

**ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В ТОРМОЗЯЩЕМ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ ПРИ УЧЕТЕ ИНЕРЦИИ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ**

А. Б. Ватажин, В. И. Грабовский

(Москва)

Рассматривается одномерное электрогидродинамическое течение в тормозящем электрическом поле, когда вследствие инерции заряженных частиц необходимо использовать полное уравнение импульсов для заряженной компоненты. Показано, что, несмотря на пренебрежимо малую величину относительного объема, занимаемого частицами в начальном сечении потока, при торможении частиц внешним однородным электрическим полем (без учета индуцированного поля) имеется участок, на котором движение частиц происходит с малой (но конечной) скоростью при конечном относительном объеме заряженной компоненты. На этом участке всегда существенно взаимодействие заряженной и нейтральной компонент, которое может отсутствовать в начальном сечении. Определен перепад давления, необходимый для осуществления такого течения. Исследовано течение при учете индуцированных электрических полей, уменьшающих эффект возрастания концентрации заряженных частиц.

1. Рассмотрим одномерное движение двухфазной среды, несущая фаза которой является нейтральной несжимаемой жидкостью (газом) и обладает скоростью u , плотностью ρ и истинной плотностью $\rho^0 = \text{const}$, а дисперсная фаза, имеющая скорость u_s и плотность ρ_s , образована сферическими частицами радиусом a с плотностью $\rho_s^0 = \text{const}$ и электрическим зарядом Q . Число частиц в единице объема равно n_s . Пусть в сечении $x = 0$ заданы скорость газа $u = U = \text{const}$, плотность ρ_{s0} и скорость u_{s0} дисперсной фазы. Это означает, что в газодинамическом контуре имеются устройства, позволяющие поддерживать постоянной скорость газа при различной интенсивности взаимодействия фаз, и, кроме того, в сечении $x = 0$ установлен источник заряженных частиц, обеспечивающий заданные характеристики ρ_{s0} и u_{s0} . Между эмиттером $x = 0$ и расположенным ниже по потоку $x = L$ коллектором заряженных частиц создается продольное электрическое поле E , представляющее собой сумму внешнего E_∞ и индуцированного E_i электрических полей. В качестве граничного условия для E задается величина E_0 при $x = 0$. При малом индуцированном поле выполняется условие $E \equiv E_0$ всюду в межэлектродном промежутке. Ниже рассматриваются течения при торможении дисперсной фазы электрическим полем.

Система уравнений, описывающая одномерное течение двухфазной среды, имеет следующий вид [1,2]:

$$(1.1) \quad \rho_s u_s u_s' = -\alpha p' + \rho_s k \psi (u - u_s) + \rho_s \kappa E$$

$$(1.2) \quad \rho u u' = -(1 - \alpha) p' - \rho_s k \psi (u - u_s)$$

$$(1.3) \quad \rho_s u_s = \rho_{s0} u_{s0}, \quad \rho u = \rho_0 u_0$$

$$(1.4) \quad \rho = \rho^0 (1 - \alpha), \quad \rho_s = \rho_s^0 \alpha$$

$$(1.5) \quad E' = 4\pi \kappa \rho_s$$

$$(1.6) \quad u_s(0) = u_{s0}, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad u(0) = u_0, \quad E(0) = E_0$$

$$(1.7) \quad \alpha = \frac{4}{3} \pi a^3 n_s, \quad k = \frac{9\mu}{2a^2 \rho_s^0}, \quad \kappa = \frac{Q}{m}, \quad m = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_s^0$$

Здесь μ — коэффициент динамической вязкости несущей фазы, α — объемная концентрация дисперсной фазы, m — масса заряженной частицы. Штрих означает дифференцирование по переменной x . Первые два уравнения (1.1) и (1.2) являются уравнениями импульсов для дисперсной и несущей фаз, соотношения (1.3) — уравнения неразрывности, соотношениями (1.4) устанавливается связь между фазовыми плотностями сред, уравнение (1.5) служит для определения индуцированного электрического поля, соотношения (1.6) — начальные условия. Величина ψ — в общем случае функция от числа Рейнольдса, определяемого по разности скоростей $|u - u_s|$, и концентрации α . Наличие зависимости $\psi(\alpha)$ обусловлено тем, что при достаточно большой концентрации частиц их гидродинамическое сопротивление отличается от сопротивления одной частицы в безграничном потоке. Случай $\psi = 1$ соответствует стоксову закону сопротивления изолированной частицы.

В уравнении (1.1) не учтен член $-p_s'$, обусловленный наличием собственного давления частиц p_s , связанного с их столкновениями в случае значительной концентрации частиц. Принимая, по аналогии с кинетической теорией газов, $p_s = n_s K T_s$, где K — постоянная Больцмана, а T_s — «кинетическая» температура частиц, получаем следующую оценку для относительной величины члена p_s' :

$$(1.8) \quad \left| \frac{p_s'}{\alpha p'} \right| \sim \frac{p_s}{\alpha p} \sim \frac{n_s T_s}{\alpha N_g T} \sim \frac{3}{4\pi} \frac{T_s}{T} \frac{1}{N_g a^3} \sim \frac{T_s}{T} \frac{10^{-10}}{4} \ll 1$$

Здесь использовано соотношение $p = N_g K T$, где N_g — число микро-частиц (молекул, атомов, ионов) в единице объема. Оценка (1.8), полученная при условии $N_g = 10^{19} \text{ см}^{-3}$, $a = 10 \text{ мкм}$, показывает, что в широком диапазоне изменения T_s собственным давлением можно пренебречь.

Необходимо отметить, что индуцированное электрическое поле, рассчитываемое по уравнению (1.5), в силу конечных размеров частиц, вообще говоря, отличается от истинного электрического поля, которое должно рассчитываться на основе решения электростатической задачи для системы, состоящей из многих электрически заряженных тел конечных размеров. Некоторые подходы к решению этой проблемы указаны в [3]. Для обоснования уравнения (1.5) оценим отношение B силы Q^2 / D^2 , действующей на выбранную частицу со стороны ближайшей к ней частицы (D —

расстояние между центрами частиц), к силе QE , где $E = E_{\infty} + E_i$. Имеем

$$(1.9) \quad B_{\infty} = \frac{Q}{D^2 E_{\infty}} = 3 \frac{E^{\circ}}{E_{\infty}} \frac{a^2}{D^2}, \quad Q \sim 3E^{\circ} a^2$$

$$B_i = \frac{Q}{D^2 E_i} \sim \frac{Q}{4\pi n_s D^2 L Q} = \frac{1}{4\pi} \frac{D}{L}, \quad n_s \sim D^{-3}$$

В этих выражениях использована формула для оценки предельного заряда частицы Q радиуса a , приобретаемого ею в «заряжающем» поле E° [4], а также приближенная формула, связывающая концентрацию частиц n_s с расстоянием D . Величина L — характерный размер области, в которой сосредоточены заряды. Нетрудно видеть, что имеется широкий диапазон условий, при которых выполняется необходимое условие $B = \max \{B_{\infty}, B_i\} \ll 1$.

Пусть течение в сечении $x = 0$ характеризуется следующими (реализующимися в практических приложениях) условиями: $n_{s0} = 10^3 \text{ см}^{-3}$, $E_0 = 10 \text{ кв/см}$, $U = 10^3 \text{ см/с}$, $u_{s0} \approx U$; $a = 10^{-3} \text{ см}$, $\rho_s^{\circ} = 5 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$, $\rho^{\circ} = 10^{-3} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$, $\mu \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ г}/(\text{см}\cdot\text{с})$, $L = 5 \text{ см}$. В этом случае основные безразмерные параметры задачи принимают следующие значения:

$$(1.10) \quad \alpha_0 \approx 4.2 \cdot 10^{-6}, \quad \tau = \frac{2\rho_s^{\circ} U a^2}{9\mu L} \approx 1.1$$

$$S = \frac{\rho_{s0}}{\rho_0} = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{\rho_s^{\circ}}{\rho^{\circ}} \approx 2.1 \cdot 10^{-2}$$

$$M = \frac{\kappa E_0}{kU} \sim \frac{E_0 E^{\circ} a}{2\pi\mu U} \approx 0.8, \quad N = \frac{E_i}{E_0} \sim \frac{9\alpha_0 E^{\circ} L}{E_0 a} \approx 0.2$$

Параметры τ и M по порядку величины представляют собой отношения инерционного члена и электрической силы к силе F взаимодействия между фазами в уравнении импульсов (1.1) для дисперсной фазы, параметр S равен отношению силы F к остальным членам уравнения (1.2) для несущей фазы, а параметр N определяет относительную величину индуцированного электрического поля. В оценках (1.10) использовалась такая же, как в (1.9), связь между зарядом Q и полем E° . Согласно (1.10), объемной концентрацией заряженной фазы и ее влиянием на движение нейтральной фазы, по крайней мере на начальной стадии движения с большой степенью точности, можно пренебречь ($\alpha_0 \ll 1$, $S \ll 1$). В первом приближении оказывается несущественным индуцированное электрическое поле E_i ($N < 1$). Однако расчет течения в указанном выше приближении при наличии внешнего тормозящего электрического поля E_{∞} , как будет показано ниже, приводит к неправильным результатам. Это связано со специфическими особенностями течения в областях, где скорость дисперсной фазы становится малой величиной. В этих областях необходимо учитывать конечную объемную концентрацию частиц, несмотря на ничтожно малую ее величину в сечении $x = 0$.

Ниже рассматриваются различные модели течения (по мере их усложнения), которые можно ввести для описания течения на основе оценок (1.10). Полученные с их помощью результаты сопоставляются с данными «точных» расчетов на основе решения полной системы уравнений (1.1) —

(1.6). Изучается структура областей с резким изменением параметров двухфазного потока.

2. Модель $\alpha \equiv 0$, $\rho_s / \rho \ll 1$, $N = 0$. В этом случае наличие заряженных частиц не оказывает влияния на движение газа, и его скорость однородна во всей области течения ($u \equiv U$). Объем заряженных частиц пренебрежимо мал, и течение происходит в заданном внешнем электрическом поле $E_\infty = E_0$, которое будем считать постоянным и направленным против потока ($E_0 < 0$). Из (1.1) — (1.6) получаем уравнение

$$(2.1) \quad u_s u_s' = k\psi (U - u_s) + \kappa E_0, \quad u_s(0) = u_{s0}$$

Его решение при $\psi = 1$ и условии $(-\kappa E_0 / (kU) - 1) > 0$ (когда торможение частиц электрическим полем всюду превосходит «увлекающее» действие нейтральной среды) имеет следующий вид:

$$(2.2) \quad \xi = \frac{x}{L} = \tau \left[\eta \ln \frac{w + \eta}{w_0 + \eta} - (w - w_0) \right]$$

$$w = \frac{u_s}{U}, \quad w_0 = \frac{u_{s0}}{U}, \quad \eta = - \frac{\kappa E_0 + kU}{kU}$$

Согласно (2.2), скорость частиц обращается в нуль при $\xi = \xi_0^+ = \tau [\eta \ln (\eta / (w_0 + \eta)) + w_0]$, и решение не может быть продолжено в область $\xi > \xi_0^+$.

Оставаясь в рамках обсуждаемой модели, необходимо либо поместить сток заряженных частиц в сечении $x = x_0^+$, либо рассмотреть возможность движения частиц в обратном направлении после их остановки при $x = x_0^+$. В последнем случае скорость $u_s = v_s$ движущихся в обратном направлении частиц также определяется из решения уравнения (2.1) с граничным условием $v_s(x_0^+) = 0$. «Обратная» траектория частиц не совпадает с траекторией (2.2), и скорость v_s в сечении $x = 0$ меньше начальной скорости u_{s0} . Плотности ρ_s и R_s прямого и обратного потоков заряженных частиц находятся из условий $\rho_s u_s = \rho_{s0} u_{s0}$, $R_s v_s = -\rho_{s0} u_{s0}$. При $x \rightarrow x_0^+$ плотности ρ_s и R_s возрастают как $(x_0^+ - x)^{1/2}$. По распределениям ρ_s и R_s можно вычислить (как следующее приближение) индуцированное электрическое поле. Последнее оказывается непрерывным при переходе через сечение $x = x_0^+$, в котором не образуется поверхностного заряда, так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0^+ - \varepsilon}^{x_0^+} (\rho_s + R_s) dx = 0$$

Построенное решение, являющееся «точным» в рамках предложенной модели, оказывается некорректным с точки зрения общей постановки задачи. Его погрешность состоит в том, что объемная концентрация частиц полагается равной нулю вплоть до сечения $x = x_0^+$, в то время как в близкой окрестности этого сечения, там, где, согласно (1.3), фазовая плотность частиц становится большой, их объемная концентрация принимает конечные значения. Резкое возрастание α при подходе двухфазной среды к сечению $x = x_0^+$ сопровождается увеличением скорости несущей фазы вследствие уменьшения эффективного проходного сечения (эффекта «стеснения» потока). Кроме того, в правой части уравнения импульсов для заряженной фазы при конечных α необходимо учитывать

член $-\alpha r'$, который представляет собой дополнительную силу, направленную вдоль оси x . Указанные эффекты (увеличение силы трения компонент вследствие возрастания скорости несущей среды u и появление силы $-\alpha r'$) существенно изменяют характер движения. Появляется возможность прохождения частиц через сечение $x = x_0^+$. Исследование структуры течения вблизи $x = x_0^+$ должно проводиться в рамках модели, учитывающей конечность объемной концентрации частиц α .

3. Модель $\alpha \neq 0$, $N = 0$. При этих условиях происходит изменение параметров обеих компонент, и течение описывается системой уравнений (1.1) — (1.4), (1.6), в которой $E = E_0 = \text{const}$.

В рассматриваемом приближении действие электрического поля аналогично, например, воздействию на частицы силы тяжести. Так как величина α достигает конечных значений, то необходимо учитывать зависимость $\psi = \psi(\alpha)$. Заданием функции $\psi(\alpha)$ определяется модель «опосредственного» взаимодействия частиц через несущую среду. Ниже для функции ψ выбираются следующие выражения:

$$(3.1) \quad 1^\circ: \psi = 1, \quad 2^\circ: \psi = (1 - \alpha)^{-n}, \quad 3^\circ: \psi = (1 - \alpha / \alpha_m)^{-n}, \quad n > 0$$

В зависимости 1° опосредственное взаимодействие частиц не учитывается, и закон сопротивления движущихся частиц является законом Стокса. Выражение 2° заимствовано из теории кипящего слоя [1].

Формула 3° является модификацией выражения 2° . Величина α_m имеет смысл максимальной объемной концентрации частиц, соответствующей их плотной упаковке. Система уравнений (1.1) — (1.4) сводится к одному дифференциальному уравнению первого порядка

$$(3.2) \quad \tau w_\xi' = R(w), \quad w(0) = w_0, \quad \xi = x / L$$

$$R(w) = \frac{(w - \delta)}{w} \{ -(\eta + 1)(w - \delta)^2 + \psi w^2 (1 + \delta - \alpha_0 - w) \} \times$$

$$\times \{ (w - \delta)^3 + \gamma \}^{-1}$$

$$w = \frac{u_s}{U}, \quad w_0 = \frac{u_{s0}}{U}, \quad \alpha_0 = \frac{\rho_{s0}}{\rho_s}, \quad \eta = - \left(\frac{\kappa E_0}{kU} + 1 \right)$$

$$\delta = w_0 \alpha_0 \ll 1, \quad \gamma = \frac{\rho_s^0}{\rho_s} (1 - \alpha_0)^2 \delta \ll 1$$

Входящий в это уравнение параметр инерции τ определен формулами (1.10). Рассматривается ситуация, когда в начальном сечении, согласно (1.10), объемная концентрация α_0 дисперсной заряженной фазы является малой величиной, и реализуется режим торможения частиц электрическим полем: $E_0 < 0$, $\eta > 0$.

Из (3.2) вытекает, что $R(w_0) < 0$, и скорость заряженных частиц непрерывно уменьшается при их движении вдоль оси ξ . Уменьшение скорости происходит до значения $w = w^+$, где w^+ — ближайший к величине $w = w_0$ положительный корень уравнения $R(w) = 0$. При этом если функция $R(w)$ в окрестности точки $w = w^+$ представляется в виде $R(w) = \text{const} (w - w^+)^m$, $m \geq 1$, то значение w^+ достигается при $\xi \rightarrow \infty$, т. е. имеется «асимптотический» участок движения. Величина w^+ должна быть близка к нулю, так как, если бы $w^+ = O(1)$, то $\alpha^+ = \delta / w^+ = o(1)$,

и течение во всей области описывалось бы приближением $\alpha \equiv 0$, для которого функция $R(w)$ обращается в нуль при $w < 0$.

Предполагая n целым числом, будем искать корень w^+ в виде ряда $w^+ = A\delta + \dots$. Для определения A получаем алгебраическое уравнение

$$(3.3) \quad \left(1 - \frac{1}{A}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{A\alpha_m}\right)^n = \frac{1}{1+\eta}$$

Решение уравнения (3.3) для случаев 1° и 2° ($\alpha_m = 1$) имеет следующий вид:

$$(3.4) \quad A = \frac{(1+\eta)^{1/(n+2)}}{(1+\eta)^{1/(n+2)} - 1}$$

Характеристики течения на асимптотическом участке (которые обозначаются верхним индексом плюс) определяются формулами

$$(3.5) \quad \alpha^+ = \frac{1}{A} + O(\delta), \quad w^+ = A\delta + O(\delta^2), \quad \frac{\rho_s}{\rho_{s0}} = \frac{w_0}{A\delta} + O(1)$$

$$\frac{u^+}{U} = \frac{A}{A-1} + O(\delta), \quad \frac{\rho^+}{\rho_0} = \frac{A-1}{A} + O(\delta)$$

$$-\left(\frac{p'L}{\rho^0 U^2}\right)^+ = \frac{\rho_s^0}{\rho^0 \tau} \frac{A^{1+n}}{(A-1)^{2+n}}$$

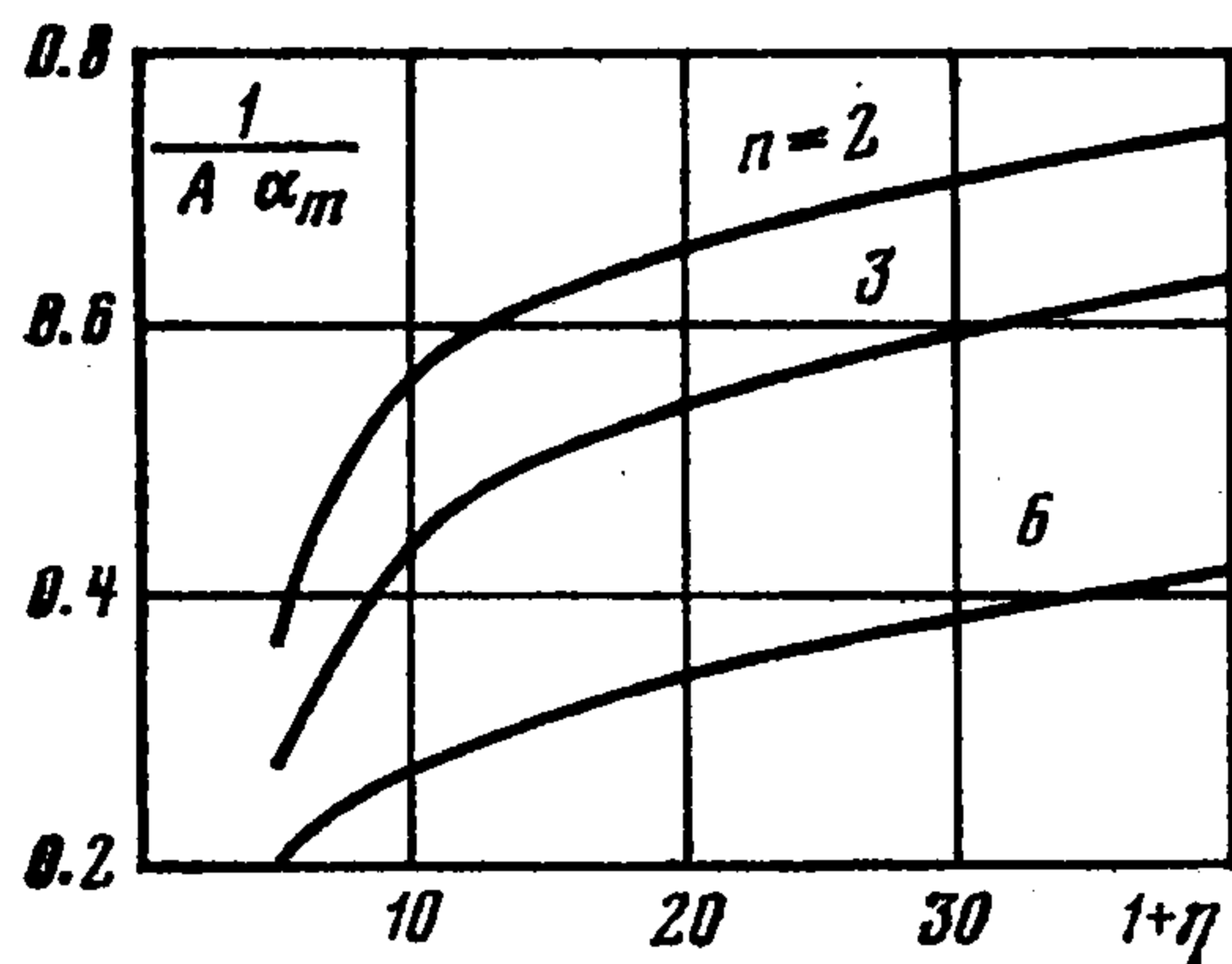
Асимптотическое решение характеризуется конечной объемной концентрацией частиц α^+ , большой (порядка δ^{-1}) их относительной фазовой плотностью, скоростью несущей фазы $u^+ > U$ (так как $A > 1$), плотностью $\rho^+ < \rho_0$ и большим градиентом давления, необходимого для реализации рассматриваемого течения.

При больших электрических полях величина α^+ , согласно (3.5), становится близкой к единице. Однако в действительности объемная концентрация α не может превзойти величину $\alpha_m = \pi/6$, равную концентрации плотно упакованных частиц. Возможность решения, для которого $\alpha > \alpha_m$, связана с несовершенством и использованного «опосредственного» закона взаимодействия 2°. Указанный недостаток устраняется при использовании закона 3°. Зависимости величины $(A\alpha_m)^{-1}$ от $1 + \eta$ при разных n , определенные на основе решения уравнения (3.3), представлены на фиг. 1. При всех η величина A оказывается больше значения $1/\alpha_m$ и, следовательно, $\alpha^+ < \alpha_m$.

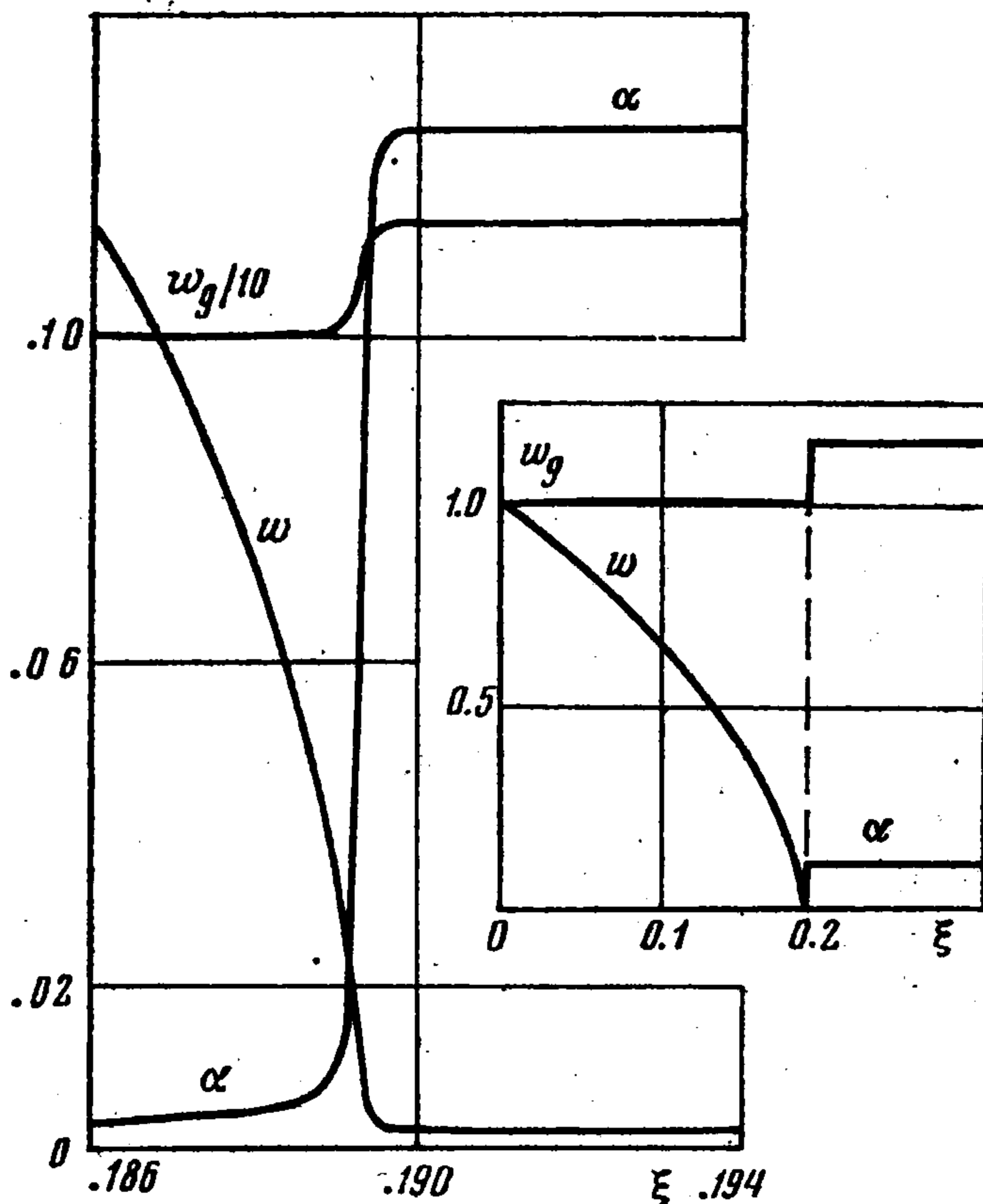
Таким образом, в первом приближении течение состоит из двух участков. На первом из них изменение параметров определяется формулами (2.2). Его протяженность близка к величине ξ_0^+ . Скорость частиц по его длине уменьшается практически до нуля. На втором, асимптотическом участке параметры двухфазного потока определяются формулами (3.5). Между этими участками имеется узкая переходная зона. Ее размер по порядку величины равен δ . Поэтому указанную зону можно заменить поверхностью разрыва, на которой величины α , u , ρ изменяются скачком от значений $\alpha = 0$, $u = U$, $\rho = \rho_0$ до значений α^+ , u^+ , ρ^+ , а скорость w близка к нулю.

На фиг. 2 показано изменение скоростей w и $w_g = u/U$ дисперсной и несущей фаз и объемной концентрации α вдоль потока, найденное при помощи интегрирования системы уравнений (1.1) — (1.4) при $\tau = 1$, $w_0 = 1$, $\alpha_0 = \delta = 3 \cdot 10^{-4}$, $\gamma = 3 \cdot 10^{-7}$, $\eta = 2$ и законе сопротивления 3° ($n = 3$). При тех же значениях параметров показана (в увеличенном масштабе) переходная зона.

Проведенный выше анализ можно обобщить на случай, когда внешнее тормозящее электрическое поле неоднородно — $\eta = \eta(x)$. Пусть параметр γ — величина второго (или более высокого) порядка малости по δ . (На практике это условие выполняется в силу неравенства $\rho^\circ / \rho_s^\circ \ll 1$.) Тогда инерционным членом в уравнении (3.2) для области, в которой $w \sim \delta$, можно пренебречь и определять w из условия $R(w) = 0$. Приближенное решение задачи в этом случае строится следующим образом. Вначале интегрируется уравнение (2.1) при $E_0| = E(x)$ и определяется сечение x_0^+ , в котором скорость u_s обращается в нуль. Параметры течения в области $x > x_0^+$ находятся при по-



Фиг. 1



Фиг. 2

мощи формул (3.5), в которых величина $A = A(x)$ определяется из решения уравнения (3.3) при $\eta = \eta(x)$. Сечение $x = x_0^+$ является поверхностью разрыва величин α , u и ρ .

Известно, что во многих задачах газовой динамики многофазных сред при выполнении условия $\alpha_0 \ll 1$ используется приближение $\alpha \equiv 0$ для описания всей области течения [5]. Построенное выше решение показывает, что, несмотря на условие $\alpha_0 \ll 1$, учет объемной концентрации частиц может привести к принципиально иным характеристикам течения в области конечной протяженности за сечением $x = x_0^+$.

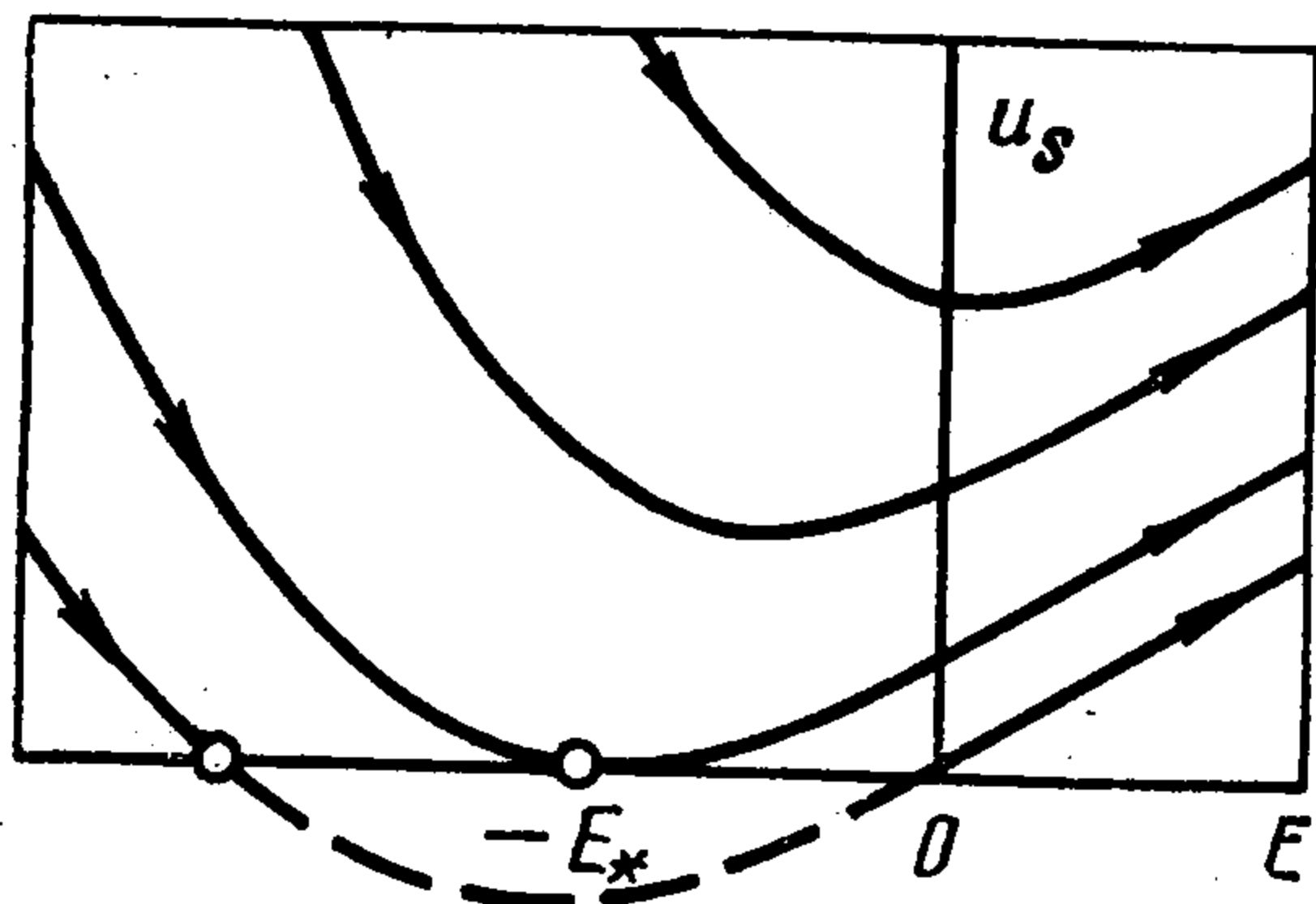
4. Модель $\alpha \equiv 0$, $\rho_s / \rho \ll 1$, $N \sim 1$. Двухфазное течение описывается следующими уравнениями:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u_s u_s' &= k\psi (U - u_s) + \kappa E \\ \rho_s u_s &= \rho_{s0} u_{s0}, \quad E' = 4\pi k \rho_s \\ u_s(0) &= u_{s0}, \quad E(0) = E_0 < 0 \end{aligned}$$

Интегральные кривые этой системы уравнений ($\psi = 1$) в плоскости E, u_s показаны на фиг. 3. Стрелки указывают направление роста x .

Из фиг. 3 вытекает, что, как и в случае п. 2, непрерывное решение системы (4.1) в общем случае существует лишь в области $0 \leq x \leq x^+$, где $u_s(x^+) = 0$. Если x^+ меньше длины межэлектродного промежутка, то построение полного решения в рамках рассматриваемой модели воз-

можно в трех ситуациях: 1) наличие «стока» заряженных частиц в сечении x^+ ; 2) образование поверхностного заряда в сечении x^+ (с разрывом электрического поля) и дальнейшее движение заряженных частиц вниз по потоку; 3) образование поверхностного заряда в сечении x_*^+ , отсутствие



Фиг. 3

потока частиц в области $x > x_*^+$ и наличие «обратного» потока заряженных частиц в области $(0, x_*^+)$.

Первая из указанных ситуаций тривиальна.

При прохождении частиц вниз по потоку с образованием поверхностного заряда в сечении $x = x^+$ (ситуация 2) необходимо исследовать систему уравнений (4.1) и аналогичную систему для области $x > x^+$

при использовании условий

$$u_s(x^+ - 0) = 0, \quad u_s(x^+ + 0) = u_s^+, \quad E(x^+ + 0) = E^+$$

В ситуации 3 система уравнений, описывающая «прямое» и «обратное» движения заряженных частиц с фазовыми скоростями u_s и v_s и плотностями ρ_s и R_s в области $0 \leq x \leq x_*^+$, и уравнения для электрического поля в области $x > x_*^+$ имеют следующий вид:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} u_s u_s' &= k\psi(U - u_s) + \kappa E, & \rho_s u_s &= \rho_{s0} u_{s0} \\ v_s v_s' &= k\psi(U - v_s) + \kappa E, & R_s v_s &= -\rho_{s0} u_{s0} \\ E' &= 4\pi\kappa(\rho_s + R_s) \\ u_s(0) &= u_{s0}, & u_s(x_*^+ - 0) &= 0, & v_s(x_*^+ - 0) &= 0 \\ E(0) &= E_0 \\ (0 \leq x < x_*^+) \end{aligned}$$

$$(4.3) \quad x > x_*^+, \quad E' = 0, \quad E(x_*^+ + 0) = E^+$$

При известных значениях u_s^+ , E^+ в ситуации 2 и E^+ в ситуации 3 из решений соответствующих систем уравнений определяются фазовые скорости и плотности частиц, электрическое поле и положение сечения разрыва x^+ и x_*^+ .

Из требования эволюционности поверхности разрыва (имеются два распространяющихся с бесконечной скоростью вверх и вниз по потоку от разрыва «электростатических» возмущения и два возмущения, распространяющихся вниз по потоку от разрыва, в которых изменяются плотность и скорость частиц) вытекает, что число граничных условий на разрыве должно равняться пяти.

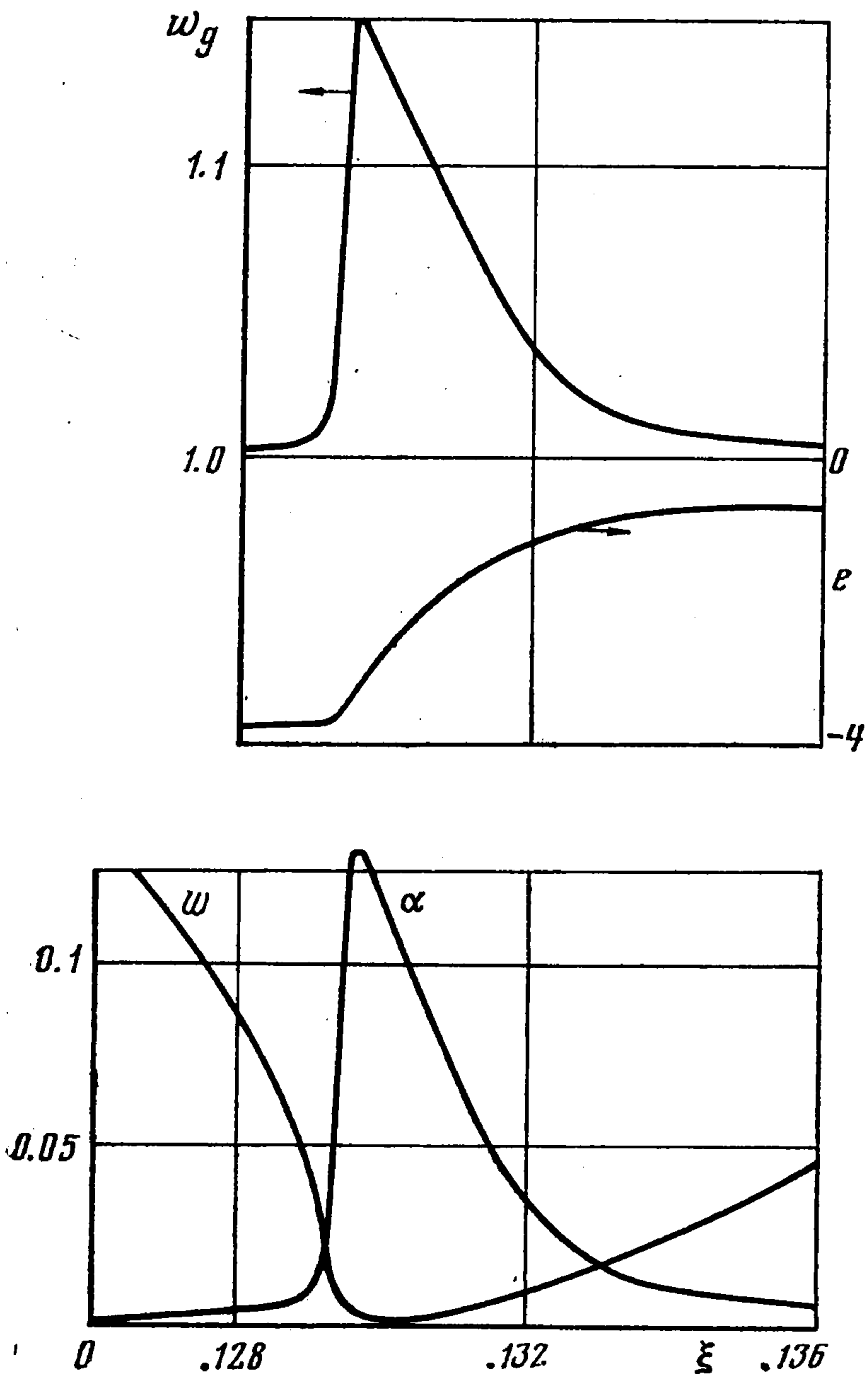
Эти условия (в том числе величины u^+ , E^+) должны находиться из условий сохранения на разрыве и рассмотрения структуры разрыва, причем при введении различных структурных механизмов можно получать различные граничные условия. Один из возможных механизмов рассмотрен в п. 5 на основе исследования течения при конечной объемной концентрации частиц и наличии индуцированных электрических полей.

5. Модель $\alpha \neq 0$, $N \sim 1$. На фиг. 4 показаны распределения величин w , $w_g = u/U$, α , $e = \kappa E / (kU)$ в зоне малых скоростей w и резкого изме-

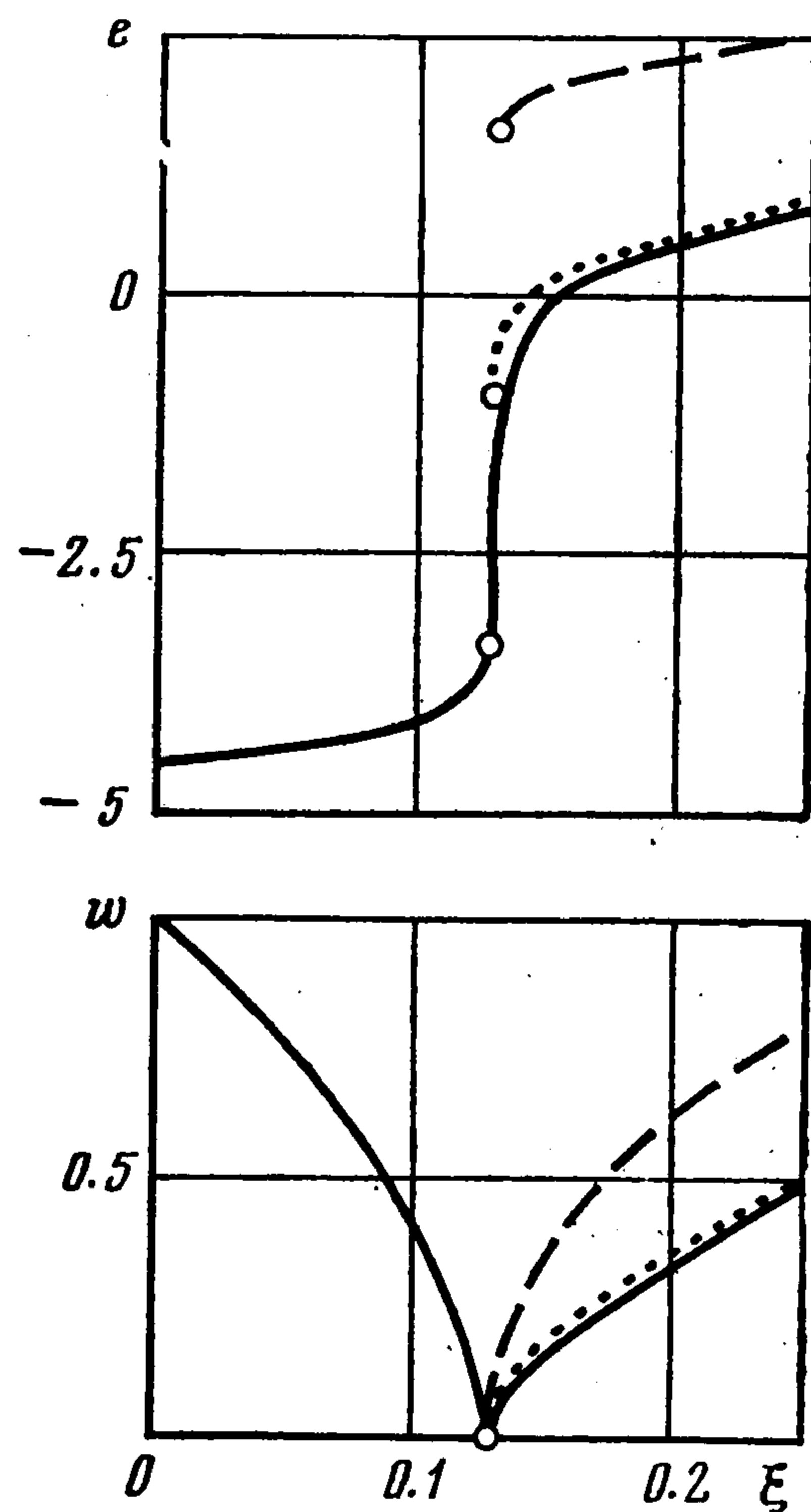
нения остальных параметров. Они получены численным интегрированием системы уравнений (1.1) — (1.6) при условиях $\tau = w_0 = 1$, $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-4}$, $\gamma = 3 \cdot 10^{-7}$, $\beta = \rho_{s0} 4\pi L \kappa^2 / (kU) = 3$, $e_0 = \kappa E_0 / (kU) = -4.5$ и выборе функции ψ по третьей формуле (3.1) ($n = 3$).

Имеется участок (зона G) конечной протяженности, где мала скорость дисперсной фазы и существенна ее объемная концентрация α . Размер

зоны G зависит от параметров задачи и по порядку величины равен α_0 . Конечность зоны G связана с эффектом электростатического расталкивания заряженных частиц,



Фиг. 4



Фиг. 5

который учитывается в уравнении Пуассона для индуцированного электрического поля.

Рассмотренное течение характеризуется тонким слоем с большой фазовой плотностью заряженных частиц. В этой зоне резко возрастает электрическое поле. Наличие индуцированного электрического поля (при $\alpha \neq 0$) приводит к смещению сечения с минимальной скоростью частиц вверх по потоку, уменьшению величины этого минимума и дальнейшему ускорению частиц после прохождения указанного сечения.

Зону G можно рассматривать как структурную зону разрыва, который необходимо ввести при решении задачи в приближении $\alpha \equiv 0$. Как показывают результаты расчетов, эта зона состоит из двух участков: области ω_1 резкого возрастания α и w_g , длина которой по порядку величины равна

δ , и области ω_2 более плавного изменения параметров, в которой происходит уменьшение величин α , w_g до своих «асимптотических» значений $\alpha = 0$ и $w_g = 1$.

Исследования, проведенные в п. 3, показали, что в зоне малых скоростей частиц (какой является и зона ω_2) описание движения частиц можно проводить в «безынерционном» приближении. При этом скорость частиц выражается следующим образом:

$$(5.1) \quad w \approx A\delta, \quad A = A(E) = \frac{(-e)^{1/(n+2)}}{(-e)^{1/(n+2)} - 1}, \quad e = \frac{\kappa E}{kU}$$

Формула для A получена при $\alpha_m = 1$ и законе сопротивления 2°. При $\alpha_m < 1$ величина A — решение уравнения (3.3).

Распределение электрического поля в зоне ω_2 описывается уравнением (см. (1.5), (3.5))]

$$(5.2) \quad de / d\xi \sim 1 / (A\delta)$$

Асимптотический выход из зоны ω_2 осуществляется при $de / d\xi \rightarrow 0$ и, следовательно, $A \rightarrow \infty$. Согласно (5.1) или (3.3), при $A \rightarrow \infty$ имеем $-e \rightarrow 1$ (или $E \rightarrow -Uk / \kappa$). Заметим, что это условие совпадает с дополнительным условием для поля E на поверхности разрыва в «классической» электрогазодинамике, когда не учитывается инерция заряженных частиц [6].

Кроме того, согласно первому соотношению (5.1), скорость w в зоне G является малой величиной (порядка δ), поэтому на входе и выходе из структурной зоны при $\delta \rightarrow 0$ необходимо положить $w^- = 0$, $w^+ = 0$.

Итак, на поверхности разрыва, заменяющей зону G , выполняются соотношения

$$(5.3) \quad \begin{aligned} u_s^- = u_s^+ = 0, \quad \varphi^- = \varphi^+, \quad \rho_s^- u_s^- = \rho_s^+ u_s^+ \\ U + bE^+ = 0 \quad (b = \kappa/k) \end{aligned}$$

Третье условие в (5.3) для потенциала электрического поля $\varphi = -E'$ следует из непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля, а четвертое — из непрерывности потока массы дисперсной фазы.

На фиг. 5 пунктиром показаны результаты численного интегрирования системы уравнений (4.1), описывающей течение среды в приближении $\alpha \equiv 0$ при наличии поверхности разрыва параметров (5.3) (ситуация 2 в п. 4).

Сплошные линии соответствуют точному решению системы уравнений (1.1) — (1.6), особенности которого в структурной зоне показаны на фиг. 4. Штриховые линии соответствуют численному интегрированию уравнений (4.1) с первыми четырьмя условиями (5.3) и использованию формального условия $E^+ = m > -U / b = m^*$. Отличие приближенного решения от точного, как и ожидалось, оказывается минимальным при $m = m^*$.

В заключение авторы благодарят за полезные обсуждения участников семинаров Г. Г. Черного и Г. А. Любимова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бородуля В. А., Гупало Ю. П. Математические модели химических реакторов с кипящим слоем. Минск, «Наука и техника», 1976.
2. Ватажин А. Б., Грабовский В. И. Обтекание клина сверхзвуковым электрогазодинамическим потоком при наличии инерции заряженных частиц. Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 1.
3. Головин А. М., Чижов В. Е. К расчету скорости осаждения однородной суспензии. ПММ, 1978, т. 42, вып. 1.
4. Верещагин И. П., Левитов В. И., Мирзабекян Г. З., Пашин М. М. Основы электрогазодинамики дисперсных систем. М., «Энергия», 1974.
5. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двускоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
6. Гогосов В. В., Полянский В. А. Электрогидродинамика: задачи и приложения, основные уравнения, разрывные решения. «Механика жидкости и газа» (Итоги науки и техники), 1976, 10.