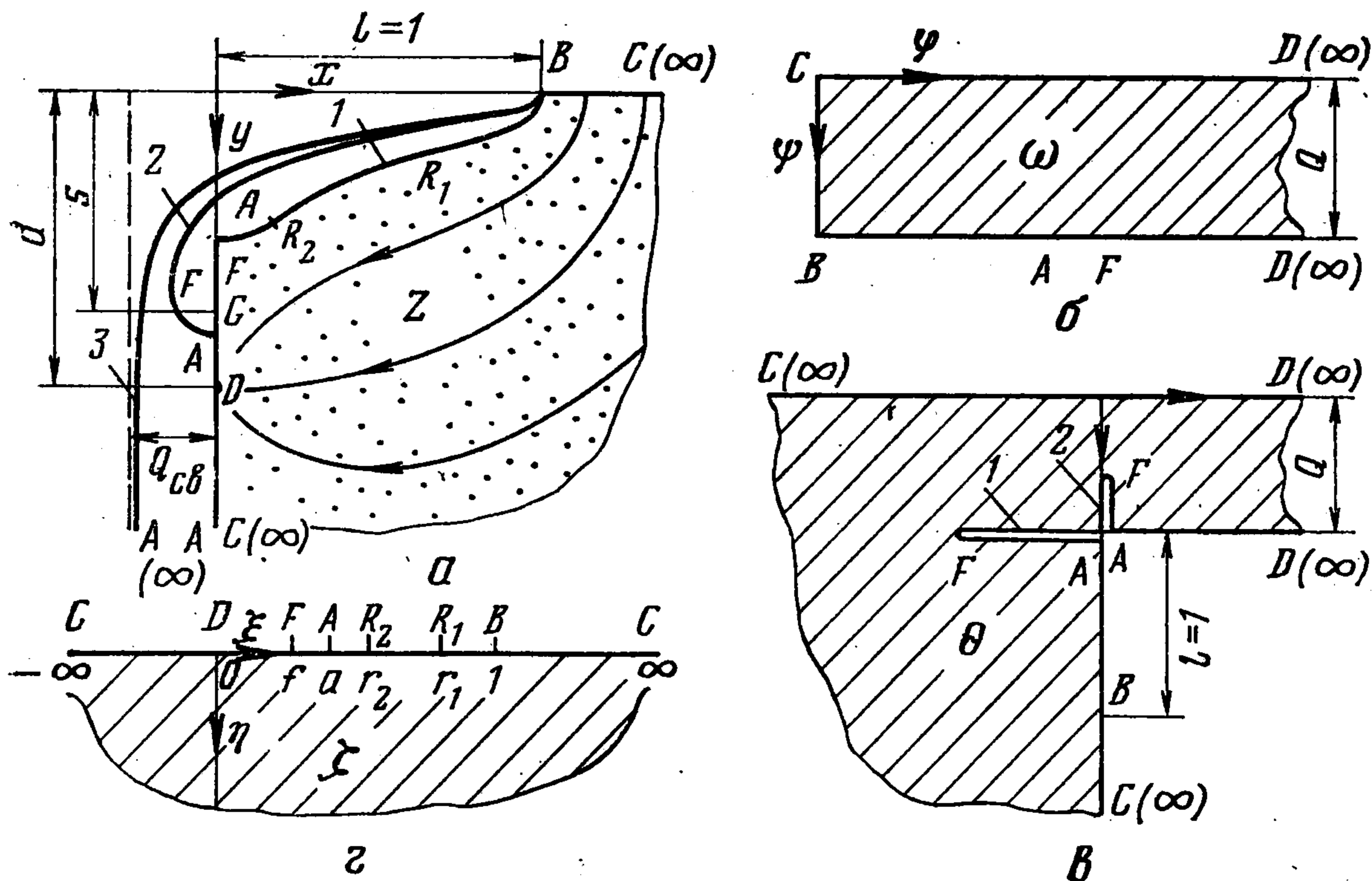
1. Модель 1. Рассмотрим плоскую безнапорную установившуюся фильтрацию в неограниченном (по глубине и простиранию) пласте от земной поверхности, затопленной всюду, кроме полосы шириной $2l$, к трубчатой дрене, заложенной в середине полосы. На фиг. 1, а схематично изображена правая половина области фильтрации, ограниченная в рассматриваемом случае кривой депрессии I ; дрена моделируется точечным стоком D , расход которого обозначим через $2Q$. Введем безразмерные величины: комплексную координату $z = x + iy$ и комплексный потенциал $\omega = \varphi + i\psi$, связанные с одноименными фактическими величинами z_f и ω_f соотношениями (κ — коэффициент фильтрации)

$$(1.1) \quad z = z_f / l, \quad \omega = \omega_f / (\kappa l)$$

Область ω представлена на фиг. 1, б.

При $Q = 0$ свободная поверхность AB грунтовых вод совпадает с плоскостью $y = 0$, а давление жидкости в пласте p возрастает с глубиной по гидростатическому закону: $p = \gamma y$ (γ — удельный вес воды). Если допустить, что при работе стока давление в каждой фиксированной точке области z , кроме самого стока, непрерывно связано с расходом, то с уче-

том сказанного выше можно заключить, что по крайней мере для малых расходов давление на некотором начальном интервале участка AD должно по-прежнему возрастать, а затем убывать вплоть до значения $p = -\infty$ в точке D . При этом в плоскости функции Жуковского $\theta = \omega + iz$ имеется разрез вдоль AD , обозначенный на фиг. 1, в цифрой 1; вершина разреза F соответствует точке максимума давления на участке AD .



Фиг. 1

Отображая области ω и θ на полуплоскость $\text{Im } \zeta \geq 0$ (фиг. 1, г) найдем

$$(1.2) \quad \omega = \frac{Q}{\pi} \int_{\zeta}^1 \frac{d\zeta}{\zeta \sqrt{1-\zeta}} + iQ = q \operatorname{arth} \sqrt{1-\zeta} + iQ, \quad q = \frac{2}{\pi} Q$$

$$(1.3) \quad \theta = i \frac{Q}{\pi} \frac{\sqrt{a}}{f} \int_a^{\zeta} \frac{(\zeta-f) d\zeta}{\zeta \sqrt{\zeta-a}} + iQ =$$

$$= iq \left(\frac{a}{f} \sqrt{\frac{\zeta}{a}-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\zeta}{a}-1} \right) + iQ$$

$$(1.4) \quad z = i(\omega - \theta) = \frac{q}{2} \left[\frac{\sqrt{a}}{f} \int_a^{\zeta} \frac{(\zeta-f) d\zeta}{\zeta \sqrt{\zeta-a}} + i \int_{\zeta}^1 \frac{d\zeta}{\zeta \sqrt{1-\zeta}} \right] =$$

$$= q \left[\left(\frac{a}{f} \sqrt{\frac{\zeta}{a}-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\zeta}{a}-1} \right) + i \operatorname{arth} \sqrt{1-\zeta} \right]$$

На участке AC ($\zeta < a$) имеем исходя из (1.4)

$$(1.5) \quad y = q \left(\frac{a}{f} \sqrt{1-\frac{\zeta}{a}} - \ln \frac{1 + \sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{a} + \sqrt{a-\zeta}} \right)$$

Положим в (1.4) $\zeta = 1$, $z = 1$, а в (1.5) $\zeta = 0$, $y = d$, задавая тем самым ширину незатопленной полосы и глубину заложения дренажного стока; в результате получим следующую систему уравнений относительно

параметров a и f :

$$(1.6) \quad q(\alpha\lambda - \operatorname{arctg} \alpha) = 1$$

$$(1.7) \quad q(\lambda + \ln \sqrt{1 + \alpha^2}) = d \quad \left(\alpha = \sqrt{\frac{1}{a} - 1}, \quad \lambda = \frac{a}{f} \right)$$

Исследуем картину течения в зависимости от расхода дрены при фиксированных геометрических параметрах, отправляясь от невозмущенного состояния $q = 0$, для которого имеем с учетом (1.7)

$$(1.8) \quad z = \sqrt{\frac{\zeta - a}{1 - a}}, \quad \omega = 0, \quad \theta = iz; \quad a = a_0 = \frac{d^2}{1 + d^2}$$

$$f = f_0 = 0, \quad \lambda = \lambda_0 = \infty$$

Исходя далее из системы (1.6), (1.7) и обозначая штрихом дифференцирование по q , найдем

$$(1.9) \quad f = a \frac{\alpha d - 1}{\ln \sqrt{1 + \alpha^2} + d \operatorname{arctg} \alpha}, \quad q = \frac{\alpha d - 1}{\alpha \ln \sqrt{1 + \alpha^2} + \operatorname{arctg} \alpha}$$

$$\lambda = \frac{d}{q} - \ln \sqrt{1 + \alpha^2}$$

$$(1.10) \quad a' = - \frac{2a^2\alpha(\alpha \cdot \ln \sqrt{1 + \alpha^2} + \operatorname{arctg} \alpha)}{q(\lambda - 1)}, \quad f' = \frac{a'}{2\lambda} + \frac{f^2}{q^2}(\alpha + d)$$

В силу последнего равенства (1.8) и непрерывной зависимости λ от q имеем $\lambda > 1$ в некотором конечном интервале возрастания расхода дрены (от исходного значения $q = 0$). При этом, согласно (1.10), $a' < 0$ и, следовательно, при каждом значении q в упомянутом интервале параметры a и f однозначно определяются из системы (1.6) и (1.7) или из равносильной ей системы первых двух уравнений (1.9). Из (1.9) и (1.10) следует также, что λ монотонно убывает с ростом q , и при некотором значении $q = q_*$ получим $\lambda = 1$, т. е. $a = f = a_*$; значения a_* и q_* определяются соответственно из первого и второго соотношений (1.9) при $a = f$. Итак, при $q = q_*$ точка F совместится с точкой A кривой депрессии и вдоль AD получим, используя (1.3), следующую зависимость для давления:

$$(1.11) \quad p/\gamma = -q_* (\operatorname{arth} \sqrt{1 - \zeta/a_*} - \sqrt{1 - \zeta/a_*}) < 0, \quad 0 < \zeta < a_*$$

Для кривой депрессии AB , где $d\omega = dy$, найдем согласно (1.2) — (1.4)

$$(1.12) \quad \frac{dy}{dx} = i \frac{d\omega}{d\theta} = - \frac{f}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{\zeta - a}}{(\zeta - f)\sqrt{1 - \zeta}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{f^2}{qa} \frac{\zeta P(\zeta)}{(\zeta - f)^3 (1 - \zeta)^{3/2}}$$

$$(1.13) \quad P(\zeta) = 2\zeta^2 - (1 + 3a)\zeta + [(a - f) + a(1 + f)] =$$

$$= 2(\zeta - r_1)(\zeta - r_2)$$

$$r_{1,2} = a + (1 - a \pm \sqrt{D})/4, \quad D = (1 - a)D_1$$

$$D_1 = 1 + 8f - 9a$$

Легко проверить, что $r_{1,2} \in (a, 1)$ при $D > 0$. Обращаясь к (1.12), видим, что в этом случае кривая AB имеет две точки перегиба $R_1(r_1)$ и $R_2(r_2)$ (фиг. 1, а), ограничивающие на ней участок выпуклости; на участке AR_2 и R_1B кривая депрессии вогнута. В случае же $D < 0$ кривая депрессии вогнута на всем своем протяжении.

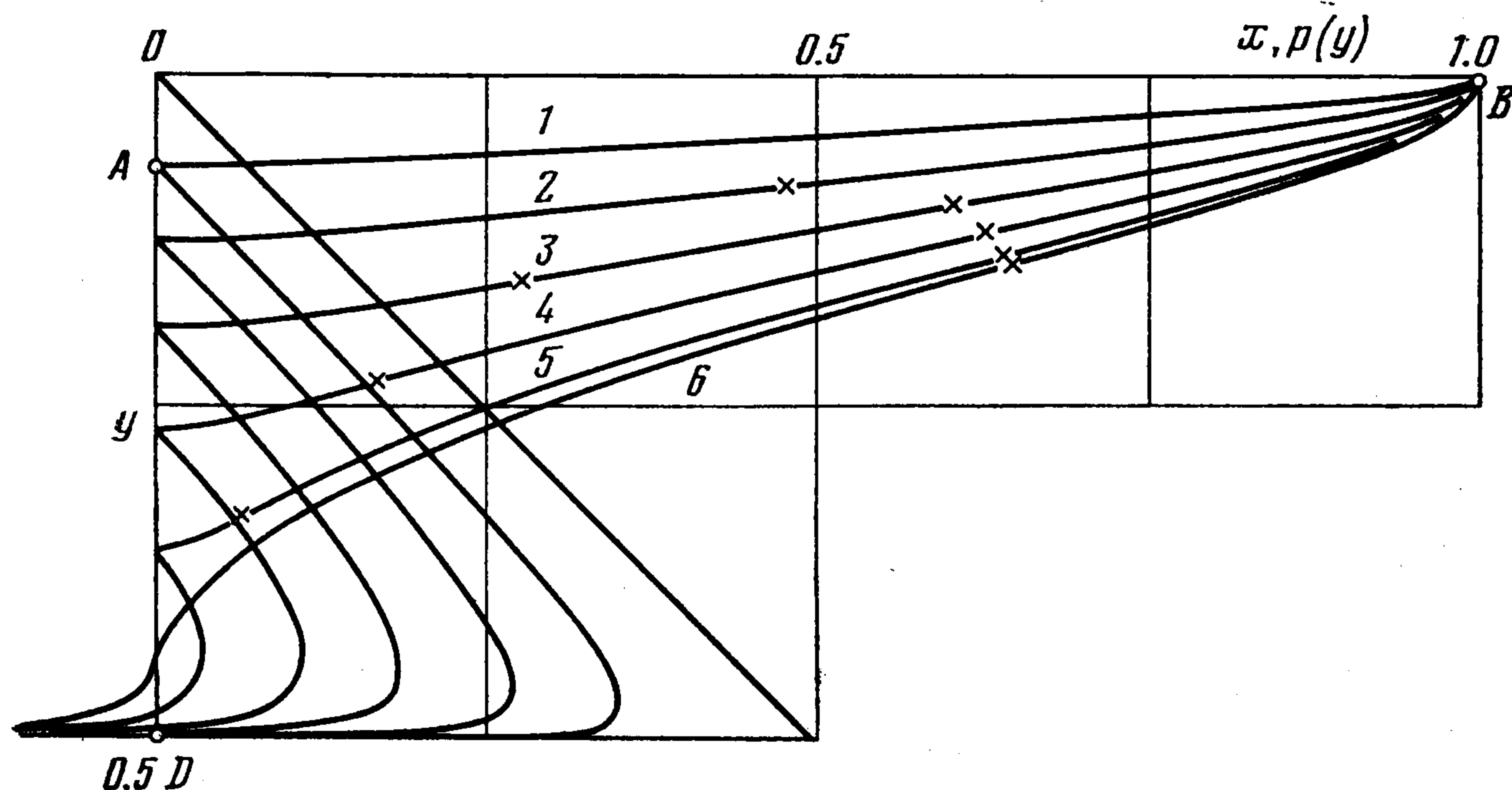
Согласно (1.13), $\operatorname{sign} D = \operatorname{sign} D_1$. В силу (1.10) выражение D_1 монотонно возрастает с ростом q и заведомо положительно при $q \approx q_*$ ($a \approx f$).

С другой стороны, при малых q получаем $D_1 \approx 1 - 9a_0$ (см. (1.8)), в связи с чем возникает следующая альтернатива:

а) $a_0 < 1/9$ ($d < \sqrt{1/8}$); имеем $D > 0$ при $0 \leq q \leq q_*$;

б) $a_0 > 1/9$ ($d > \sqrt{1/8}$); в этом случае $D < 0$ при $0 \leq q < q_r$, $D > 0$ при $q_r < q \leq q_*$. Величина q_r определится из равенства (1.9) при $f = (1 - 9a_0)/8$ ($D_1 = D = 0$).

С физической точки зрения сказанное означает, что если ширина $2l$ дренируемого (незатопленного) участка земной поверхности превышает



Фиг. 2

глубину d заложения дренажного стока более чем в $4\sqrt{2}$ раза, то во всем интервале $(0, q_*)$ значений q кривая депрессии имеет точки перегиба R_1 и R_2 . В противоположном случае она остается вогнутой, пока $q < q_r$, монотонно выполаживаясь по мере удаления от затопленной поверхности к дрене; при последующем возрастании q на AB в зоне дрены появляется участок локальной депрессии AR_1 . По мере приближения q к q_* имеем, согласно (1.13), $r_2 \rightarrow a$: сокращается участок AR_2 выполаживания кривой депрессии в пределах упомянутого участка AR_1 . Из (1.12) следует, что касательная к кривой депрессии в точке A горизонтальна при всех значениях $q < q_*$ ($a > f$) [1], а ордината этой точки $y_A = q \operatorname{arth} \sqrt{1 - a}$ в силу (1.10) монотонно возрастает с ростом q . В пределе, при $q = q_*$, $a = f$, получаем из (1.13) и (1.12) $r_2 = a$, $(dy/dx)_{\zeta=a} = -\infty$: точка R_2 совмещается с точкой A , которая становится точкой заострения кривой депрессии.

Итак, при определенном увеличении протяженности кривой депрессии по отношению к глубине заложения дрены локальная депрессия проявляется уже в самой начальной, а при малой протяженности — на более поздней стадии дренирования и развивается по мере последующего возрастания расхода дрены до некоторого предельно допустимого его значения. Возникающий при этом режим течения будем называть критическим. Необходимым условием его реализации является, согласно (1.11), поддержание на всем участке AD давления ниже атмосферного [1].

На фиг. 2 при $d = 0.5$ ($a_0 = 0.2$) представлены кривые депрессии для значений $Q = 0.0702, 0.1173, 0.1670, 0.2101, 0.2469, 0.2600$ (кривые 1—6

соответственно); точки перегиба отмечены на кривых крестиками. Локальная депрессия зарождается в этом случае при $Q = Q_r = 0.1173$ в точке $R_{1,2} (0.4771, 0.0837)$; можно показать с помощью (1.4) и (1.13), что вообще в момент появления на кривой депрессии точек перегиба $x(R_{1,2}) < 0.5$. С возрастанием Q локальная депрессия расширяется и углубляется. В критическом режиме, при $Q = Q_* = 0.2600$, она ограничена точкой $R_1 (0.6484, 0.1374)$; при этом $a = f = a_* = 0.01756$, $y(R_2, A) = y_* = 0.4485$. Для каждого расчетного значения Q построены также кривые изменения давления вдоль AD ; набор подобных кривых можно использовать для нахождения Q по заданному значению напора в некоторой точке потока, принадлежащей участку AD .

Рассмотрим два случая, близкие к предельным:

1) $d \approx 0$, что, согласно (1.1), связано либо с подъемом стока D , либо с расширением дренируемого участка. В этом случае имеем в силу (1.7) — (1.9) в терминах фактических величин l_f , d_f и q_f (индекс f будем опускать)

$$a \leq a_0 \approx (d/l)^2, \quad q \approx d / \ln \sqrt{1/a} = O [d / \ln (l/d)]$$

2) $d \approx \infty$. Запишем уравнение относительно a_* в виде

$$(1.14) \quad \sqrt{\frac{1}{a_*} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{a_*} - 1} = \frac{1}{d} \left(1 + \ln \sqrt{\frac{1}{a_*}} \right)$$

Непосредственно устанавливается, что $da_*/dd > 0$ и, следовательно, при возрастании d величина a_* ограничена снизу. Обращаясь затем к (1.14), заключаем, что $a_* \rightarrow 1$ при $d \rightarrow \infty$ и, поскольку $a > a_*$, найдем, оперируя здесь фактическими величинами

$$(1.15) \quad 1 - a_* \approx (3l/d)^{2/3}, \quad 1 - a = O [(3l/d)^{2/3}]$$

$$y_{AB} = q \operatorname{arth} \sqrt{1 - \zeta} = q \cdot O [(3l/d)^{1/3}], \quad q = \frac{d}{\lambda + \ln \sqrt{1 + a^2}} \approx$$

$$\approx \frac{d}{\lambda}, \quad q_* \approx d$$

Отсюда следует, что при ограниченном q заглубление стока, равно как и уменьшение l , сопровождается подъемом кривой депрессии, но, с другой стороны, возрастание d позволяет увеличить расход. В итоге для критического режима имеем $y_A^* \approx (3ld^2)^{1/3}$ и, следовательно, заглубление дрены расширяет диапазон возможного понижения уровня грунтовых вод.

2. Модель 2. Взаимно-однозначное соответствие между расходом Q и параметром a , обусловленное в рамках модели 1 первым равенством (1.10), позволяет представить картину течения, исследованную в п. 1 и определяемую зависимостями (1.2) — (1.4) при $\lambda > 1$, как результат уменьшения параметра a от a_0 до a_* . Однако решение (1.2) — (1.4) можно рассматривать и при значениях $a \in (0, a_*)$. Выясним, к чему приводит такое продолжение решения.

Исходя из (1.9) и (1.10) найдем

$$(2.1) \quad \frac{d\lambda}{da} = \frac{1}{2a} \left[1 + \frac{(\lambda - 1)d}{a\alpha(ad - 1)} \right]$$

т. е. $d\lambda / da > 0$ при $a = a_*$ ($\lambda = 1$) и, следовательно, $\lambda < 1$ в конечном интервале (a_1, a_*) значений $a < a_*$. Если при этом $a_1 > 0$ и $\lambda(a_1) = 1$,

то в силу (2.1) получим $d\lambda / da > 0$ при $a = a_1$ и $\lambda > 1$ в некотором интервале $(a_1, a_1 + \delta)$. Противоречие со сказанным выше означает, что соотношение $\lambda < 1$ ($a < f$) сохраняется во всем интервале $(0, a_*)$ значений параметра a . С учетом этого и, согласно (1.10), заключаем

$$(2.2) \quad dq / da > 0, \quad df / da > 0; \quad a \in (0, a_*)$$

Из (1.4) следует, что абсцисса x точек кривой депрессии AB (она, как и разрез вдоль нее в плоскости θ , обозначена на фиг. 1, в цифрой 2) теперь убывает на участке AF , так, что $x < 0$ при $a < \zeta < r_0$; значение r_0 определяется из уравнения

$$(2.3) \quad u = \operatorname{tg}(\lambda u), \quad u = \sqrt{r_0 / a - 1}$$

Левая половина депрессионной кривой, симметричная правой, аналогичным образом заходит в полуплоскость $x > 0$. Возникающая при таком наложении двулистность в плоскости фильтрации делает неприемлемой прежнюю трактовку решения, но при $a < f$ ему можно дать физическую интерпретацию в рамках схемы одностороннего притока. Для этого в дополнение к изложенному проанализируем картину течения вдоль участка AC , где в силу (1.2) — (1.4) выполняются соотношения (w_y — вертикальная составляющая скорости фильтрации)

$$(2.4) \quad \frac{dy}{d\zeta} = - \frac{q\tau(\zeta)}{2\zeta\sqrt{1-\zeta}}, \quad \tau(\zeta) = \frac{1}{w_y} = \frac{dy}{d\omega} = \\ = 1 - \frac{\sqrt{a}}{f} \frac{(f-\zeta)\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{a-\zeta}}; \quad -\infty < \zeta < a \\ \lim_{\zeta \rightarrow a-0, \zeta \rightarrow -\infty} \tau(\zeta) = -\infty, \quad \tau(0) = 0 \\ \frac{d\tau}{d\zeta} = \frac{\sqrt{a}}{2f} P(\zeta) [(1-\zeta)(a-\zeta)^3]^{-1/2}$$

Обращаясь к (1.13), видим, что в случае $a < f$, когда $r_2 \in (-\infty, a)$, точка $R_2(r_2)$ является точкой максимума функции $\tau(\zeta)$ на участке AC . Так как $r_2 \approx a$, $P(0) \approx 1 + f > 0$ при $a \approx f$, то непосредственно после перехода параметра a через значение a_* и при его дальнейшем убывании в некотором интервале имеем $r_2 \in (0, a)$, $R_2 \in AD$. Согласно (2.4), $\tau(\zeta) > 0$ в интервале $(0, g)$; значение g , при котором $\tau = 0$, $w_y = \infty$, определяется равенством

$$(2.5) \quad g = (1/2) [1 + 2f - \sqrt{1 + 4(f^2/a)(1-\lambda)}]$$

Итак, в некотором конечном интервале (a_{**}, a_*) значений параметра a ордината y при движении вдоль участка AC вначале убывает, достигая минимума в точке $G(g)$, а затем возрастает вплоть до точки C , где $y = \infty$, причем $D \in GC$. В плоскости z имеем, следовательно, вертикальную завесу с вершиной в точке G ; часть потока перетекает через нее и при возвратном движении поступает в сток D , расположенный на внутренней поверхности завесы. Ордината s точки G определится зависимостью (1.5) при $\zeta = g$

$$(2.6) \quad s = q \left(\lambda \sqrt{1 - \frac{g}{a}} - \ln \frac{1 + \sqrt{1-g}}{\sqrt{a} + \sqrt{a-g}} \right)$$

Для дальнейшего выяснения картины исследуем асимптотику решения при $a \approx 0$ ($\alpha \approx \infty$). Исходя из (1.9) получаем

$$(2.7) \quad q \approx \frac{d}{\ln \sqrt{1/a}}, \quad f \approx \sqrt{a} \frac{d}{\pi d/2 + \ln \sqrt{1/a}} \approx \sqrt{a} \frac{q}{1+Q}$$

$$\lambda \approx \sqrt{a} \frac{1+Q}{q}$$

Используя эти соотношения, найдем согласно (2.5) и (2.6)

$$(2.8) \quad g \approx -\frac{f^2}{a} \approx -\left(\frac{q}{1+Q}\right)^2$$

$$s \approx q \left(1 + \ln \frac{2}{\sqrt{-g}}\right) \approx q \left[1 + \ln \left(\frac{2}{q} + \pi\right)\right]$$

Для ординаты y_0 точки $R_0(r_0)$, расположенной на кривой депрессии над точкой G , имеем, основываясь на зависимостях (2.3), (2.7), (2.8) и (1.4)

$$(2.9) \quad \frac{r_0}{a} > \frac{f}{a} \rightarrow \infty, \quad \lambda u \approx \frac{\sqrt{ar_0}}{f} \approx \frac{\pi}{2}, \quad \sqrt{r_0} \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{-g} \approx 1$$

$$y_0 = q \operatorname{arth} \sqrt{1-r_0} \approx q \ln \frac{2}{\sqrt{r_0}} \approx q \ln \left(\frac{4}{\pi q} + 2\right) \approx s - 1.4516q$$

Далее можем записать согласно (1.4) и (2.7)

$$(2.10) \quad y_A = q \operatorname{arth} \sqrt{1-a} \approx q \ln \frac{2}{\sqrt{a}} \approx d + q \ln 2$$

$$x_F = q (\lambda \sqrt{f/a} - 1 - \operatorname{arctg} \sqrt{f/a} - 1) \approx -Q$$

На основании первого соотношения (2.8) заключаем, что с уменьшением параметра a сток D ($\xi = 0$) оказывается на внешней поверхности завесы. Из (2.7) и (2.8) следует также, что $s, q \rightarrow 0$ при $a \rightarrow 0$: завеса выдвигается вверх, во все большей степени экранируя сток от контура питания — затопленной части земной поверхности.

На фиг. 3 сплошными линиями 1—5 представлены кривые депрессии, построенные по уравнению (1.4) при выбранной ранее глубине стока $d = 0.5$ для значений $a = 3,7836 \cdot 10^{-3}$, 10^{-4} , 10^{-6} , 10^{-12} и 10^{-30} ; при этом $Q = 0.2390$, 0.1666 , 0.1134 , 0.0569 и 0.0227 . Соответствующие значения $s = 0.5$, 0.422 , 0.319 , 0.183 и 0.086 ; они указаны графически наклонными отрезками, соединяющими ту или иную кривую с вершиной завесы. Смысл штриховых линий будет пояснен в п. 3.

В результате вычислений обнаруживается, что при уменьшении параметра a от $a_* = 0.01756$ до $a_{**} = 0.003784$ величина s монотонно возрастает от 0.4485 до 0.5 , т. е. завеса опускается и при $a = a_{**}$ сток D оказывается на ее вершине. В промежутке $[0, a_{**}]$, содержащем указанные выше расчетные значения параметра a , величина s с уменьшением a монотонно убывает от 0.5 до нуля. Учитывая это, можно обратить числовую зависимость $s(a)$ и рассматривать процесс как результат первоначального заглубления завесы от y_* до уровня стока, находящегося пока на внутренней поверхности завесы, и последующего ее подъема, но уже как бы с противоположной от стока стороны. Так как на каждой из этих стадий зависимость $a(s)$ монотонна, то в силу (2.2) монотонной окажется и

зависимость $q(s)$. В этом случае в условиях полного перехвата потока, перетекающего через завесу, дренажным стоком каждому значению s в указанных интервалах будет соответствовать определенный расход стока Q .

Предложенная здесь физическая трактовка модели 2 пригодна и для модели 1 при условии, что $s < y_A$, поскольку в модели 1 кривая депрессии AB должна подходить к непроницаемой границе $x = 0$, оставаясь справа от нее. На такой физической основе можно связать обе рассмотренные модели.

Действительно, пока $s < y_*$, а сток расположен на внутренней поверхности завесы, в определенном диапазоне значений его расхода, при которых $s \leq y_A \leq y_*$, течение будет происходить в рамках модели 1; при дальнейшем заглублении завесы до уровня стока и подъема ее с противоположной от него стороны реализуется модель 2.

3. Модель 3. Из фиг. 3 видно, что при $s < 0.2$ кривая депрессии слева от завесы на значительном участке близка к вертикали $x = -Q$, что отчасти отражено и в последней асимптотической формуле (2.10). Подобная картина должна наблюдаться при перетоке через завесу с последующим свободным спадом потока вдоль нее (фиг. 1, а, кривая 3). Эту схему (модель 3) можно получить как предельный случай модели 2

при удалении стока по внешней поверхности завесы вниз на бесконечность. Учитывая, что при таком предельном переходе $\lambda < 1$, и считая расход потока ограниченным, имеем для больших значений d согласно (1.7) и (1.9)

$$(3.1) \quad \ln \sqrt{1 + a^2} \approx \frac{d}{q}; \quad a \approx \exp\left(-\frac{2d}{q}\right), \quad f \approx m \sqrt{a}; \quad m = \frac{q}{1 + Q}$$

В пределе, при $d \rightarrow \infty$, получим из (1.3), (1.4) и (3.1)

$$(3.2) \quad \theta = i \frac{1 + Q}{2} \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = i(1 + Q) \sqrt{\xi},$$

$$z = -Q + (1 + Q) \sqrt{\xi} + iq \operatorname{arth} \sqrt{1 - \xi}$$

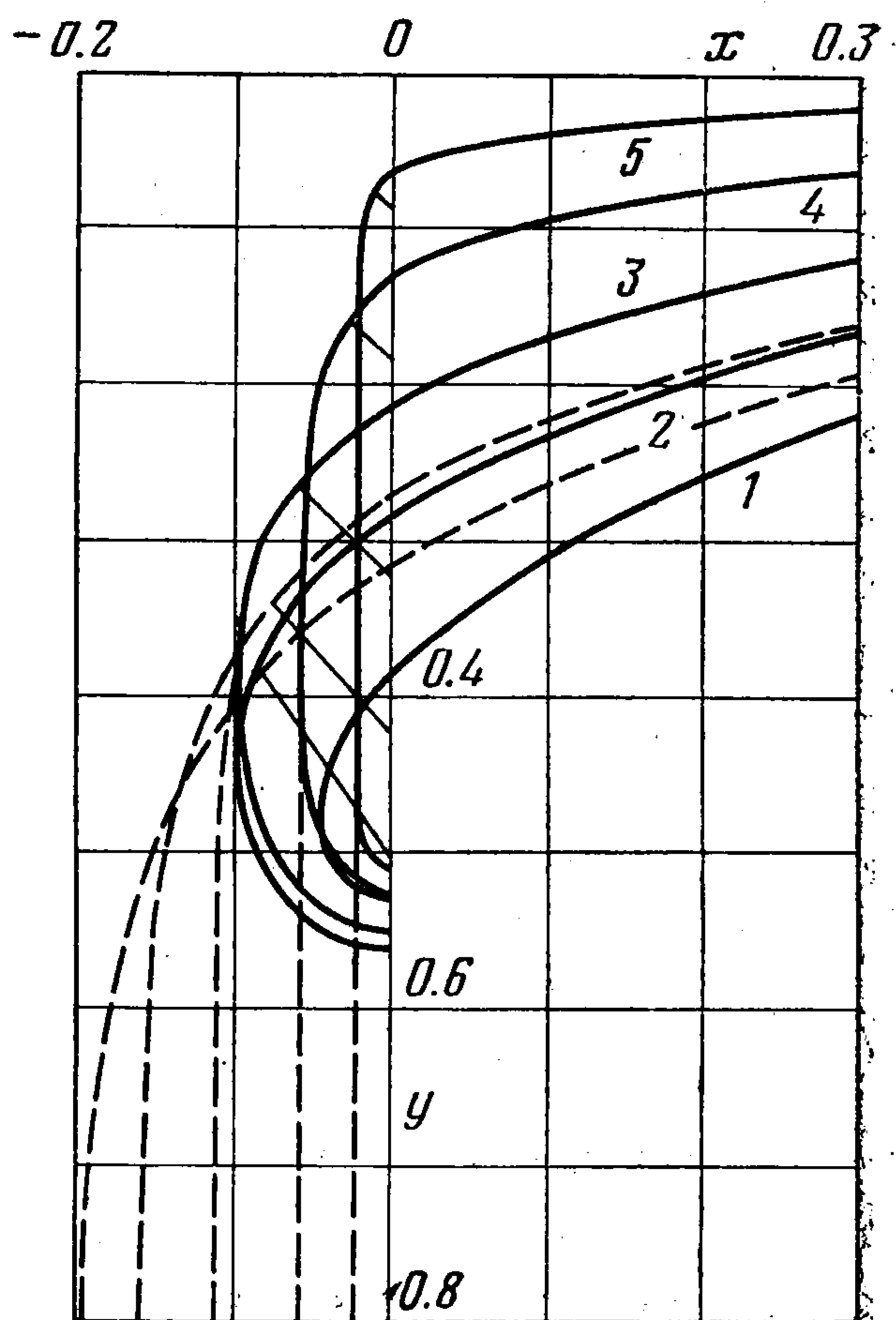
Далее найдем исходя из (2.6), (2.5) и (3.1)

$$(3.3) \quad s = (1 + Q) \sqrt{-g} + q \operatorname{arsh} \sqrt{-1/g}, \quad g = (1/2)(1 - \sqrt{1 + 4m^2})$$

В рассматриваемом случае легко установить аналитически, что расход потока Q монотонно возрастает с увеличением s , т. е. с опусканием завесы.

Уравнение кривой депрессии получается из (3.2) в виде

$$(3.4) \quad x = -Q + (1 + Q) \operatorname{sch}(y/q)$$



Фиг. 3

Модель 3 можно трактовать и как переток грунтовых вод через подземный выступ, непроницаемый контур которого совпадает с одной из линий тока или может быть аппроксимирован ею в результате варьирования величины s .

На фиг. 3 штриховыми линиями представлены кривые депрессии рассматриваемого потока, рассчитанные по формуле (3.4) для тех же значений s , что и в модели 2. При каждом из них предварительно из соотношений (3.3) и (3.1) вычислялся расход $Q = 0.1992, 0.1608, 0.1130, 0.0569$ и 0.0227 . Три последних значения практически совпадают с соответствующими (при тех же величинах s) значениями Q , полученными ранее для модели 2, а расхождение между кривыми депрессии обнаруживаются лишь в окрестности стока. Для величин s и y_0 получаются из соотношений (3.1) — (3.3) асимптотические формулы (2.8) и (2.9). Все это говорит о близости моделей 2 и 3 при определенном подъеме завесы, в результате которого экранированный сток утрачивает свое прежнее влияние на структуру и фильтрационные характеристики течения. Именно при малых s и q кривая депрессии быстро (согласно (3.4), почти по экспоненте) приближается к своей асимптоте $x = -Q$, сам же поток непосредственно за вершиной завесы становится близким к одномерному; в модели 2 он затем перехватывается стоком, а в модели 3 продолжает двигаться вниз.

Для больших значений Q найдем согласно (3.1) — (3.3)

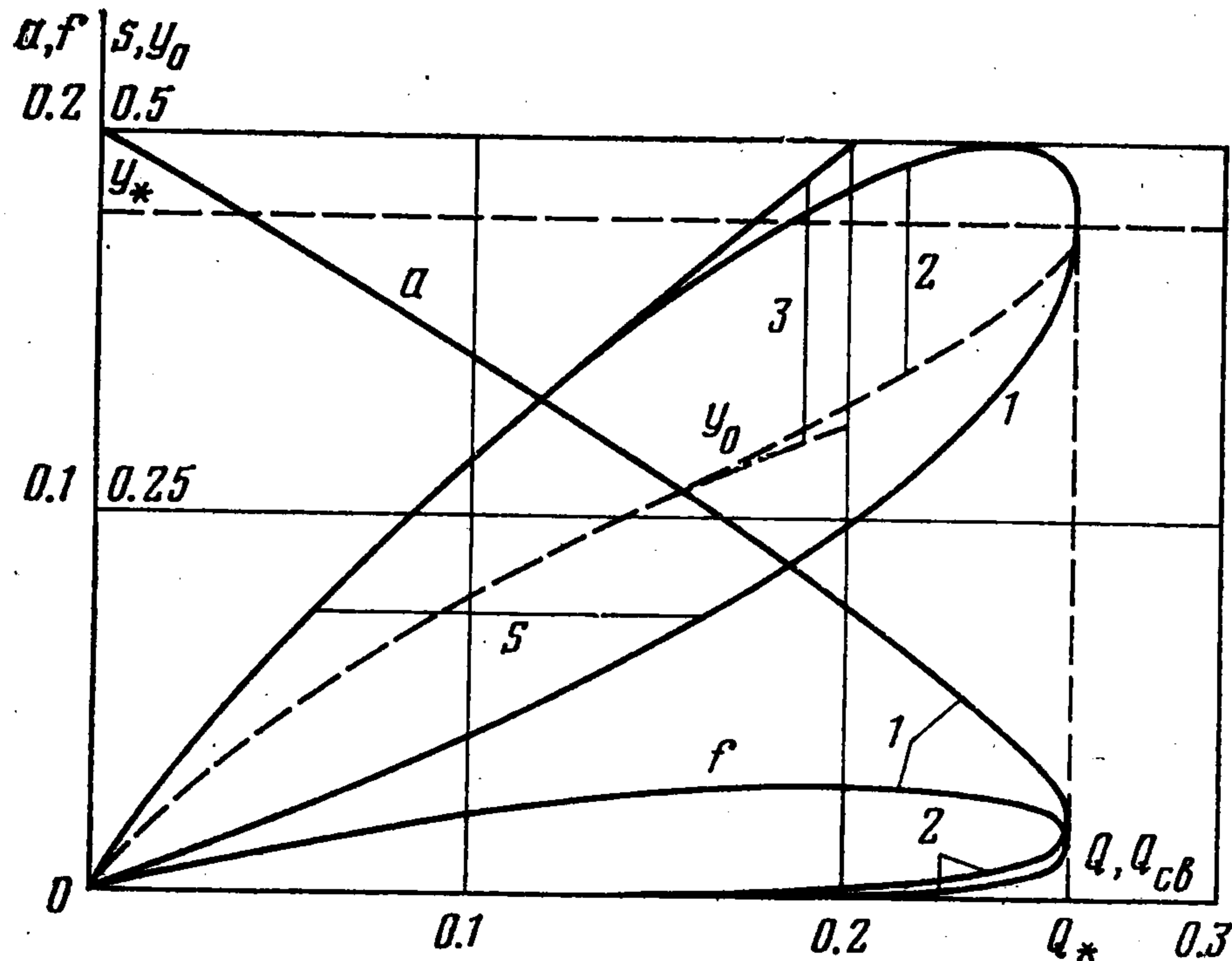
$$(3.5) \quad s \approx 1.4153Q, \quad y_0 \approx 0.9003 \sqrt{Q}$$

Формулы (3.5) можно рассматривать и с точки зрения уменьшения l при конечных значениях Q . В терминах фактических величин второе соотношение (3.5) примет в этом случае вид $y_0 \approx 0.9003 \sqrt{Ql}$, а первое сохранится и в пределе, при $l = 0$ выполнится уже как точное равенство.

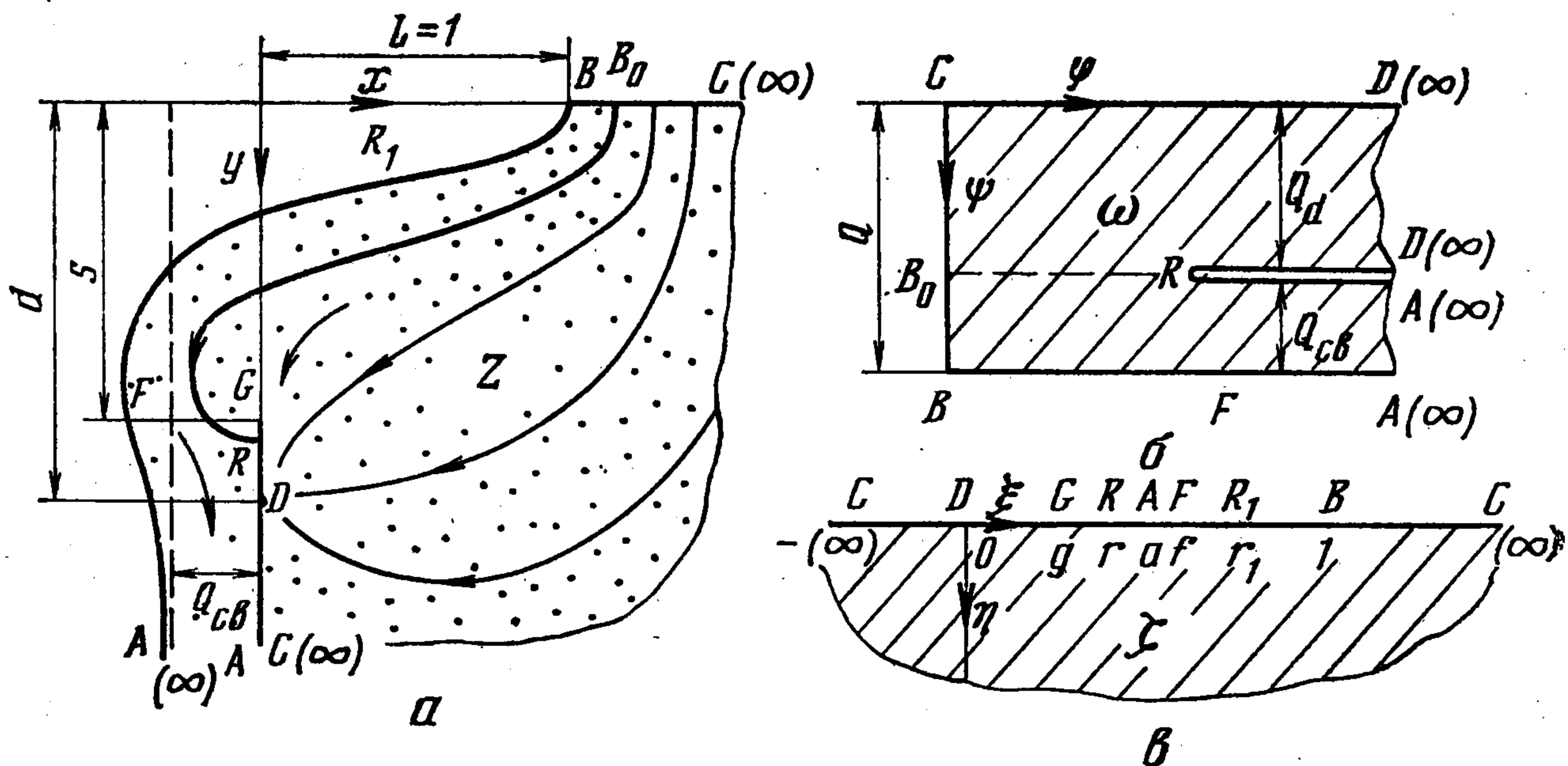
Характер зависимостей между величинами Q (ось абсцисс), s , y_0 (правая шкала оси ординат) и параметрами a , f (левая шкала) при $d = 0.5$ иллюстрируют кривые, представленные на фиг. 4 для трех описанных выше моделей; принадлежность кривых той или иной модели отмечена соответствующей цифрой. Для модели 1 подразумевается, что $s = y_0$. Величина y_0 появляется как самостоятельная в моделях 2 и 3, где в ее связи с s участвует в качестве параметра расход Q . Из графиков видно, что уже при $s \leq 0.25$ зависимости $y_0(s)$ и $q(s)$ в моделях 2 и 3 почти идентичны.

4. Модель 4. Предположим, что на фоне течения, описываемого моделью 3 на поверхности завесы начинает работать с расходом Q_d дренажный сток, но при этом часть воды Q_{cb} по-прежнему уходит вниз (фиг. 5, а). С возрастанием Q_d до некоторой определенной величины Q_d^{\max} , зависящей от геометрических параметров модели l , d и s , дрена перехватит весь грунтовый поток, так, что окажется $Q_{cb} = 0$, и в результате реализуется либо модель 2, либо модель 1 (последнее возможно лишь при расположении стока на внутренней поверхности завесы). Таким образом, рассматриваемая модель 4 обобщает предыдущие, включая их в себя в качестве предельных случаев. Для функции $\theta(\zeta)$ сохраняется представление (1.3)

(вопрос о положении точки F обсудим ниже). В области ω (фиг. 5, б) появляется теперь разрез, что связано с разделением потока. Отобразив



Фиг. 4



Фиг. 5

ее на полуплоскость $\text{Im} \zeta \geq 0$ (фиг. 5, в), найдем

$$(4.1) \quad \omega = M \int_{\zeta}^1 \frac{(\zeta - r) d\zeta}{\zeta (\zeta - a) \sqrt{1 - \zeta}} + iQ = q_d \cdot \text{arth} \sqrt{1 - \zeta} +$$

$$+ q_{cb} \text{arth} \sqrt{\frac{1 - \zeta}{1 - a}} + iQ$$

$$M = \frac{Q_d}{\pi} \frac{a}{r} = \frac{Q_{cb}}{\pi} \frac{a \sqrt{1 - a}}{a - r}, \quad q_d = \frac{2}{\pi} Q_d, \quad q_{cb} = \frac{2}{\pi} Q_{cb}$$

$$(4.2) \quad z = q_d \left(\lambda \sqrt{\frac{\zeta}{a} - 1} - \text{arctg} \sqrt{\frac{\zeta}{a} - 1} \right) -$$

$$- Q_{cb} + i \left(q_d \text{arth} \sqrt{1 - \zeta} + q_{cb} \text{arth} \sqrt{\frac{1 - \zeta}{1 - a}} \right)$$

Представляет интерес исследование картины течения при фиксированных значениях l , d и λ с изменением расхода Q_d в интервале $(0, Q_d^{\text{max}})$. При его задании наряду

с величинами l , d , и s определению подлежит расход Q_{cb} и параметры a , f , g . Относительно них получим, исходя из (4.1), (4.2), следующую систему уравнений (ср. с (1.6), (1.7), (2.5) и (2.4)) в безразмерных величинах (1.1):

$$(4.3) \quad \begin{aligned} q_d \left(\lambda \sqrt{\frac{1}{a} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{a} - 1} \right) &= 1 + Q_{cb} \\ q_d \left(\lambda + \ln \sqrt{\frac{1}{a}} \right) + q_{cb} \operatorname{arth} \sqrt{1 - a} &= d \\ q_d \left(\lambda \sqrt{1 - \frac{g}{a}} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - g}}{\sqrt{a} + \sqrt{a - g}} \right) + q_{cb} \operatorname{arth} \sqrt{\frac{1 - a}{1 - g}} &= s \\ f(r - g) \sqrt{a} &= r(f - g) \sqrt{(a - g)(1 - g)} \quad (r = a q_d / (q_d + q_{cb} \sqrt{1 - a})) \end{aligned}$$

Ограничимся здесь предварительным качественным анализом течения. Из последнего уравнения, означающего, что $w_y(g) = \infty$, следует

$$(4.4) \quad f - r = f \frac{g - r}{g} \left[1 - \sqrt{\frac{a}{(a - g)(1 - g)}} \right]$$

Если сток находится на внешней поверхности завесы, т. е. $g < 0$, то, как вытекает из (4.4), $f > r$. При $Q_d \approx 0$ имеем в силу (4.3) $r \approx 0$, $f \approx 0$: точки R и F расположены непосредственно под стоком, причем вторая из них является точкой максимума давления на участке AD . При $Q_d \approx Q_d^{\max}$, $Q_{cb} = 0$ получаем согласно (4.3) и (4.4)

$$r \approx a, \quad f - a \approx \frac{f}{g} (g - a) \left[1 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(a - g)(1 - g)}} \right] > 0, \quad \lambda_1 < 1$$

и таким образом, с увеличением Q_d точка F перейдет на кривую депрессии; в пределе, при $Q_{cb} = 0$, придем к модели 2.

При расположении стока на внутренней поверхности завесы возможен один из следующих вариантов:

1) $s < y_*(d)$. Поскольку вершина завесы находится в диапазоне возможного понижения уровня грунтовых вод, кривая депрессии по достижении некоторого значения Q_d^{\max} опустится над стоком до вершины завесы и переток через нее прекратится. Участок AG в области z выродится при этом в точку G , с которой одновременно совместится точка R , и в результате получим $r = g = a$ в согласии с последним уравнением (4.3). При $Q_d < Q_d^{\max}$, когда течение описывается моделью 4, имеем $0 < g < a$. Если при этом потоки разделяются на внутренней поверхности завесы, т. е. $0 < r < g$ (что происходит по крайней мере при малых расходах Q_d), то в силу (4.4) получим $0 < f < r$: точка F принадлежит участку RD , будучи точкой максимума давления на поверхности завесы в интервале AD . При $Q_d^{\max} < Q_d < Q_d^*$ течение осуществляется в рамках модели 1;

2) $s = y_*(d)$. При таком положении вершины завесы $Q_d^{\max} = Q_d^*$; полное поглощение дренажной грунтовой потока достигается в критическом режиме, описанном в п. 1; при $Q_d < Q_d^{\max}$ остается в силе сказанное выше при рассмотрении первого варианта;

3) $s > y_*(d)$. В этом случае при $Q_d = Q_d^{\max}$ ($Q_{cb} = 0$) получаем модель 2 и, следовательно, $0 < g < a$ во всем интервале $(0, Q_d^{\max})$ реализации модели 4. Далее, поскольку $r \approx 0$ при $Q_d \approx 0$ и $r \approx a$ при $Q_{cb} \approx 0$ (см. (4.3)), при увеличении Q_d точка R должна перейти с внутренней стороны завесы на внешнюю. Согласно (4.4), $\operatorname{sign}(f - r) = \operatorname{sign}(r - g)$ и таким образом точка F оказывается на той же стороне завесы, что и точка R , одновременно с ней минуя вершину завесы и переходя при этом из потока, поглощаемого дренажной, в зону свободного потока; при последующем возрастании Q_d точка F перейдет на кривую депрессии.

Автор благодарит Н. С. Колодея за помощь при вычислениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ведерников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.—Л., Госстройиздат, 1939.
 2. Эмих В. Н. Решение задачи о плоской безнапорной фильтрации при дренажных промывках почв с непроницаемым основанием. Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 6.
 3. Эмих В. Н. Фильтрация при промывках почвенного слоя с нижележащим напорным горизонтом относительно высокой проницаемости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 3.
 4. Эмих В. Н. Плоская безнапорная фильтрация при дренажных промывках почвенного слоя неограниченной мощности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4.
-