

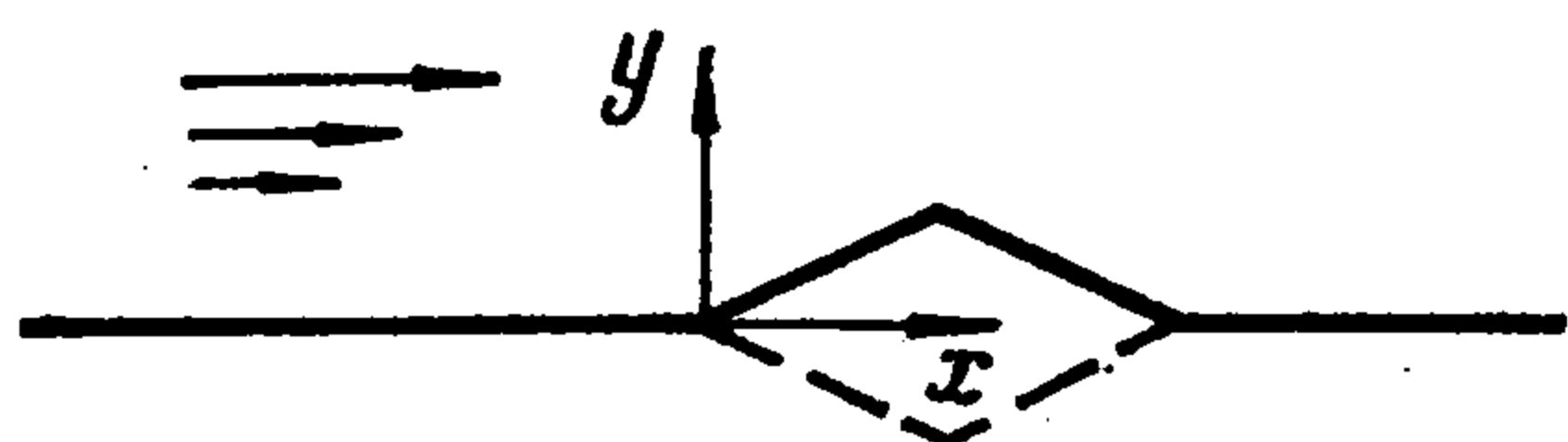
РАСЧЕТ ДАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ О ВИБРАТОРЕ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Е. Д. Терентьев

(Москва)

Изучается задача обтекания сверхзвуковым потоком тела, состоящего из плоской пластины, переходящей в треугольную колеблющуюся часть — вибратор и оканчивающегося плоской пластиной. Тело предполагается теплоизолированным, размеры вибратора и частота колебаний таковы, что течение можно описать уравнениями пограничного слоя с самоиндуцированным давлением [1-5]. Амплитуда колебаний предполагается малой, что позволяет линеаризовать эти уравнения. Для построения решения используется преобразование Фурье по продольной координате. Обратное преобразование Фурье находится численными методами. Показано, что возмущения параметров течения, вызванные вибратором, затухают по экспоненциальному закону как вверх, так и вниз по потоку.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание теплоизолированного тела, состоящего из покоящейся плоской пластины, переходящей в треугольную колеблющуюся часть — вибратор и оканчивающегося неподвижной плоской пластиной (фиг. 1). Пусть передняя часть имеет длину L^* , а задняя часть длину $O(L^*)$ (звездочкой здесь отмечены размерные величины). Размеры вибратора будем считать малыми, зададим их ниже. Пусть невозмущенный набегающий поток сверхзвуковой, с числом Маха M_∞ ,



Фиг. 1

превосходящим единицу на конечную величину, и скоростью U_∞ , направленной вдоль неподвижных частей пластины. Индексами ∞ и w отметим параметры газа в невозмущенном стационарном потоке и на стенке. Используем декартову систему координат x, y с началом в точке соединения передней неподвижной части с колеблющейся частью. Обозначим: t^* — время, v_x^*, v_y^* — составляющие вектора скорости, ρ^* — плотность, p^* — давление, T^* — температура, κ — отношение удельных теплоемкостей. Для простоты примем зависимость первого коэффициента вязкости от температуры линейной: $\lambda_1^*/\lambda_{1\infty}^* = CT'$, где $T' = T^*/T_{\infty}^*$, а число Прандтля равным единице. Вместо обратной величины числа Рейнольдса используем малый параметр $\varepsilon = Re_1^{-1/2}$ ($Re_1 = \rho_\infty^* U_\infty^* L^* / \lambda_{1\infty}^*$).

Выберем продольный размер колеблющейся части $O(\varepsilon^3)$, амплитуду колебаний $U(\varepsilon^5)$, частоту $O(\varepsilon^{-2})$. Для описания движения удобно выделить три характерные области [1,2]: верхнюю — область сверхзвукового

превосходящим единицу на конечную величину, и скоростью U_∞ , направленной вдоль неподвижных частей пластины. Индексами ∞ и w отметим параметры газа в невозмущенном стационарном потоке и на стенке. Используем декартову систему координат x, y с началом в точке соединения передней неподвижной части с колеблющейся частью. Обозначим: t^* — время, v_x^*, v_y^* — составляющие вектора скорости, ρ^* — плотность, p^* — давление, T^* — температура, κ — отношение удельных теплоемкостей. Для простоты примем зависимость первого коэффициента вязкости от температуры линейной: $\lambda_1^*/\lambda_{1\infty}^* = CT'$, где $T' = T^*/T_{\infty}^*$, а число Прандтля равным единице. Вместо обратной величины числа Рейнольдса используем малый параметр $\varepsilon = Re_1^{-1/2}$ ($Re_1 = \rho_\infty^* U_\infty^* L^* / \lambda_{1\infty}^*$).

невязкого течения ($y_1 = O(\varepsilon^3)$), среднюю — обыкновенный пограничный слой ($y_2 = O(\varepsilon^4)$) и нижнюю — пограничный слой с самоиндуцированным давлением ($y_3 = O(\varepsilon^5)$). Основные трудности в такой схеме связаны с построением решения во внутренней области. Используя это решение, параметры течения в средней и внешней областях можно выписать в явном виде [1-5]. Ниже остановимся лишь на внутренней области, где введем следующие безразмерные зависимые и независимые переменные [4,5]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} t^* &= L^* U_\infty^{*-1} \varepsilon^2 C^{1/2} \lambda^{-3/2} (M_\infty^2 - 1)^{-1/2} T_w' t \\ x^* &= L^* \varepsilon^3 C^{3/2} \lambda^{-3/2} (M_\infty^2 - 1)^{-3/2} T_w'^{3/2} x \\ y^* &= L^* \varepsilon^5 C^{5/2} \lambda^{-5/2} (M_\infty^2 - 1)^{-5/2} T_w'^{5/2} y \\ v_x^* &= U_\infty^* \varepsilon C^{1/2} \lambda^{1/2} (M_\infty^2 - 1)^{-1/2} T_w'^{1/2} u \\ v_y^* &= U_\infty^* \varepsilon^3 C^{3/2} \lambda^{3/2} (M_\infty^2 - 1)^{1/2} T_w'^{3/2} v \\ p^* &= p_\infty^* + \rho_\infty^* U_\infty^{*2} \varepsilon^2 C^{1/2} \lambda^{1/2} (M_\infty^2 - 1)^{-1/2} p \\ \rho^* &= \rho_\infty^* T_w' \rho \end{aligned}$$

Используемая в формулах (1.1) постоянная $\lambda = 0.3321$ определяется равенством $L^* \text{Re}_1^{-1/2} \partial (v_x^*/U_\infty) / \partial y^* = \lambda C^{-1/2} T_w'$ по решению Блазиуса для невозмущенного пограничного слоя. Подставляя соотношения (1.1) в систему уравнений Навье — Стокса, сохраняя главные члены по ε и требуя выполнения условий срачивания с обычным пограничным слоем при $x \rightarrow -\infty$ и $y \rightarrow \infty$, получим систему уравнений для нестационарного пограничного слоя с самоиндуцированным давлением [4, 5]

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \rho &= 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ x &\rightarrow -\infty, \quad u \rightarrow y, \quad p \rightarrow 0 \\ y &\rightarrow \infty, \quad u \rightarrow y - \int_{-\infty}^x p dx \end{aligned}$$

На стенке зададим условия прилипания

$$(1.3) \quad u = u_w, \quad v = v_w$$

Пусть колеблющаяся часть стенки задана уравнением

$$(1.4) \quad y_w = \sigma f_1(x) \cos \omega t, \quad \sigma \ll 1$$

где ω — безразмерная частота, а функция $f_1(x)$ (фиг. 1) задает треугольную форму с параметрами a и b

$$(1.5) \quad f_1(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 2x & , \quad 0 \leq x \leq b \\ 2b(a-x)/(a-b) & , \quad b \leq x \leq a \\ 0 & , \quad x \geq a \end{cases}$$

Малость параметра σ позволяет линеаризовать задачу, разложив искомые функции в ряд по степеням σ

$$u = y + \sigma u_1 + \dots, \quad v = \sigma v_1 + \dots, \quad p = \sigma p_1 + \dots$$

Подставляя эти разложения в (1.2), получим

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + y \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \\ x \rightarrow -\infty, \quad u_1 &\rightarrow 0, \quad p_1 \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \infty, \quad u_1 &\rightarrow -\int_{-\infty}^x p_1 dx \end{aligned}$$

Такая линеаризация справедлива всюду, где $u_1 = O(1)$, за исключением области $y \rightarrow 0$, т. е. на стенке, где заданы условия прилипания (1.3). Для получения условий для функций u_1 и v_1 введем дополнительную подобласть с характерной переменной $y_l = y / \sigma$. Решение в новой подобласти ищем в виде

$$(1.7) \quad u = \sigma u_l + \dots, \quad v = \sigma v_l + \dots, \quad p = \sigma p_l + \dots$$

Для вновь введенных функций условия на стенке (1.3) запишем как

$$(1.8) \quad u_l(t, x, f_1 \cos \omega t) = 0, \quad v_l(t, x, f_1 \cos \omega t) = -\omega f_1 \sin \omega t$$

При $y_l \rightarrow \infty$ справедливы условия сращивания с функциями u_1 и v_1 при $y \rightarrow 0$

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \sigma u_l(t, x, y_l) &\rightarrow y + \sigma u_1(t, x, 0) + \dots \\ v_l(t, x, y_l) &\rightarrow v_1(t, x, 0) + \dots \end{aligned}$$

Подставляя функции (1.7) в систему уравнений (1.2), получим

$$\partial v_l / \partial y_l = 0, \quad \partial^2 u_l / \partial y_l^2 = 0$$

Решение этой простейшей системы, удовлетворяющее условиям (1.8), имеет вид

$$\begin{aligned} u_l &= y_l F(t, x) - F(t, x) f_1(x) \cos \omega t \\ v_l &= -\omega f_1(x) \sin \omega t \end{aligned}$$

где $F(t, x)$ — произвольная функция. Из (1.9) найдем, что $F(t, x) \equiv 1$, а также получим условия для функций u_1 и v_1 при $y = 0$

$$(1.10) \quad \begin{aligned} u_1(t, x, 0) &= -f_1(x) \cos \omega t \\ v_1(t, x, 0) &= -\omega f_1(x) \sin \omega t \end{aligned}$$

Задача (1.6), (1.10) рассматривалась в работе [6]. Искомые функции u_1 , v_1 , p_1 были разложены в интеграл Фурье по переменным t и x , однако вычисления искомых функций не были проведены. Цель данной работы — проведение этих вычислений, а также изучение асимптотических свойств решений задачи (1.6), (1.10).

2. Расчет давления. Как и в работе [6], остановимся на изучении давления, записав его в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{\pi} \cos \omega t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1 d\omega_2 - \frac{1}{\pi} \sin \omega t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2 d\omega_2 \\ \Phi_1 &= \operatorname{Re}(\Phi_0), \quad \Phi_2 = \operatorname{Im}(\Phi_0), \quad \Phi_0 = \Phi_{00} - \Phi_{10} \\ \Phi_{00} &= \frac{1}{i\omega_2} \left[1 - \frac{a}{a-b} \exp(-i\omega_2 b) + \frac{b}{a-b} \exp(-i\omega_2 a) \right] \exp(i\omega_2 x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{10} &= \Phi_{11} + \Phi_{12} + \Phi_{13}, \quad \Phi_{11} = (i\omega_2)^{1/3} G \exp(i\omega_2 x) \\ \Phi_{12} &= -\frac{a}{a-b} (i\omega_2)^{1/3} G \exp[i\omega_2(x-b)] \\ \Phi_{13} &= \frac{b}{a-b} (i\omega_2)^{1/3} G \exp[i\omega_2(x-a)] \\ \Omega_1 &= i^{1/3} \omega \omega_2^{-2/3} \\ G &= (I_0 - I_1(\Omega_1)) [Ai'(\Omega_1) + (i\omega_2)^{1/3} (I_0 - I_1(\Omega_1))]^{-1} \\ Ai'(\Omega_1) &= \frac{d Ai(\Omega_1)}{d\Omega_1} \\ I_0 &= \int_0^{\infty e^{i\varphi}} Ai(z) dz, \quad I_1(\Omega_1) = \int_0^{\Omega_1} Ai(z) dz \\ \varphi &= (\pi/2 + \arg \omega_2) / 3 \end{aligned}$$

В формулах (2.1) Re и Im обозначают действительную и мнимую части комплексной функции, $Ai(z)$ — функцию Эйри, которую можно задать всюду сходящимся рядом

$$(2.2) \quad Ai(z) = \frac{1}{3^{2/3}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k}}{k! 3^{2k} \Gamma(k + 2/3)} - \frac{z}{3^{2/3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k}}{k! 3^{2k} \Gamma(k + 4/3)} \right]$$

Здесь дано общепринятое определение функции Эйри [7, 8]; определение, использованное в работах [5, 9], отличается от (2.2) постоянным множителем. Поскольку в формулы (2.1), задающие давление p_1 , входит отношение функций Эйри, результат не зависит от этого множителя.

Согласно (2.1), расчет давления p_1 сводится к вычислению интеграла

$$(2.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0 d\omega_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{00} d\omega_2 - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{10} d\omega_2$$

Первый интеграл в правой части (2.3) вычисляется явно

$$(2.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{00} d\omega_2 = \pi \left[\text{sign}(x) - \frac{a}{a-b} \text{sign}(x-b) + \frac{b}{a-b} \text{sign}(x-a) \right]$$

Второй интеграл в правой части (2.3) равен сумме трех интегралов от функций Φ_{11} , Φ_{12} и Φ_{13} . Поскольку подынтегральные функции Φ_{12} и Φ_{13} отличаются от Φ_{11} только постоянными множителями и значением параметра в показателе экспоненты, интегралы от них вычисляются аналогично интегралу от Φ_{11} .

Остановимся на вычислении интеграла от Φ_{11} , из (2.1) имеем

$$(2.5) \quad I_2(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11} d\omega_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_2 x} (i\omega_2)^{1/3} (I_0 - I_1(\Omega_1))}{Ai'(\Omega_1) + (i\omega_2)^{1/3} (I_0 - I_1(\Omega_1))} d\omega_2, \\ i = e^{i\pi/2}$$

Изучим подынтегральное выражение в (2.5) на комплексной плоскости переменной ω_2 . Для выделения однозначной ветви в нем необходимо сделать разрез. Исходя из свойств функции Эйри

$$|Ai(z)| \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad -\pi/3 \leq \arg z \leq \pi/3$$

выберем разрез от точки 0 вдоль мнимой оси, т. е. $\pi/2 > \arg \omega_2 > -3\pi/2$, тогда

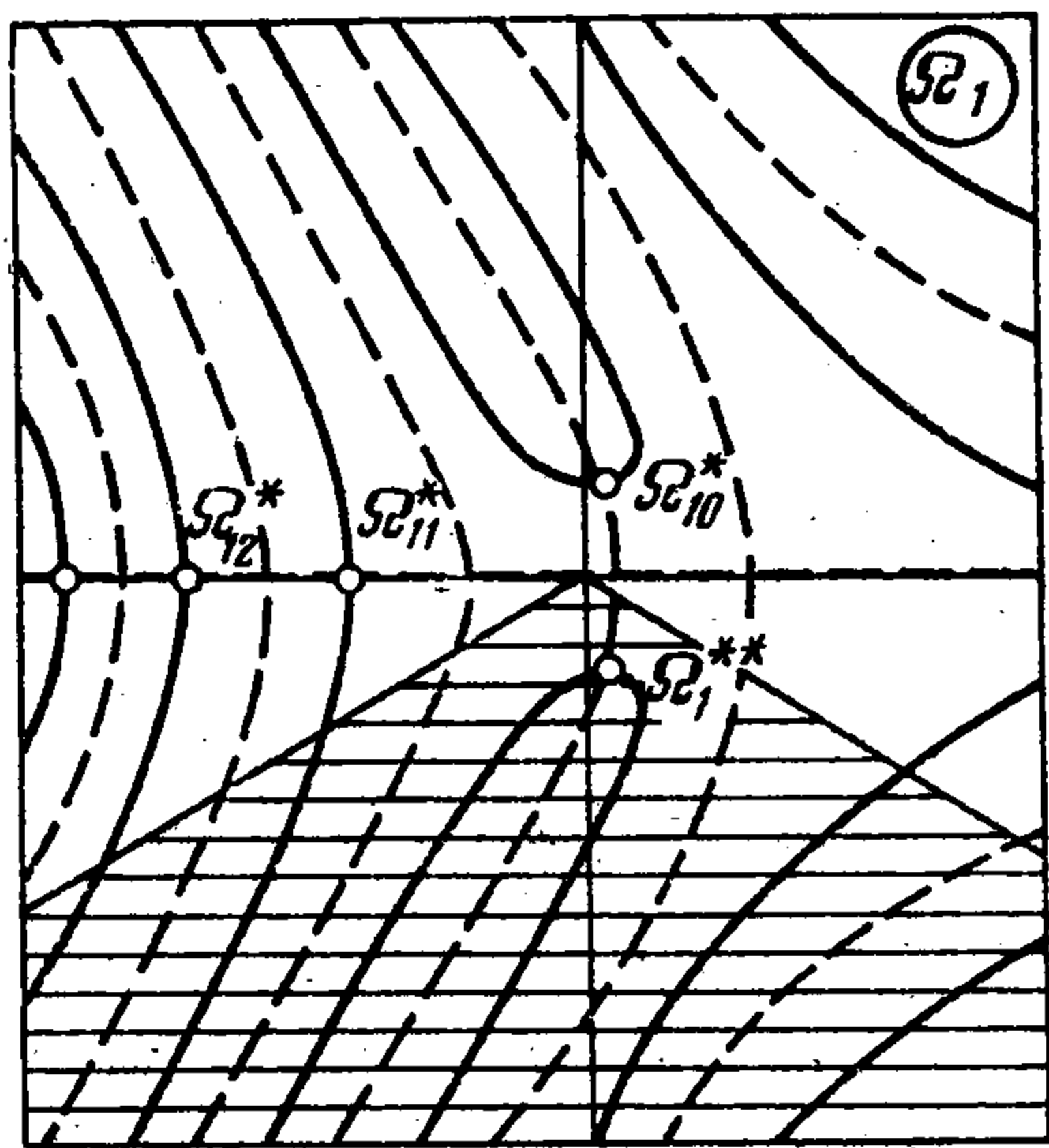
$$(2.6) \quad I_0 = \int_0^{\infty} \text{Ai}(x) dx = \frac{3^{1/2} \Gamma(2/3) \Gamma(4/3)}{2\pi}$$

Найдем корни знаменателя подынтегрального выражения, являющиеся полюсами подынтегральной функции; уравнение, определяющее их, удобно записать, используя только переменную Ω_1

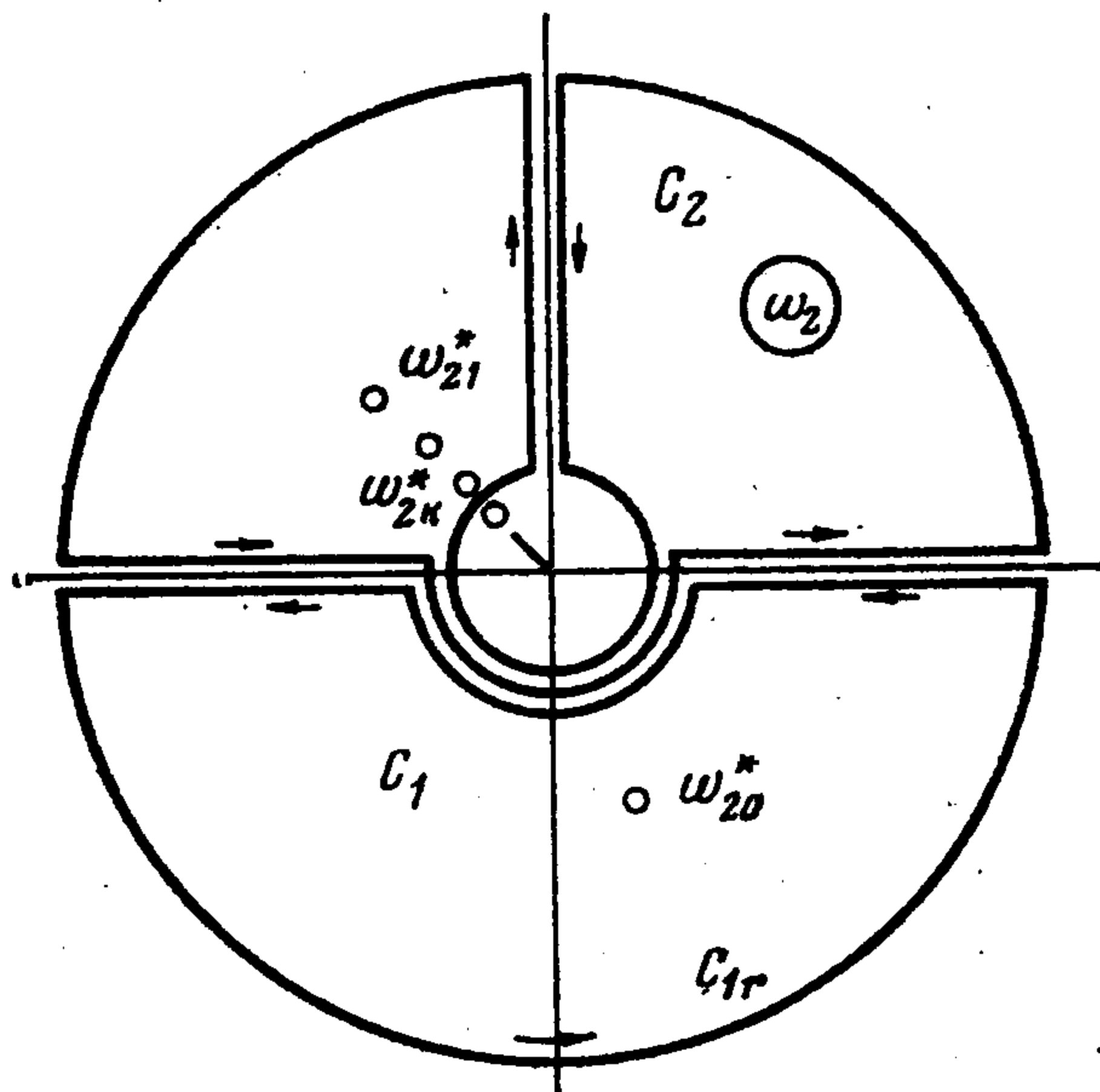
$$(2.7) \quad F_1(\omega, \Omega_1) = \Omega_1^2 \text{Ai}'(\Omega_1) - \omega^2 (I_0 - I_1)(\Omega_1) = 0$$

$$-\pi/6 < \arg \Omega_1 < 7\pi/6$$

Ограничения, наложенные на $\arg \Omega_1$, связаны с ограничениями для $\arg \omega_2$. Зафиксировав ω , построим на комплексной плоскости Ω_1 два семейства линий уровня:



Фиг. 2



Фиг. 3

$\text{Re}(F_1(\omega, \Omega_1)) = 0$ и $\text{Im}(F_1(\omega, \Omega_1)) = 0$, тогда точки пересечения линий разных семейств дадут корни уравнения (2.7). Характерная картина линий уровня ($\omega = 1$) приведена на фиг. 2 (сплошные линии — это линии $\text{Re}(F_1) = 0$, штриховые линии — $\text{Im}(F_1) = 0$, заштрихована часть комплексной плоскости Ω_1 , для которой не выполнены ограничения (2.7) для $\arg \Omega_1$), корни уравнения (2.7) отмечены символами Ω_{10}^* , Ω_{11}^* , Ω_{12}^* , Ω_{11}^{**} , \dots

На отрицательной части действительной оси расположено счетное множество корней, уходящее в бесконечность. В первом квадранте — один корень Ω_{10}^* и в четвертом квадранте — также один корень Ω_{11}^{**} , однако его необходимо отбросить, так как он лежит в «запрещенной» части плоскости переменной Ω_1 . На самом деле, для удобства вычислений корень Ω_{11}^{**} можно использовать, он должен быть учтен при переходе на второй лист полной римановой поверхности переменной ω_2 , как это будет сделано в п. 3. Однако никакого физического смысла корню Ω_{11}^{**} придать не удастся, поскольку ему соответствует ω_2^{**} с $\arg \omega_2^{**} > \pi/2$, а для таких ω_2 равенство (2.6) оказывается неверным. Наоборот, корни Ω_{10}^* , Ω_{11}^* , \dots могут быть легко интерпретированы. Вернемся для этого на плоскость ω_2 , изображенную на фиг. 3. Корни Ω_{10}^* и Ω_{11}^* , Ω_{12}^* , \dots перейдут в ω_{20}^* , расположенный в четвертом квадранте, и в ω_{21}^* , ω_{22}^* , \dots , расположенные на отрезке, выходящем из начала координат под углом $-5\pi/4$. Для больших значений ω первые корни Ω_{11}^* , Ω_{12}^* , \dots будут расположены не на самой отрицательной оси, а в ее окрестности. Однако при $\omega \rightarrow \infty$ справедливы соотношения $\arg \Omega_{11}^* \rightarrow \pi$, $\arg \Omega_{12}^* \rightarrow \pi$, \dots . Это приводит к тому, что часть корней ω_{21}^* , ω_{22}^* , \dots будет иметь аргументы, не равные $-5\pi/4$, но близкие к этому значению.

Уравнение (2.7) в других переменных уже встречалось в литературе [3, 5], оно возникает как дисперсионное соотношение при изучении специального рода возмущений, распространяющихся как вверх, так и вниз по потоку. Корни этого уравнения отвечают некоторым собственным решениям (1.6). Так, ω_{20}^* порождает решение, описываю-

щее затухание возмущений вверх по потоку ($x < 0$). При $\omega = 0$ оно переходит в известное решение [10]. Собственные функции, порождаемые ω_{21}^* , ω_{22}^* , ..., можно интерпретировать как возмущения, распространяющиеся вниз по потоку [6].

Как было отмечено в работе [6], для вычисления интеграла (2.5) удобно на плоскости ω_2 выделить два контура. Для $x < 0$ выберем контур интегрирования C_1 (фиг. 3), лежащий в нижней полуплоскости и состоящий из отрезка действительной оси от r до $-r$ с обходом точки O и дуги окружности радиуса r . Для $x > 0$ выберем контур интегрирования C_2 , лежащий в основном в верхней полуплоскости и состоящий из отрезка действительной оси от $-r$ до r с обходом точки O , дуг окружностей радиуса r и двух берегов разреза вдоль мнимой оси с обходом точки O . Применяя теорему Коши о вычетах к интегралу по контуру C_1 и устремляя радиус большой полуокружности r к бесконечности, а радиус малой полуокружности к нулю, получим для $x < 0$

$$(2.8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11} d\omega_2 = -2\pi i \operatorname{res} \Phi_{11}(\omega_{20}^*) = B(\omega, \omega_{20}^*) \exp(i\omega_{20}^* x)$$

$$B = -3\pi i \frac{I_0 - I_1(\Omega_{10}^*)}{2i(I_0 - I_1(\Omega_{10}^*)) + \Omega_{10}^*(i - \omega^2 / \omega_{20}^{*2}) \operatorname{Ai}(\Omega_{10}^*)}$$

Для контура C_2 также можно применить теорему о вычетах с той лишь разницей, что окружность, охватывающую точку O , следует сжимать не непрерывно, а дискретно, проводя ее всякий раз между соседними полюсами ω_{2k}^* и ω_{2k+1}^* . При этом ряд, составленный из вычетов $\operatorname{res} \Phi_{11}(\omega_{2k})$, быстро сходится, поскольку $|\operatorname{res} \Phi_{11}(\omega_{2k})| = O(k^{-3})$ при $k \rightarrow \infty$. В результате для $x > 0$ имеем

$$(2.9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11} d\omega_2 = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res} \Phi_{11}(\omega_{2k}^*) + I_3(\omega, x) + I_4(\omega, x)$$

Здесь I_3 и I_4 — интегралы от Φ_{11} вдоль берегов разреза. Каждый член ряда в правой части (2.9) можно рассматривать как бегущую волну переменной амплитуды аналогично тому, как это было сделано в работе [11].

Если формула (2.8) с точки зрения проведения вычислений на ЭВМ вполне удобна, то этого нельзя сказать о формуле (2.9). Особые трудности в подсчете по ней связаны с вычислением интегралов I_3 и I_4 . Выберем иной способ расчета, не основанный на формуле (2.9). Используем контур C_1 и для $x > 0$, обозначим его часть, состоящую из полуокружности радиуса r , через C_{1r} и применим теорему о вычетах (с уменьшением радиуса интеграл по малой полуокружности контура C_1 независимо от знака x стремится к нулю)

$$(2.10) \quad \int_{-r}^r \Phi_{11} d\omega_2 = \int_{C_{1r}} \Phi_{11} d\omega_2 - 2\pi i \operatorname{res} \Phi_{11}(\omega_{20}^*)$$

При вычислении интеграла по контуру C_{1r} для $r \gg 1$ величина $|\Omega_1| = \omega / r^{2/3} \ll 1$. Для таких значений Ω_1 функцию Эйри заменим рядом (2.2). Запишем дробь, входящую в подынтегральное выражение (2.5),

в виде (см. 2.1))

$$(2.11) \quad G(\omega, \Omega_1) = \Omega_1^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{1k} \Omega_1^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \Omega_1^k \right)^{-1}$$

Коэффициенты c_{1k} и c_{2k} определяются из разложений в ряд интеграла и производной от функции Эйри, эти разложения получают почленным интегрированием и дифференцированием ряда (2.2). Коэффициенты c_{2k} будут зависеть от ω . Поделим ряды в правой части (2.11), в результате получим

$$(2.12) \quad G(\omega, \Omega_1) = \Omega_1^2 (c_{g,0} + c_{g,1} \Omega_1 + \dots + c_{g,k} \Omega_1^k + \dots)$$

Отметим, что в формуле (2.12) $c_{g,0} = -1/\omega^2$, $c_{g,1} = 0$. Подставим разложение (2.12) в интеграл (2.10) и перейдем к переменной ω_2 (напомним, что, как было оговорено в (2.5), $i = e^{i\pi/2}$)

$$(2.13) \quad \int_{c_{1r}} \Phi_{11} d\omega_2 = \int_{c_{1r}} \left(\frac{i\omega^2}{\omega_2} c_{g,0} + \dots + \frac{i^{1+k/3} \omega^{2+k}}{\omega_2^{1+2k/3}} c_{g,k} + \dots \right) \times \\ \times \exp(i\omega_2 x) d\omega_2$$

Для каждого члена ряда (2.13) интегрирование можно провести аналитически, при этом удобно выделить три группы членов, две из которых зависят от Γ -функции. Переходя к пределу при $r \rightarrow \infty$, получим

$$(2.14) \quad I_C(\omega, x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{c_{1r}} \Phi_{11} d\omega_2 = -2\pi\omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} (i\omega)^{3k} x^{2k} \frac{c_{g,3k}}{(2k)!} - \\ - i\sqrt{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \omega^3 x^{2/3} \sum_{k=1}^{\infty} (i\omega)^{3k} x^{2k} \frac{c_{g,3k+1}}{2/3 \cdot 5/3 \dots (2k + 2/3)} + \\ + \sqrt{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \omega^4 x^{4/3} \sum_{k=0}^{\infty} (i\omega)^{3k} x^{2k} \frac{c_{g,3k+2}}{1/3 \cdot 4/3 \dots (2k + 4/3)}$$

Нижняя граница индекса k ко второй сумме (2.14) — единица, поскольку, как отмечалось выше, $c_{g,1} = 0$, это равенство обеспечивает равенство нулю производной dI_C/dx при $x = 0$. Приведенный способ вычисления интеграла $I_C(\omega, x)$ удобен для $\omega \geq 1$. Для $\omega < 1$ выражение (2.11) следует раскладывать в ряд, используя переменную $\Omega_2 = \Omega_1/\omega$. Это, естественно, вызовет изменение в значениях коэффициентов $c_{g,k}$ (конечно, по-прежнему $c_{g,1} = 0$). В свою очередь, ряд, аналогичный (2.14), может быть получен из (2.14), если в нем положить $\omega = 1$. Выбор разложения по переменной Ω_1 или по Ω_2 связан с тем, что коэффициенты $c_{g,k}$ вычисляются до подстановки в ряд (2.14). Поэтому для заданного ω желательно использовать такую модификацию разложения, при которой коэффициенты $c_{g,k}$ росли бы не очень быстро с увеличением номера k . Используя (2.8) и (2.14), из формулы (2.10) найдем

$$(2.15) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11} d\omega_2 = B(\omega, \omega_{20}^*) \exp(i\omega_{20}^* x) + I_C(\omega, x)$$

Распространив обозначение $I_C(\omega, x)$, введенное в (2.14), на новые значения независимых переменных, будем понимать под символом $I_C(\omega, x - x_0)$ ряд (2.14), в котором x заменено на $x - x_0$. Это дает возможность записать

$$(2.16) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{12} d\omega_2 = -\frac{a}{a-b} [B(\omega, \omega_{20}^*) \exp(i\omega_{20}^*(x-b)) + I_C(\omega, x-b)]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{13} d\omega_2 = \frac{b}{a-b} [B(\omega, \omega_{20}^*) \exp(i\omega_{20}^*(x-a)) + I_C(\omega, x-a)]$$

И, окончательно, подставляя (2.4), (2.15) и (2.16) в формулу (2.3), для интеграла от Φ_0 , определяющего, согласно (2.1), давление, получим

$$(2.17) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0 d\omega_2 = B(\omega, \omega_{20}^*) \left[1 - \frac{a}{a-b} \exp(-i\omega_{20}^*b) + \right.$$

$$\left. + \frac{b}{a-b} \exp(-i\omega_{20}^*a) \right] \exp(i\omega_{20}^*x) + \theta(x) [2\pi - I_C(\omega, x)] -$$

$$- \frac{a}{a-b} \theta(x-b) [2\pi - I_C(\omega, x-b)] +$$

$$+ \frac{b}{a-b} \theta(x-a) [2\pi - I_C(\omega, x-a)]$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Вычисления на ЭВМ по формуле (2.17) не сопряжены с какими-либо трудностями. Затраты машинного времени невелики, в основном они связаны с вычислением отрезка ряда (2.14), с границей верхнего индекса $k \leq 15$.

На фиг. 4 приведены графики зависимости давления p_1 от x для треугольника с параметрами $b = 1$, $a = 2$, колеблющегося с частотой $\omega = 1$, для моментов времени $t = 0, T/8, T/4, 3T/8$, где $T = 2\pi/\omega$ (кривые I—IV соответственно). Производная давления по x в точках $x = 0, b, a$ непрерывна, однако, как следует из разложения (2.14), вторая производная $\partial^2 p / \partial x^2$ в этих точках имеет разрыв второго рода. Это связано с разрывом производной $\partial y_w / \partial x$.

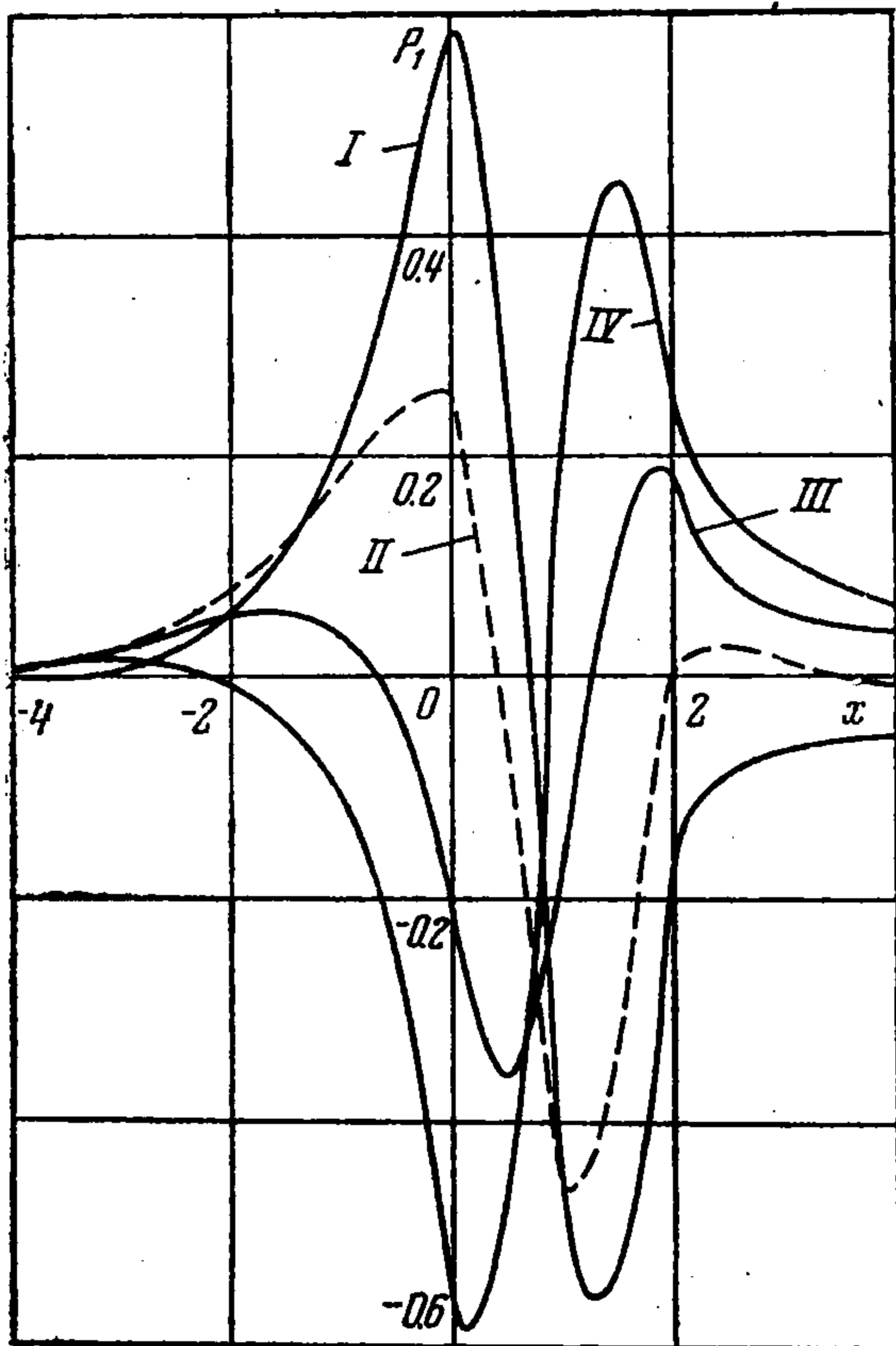
На фиг. 5 приведены графики зависимости амплитуды давления

$$A(p_1) = \frac{1}{\pi} [(\operatorname{Re}(\Phi_0))^2 + (\operatorname{Im}(\Phi_0))^2]^{1/2}$$

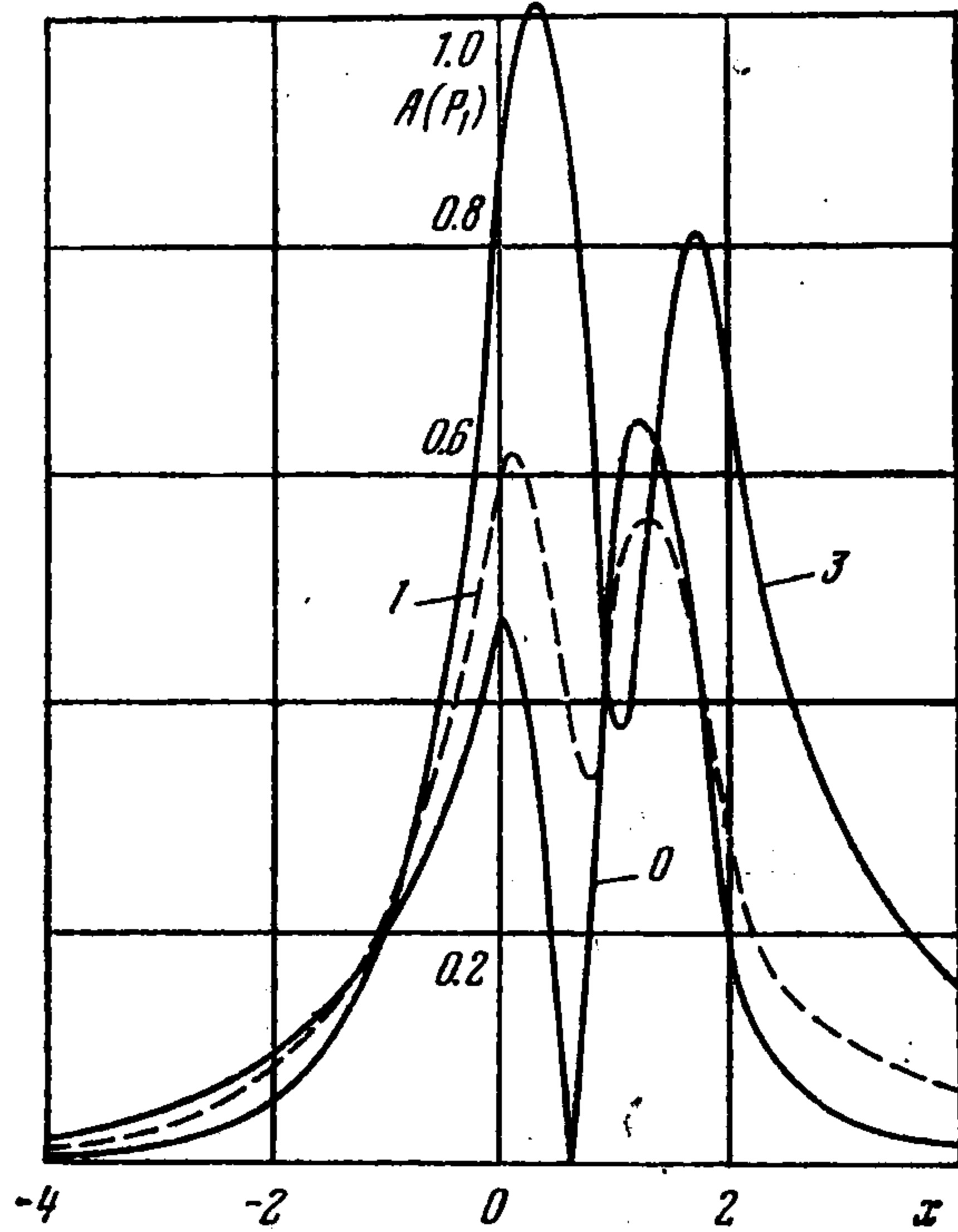
от x для треугольника с теми же параметрами, что на фиг. 4, колеблющегося с частотами $\omega = 0$ (стационарный треугольник); 1; 3. Если при обтекании стационарного треугольника имеется точка x , в которой $A(p_1) = 0$, то при обтекании колеблющегося треугольника такой точки нет.

3. Асимптотика давления при $x \rightarrow \infty$ и $\omega \rightarrow \infty$. Поведение давления при $x \rightarrow -\infty$ определяется из анализа формулы (2.17). Поскольку $\operatorname{Im} \omega_{20}^* < 0$, то давление стремится к нулю по экспоненциальному закону как $\exp(-\operatorname{Im}(\omega_{20}^*)x)$. При $x \rightarrow \infty$ формула (2.9) позволяет утверждать, что $I_2(\omega, x) \rightarrow 0$, так как под знаками интегралов $I_3(\omega, x)$ и $I_4(\omega, x)$ стоят экспоненциально убывающие функции, а ряд состоит из членов, каждый из которых убывает по экспоненциальному закону. Если вычис-

ление асимптотики интегралов I_3 и I_4 не сопряжено с какими-либо трудностями, то определение асимптотики ряда (2.9) вызывает затруднения. Заметим также, что формула (2.15) при $x \rightarrow \infty$ не может быть использо-

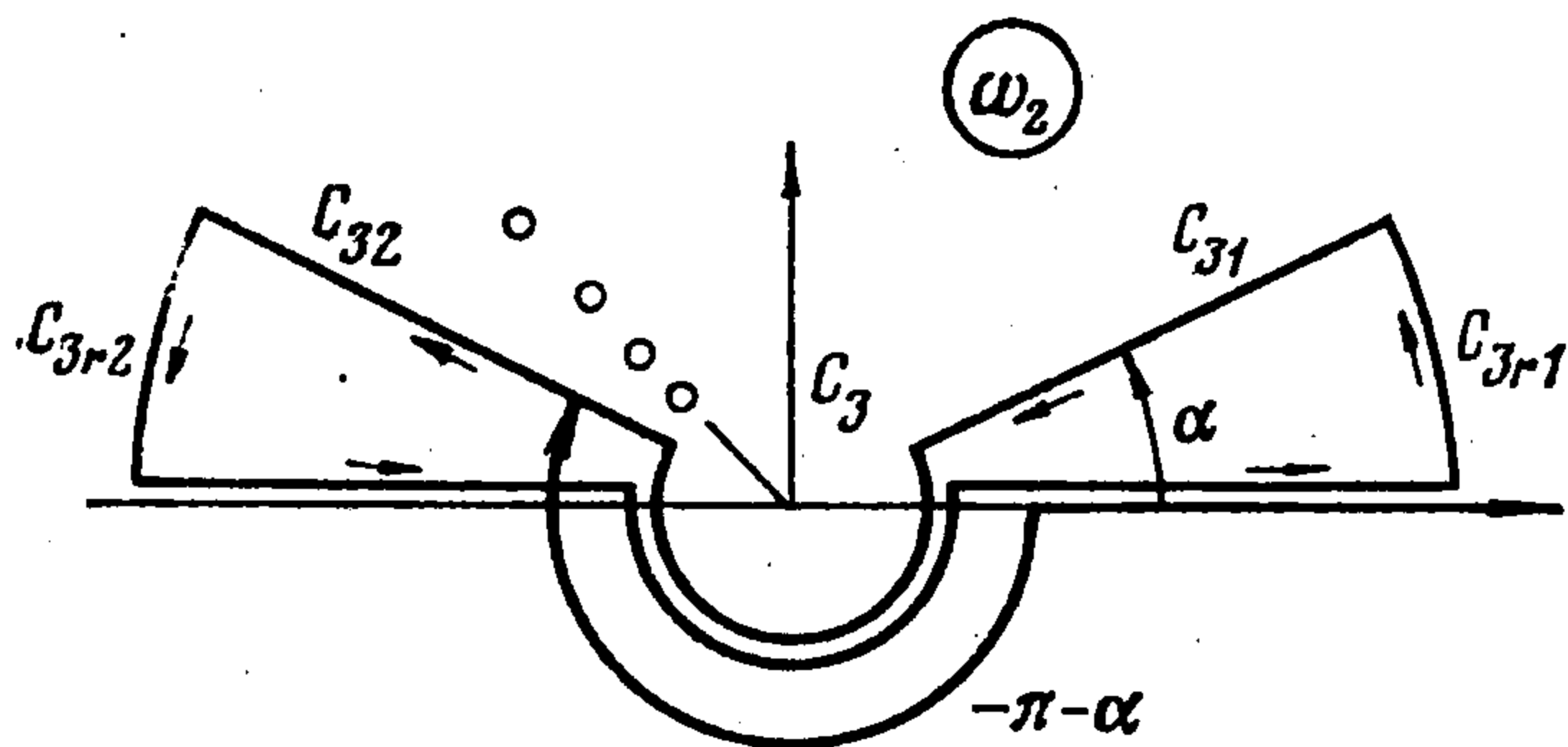


Фиг. 4



Фиг. 5

вана для расчетов, поскольку результат в ней находится как разность двух величин, каждая из которых стремится к бесконечности.



Фиг. 6

Для анализа интеграла (2.5) при $x \rightarrow \infty$ опять рассмотрим его на комплексной плоскости ω_2 . В качестве контура интегрирования выберем контур C_3 , состоящий из отрезка действительной оси с обходом точки O , из двух дуг C_{3r1} и C_{3r2} и двух отрезков C_{31} и C_{32} с обходом точки O . Пусть угол наклона α отрезка C_{31} к действительной оси меньше $\pi/4$ (см. фиг. 6).

Устремляя радиусы дуг C_{3r1} и C_{3r2} к бесконечности, а радиус обхода точки O к нулю, получим для $x > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11} d\omega_2 = - \left(\int_{C_{31}} + \int_{C_{32}} \right) \Phi_{11} d\omega_2$$

Запишем интегралы по C_{31} и C_{32} , используя замену переменных

$$(3.1) \quad C_{31}: \omega_2 = e^{i\alpha} q, \quad \Omega_{11} \equiv \Omega_{11} = e^{i(\pi/6 - 2\alpha/3)} \omega q^{-2/3}$$

$$\int_{C_{31}} \Phi_{11} d\omega_2 = - \int_0^{\infty} (I_0 - I_1(\Omega_{11})) \exp[ixq \cos \alpha - xq \sin \alpha + i(\pi/6 + 4\alpha/3)] [\text{Ai}'(\Omega_{11}) + e^{i(2\pi/3 + 4\alpha/3)} q^{1/3} (I_0 - I_1(\Omega_{11}))]^{-1} q^{1/3} dq$$

$$(3.2) \quad C_{32}: \omega_2 = e^{-i(\pi+\alpha)}q, \quad \Omega_1 \equiv \Omega_{12} = e^{i(5\pi/6+2\alpha/3)}\omega q^{-2/3} \\ \int_{C_{32}} \Phi_{11} d\omega_2 = \int_0^\infty (I_0 - I_1(\Omega_{12})) \exp \left[-ixq \cos \alpha - xq \sin \alpha - \right. \\ \left. - i \left(\frac{7\pi}{6} + \frac{4\alpha}{3} \right) \right] [Ai'(\Omega_{12}) + e^{-i(2\pi/3+4\alpha/3)}q^{4/3} (I_0 - I_1(\Omega_{12}))]^{-1} q^{1/3} dq$$

Рассмотрим интеграл (3.1) на верхней полуплоскости, образованной первым и вторым листами полной римановой поверхности. Теперь для $\arg \omega_2$ справедливы ограничения $\pi > \arg \omega_2 > 0$. Во втором квадранте имеется полюс первого порядка ω_2^{**} , соответствующий корню дисперсионного соотношения Ω_1^{**} (см. фиг. 2), причем, как это следует из анализа зависимости $\omega_2^{**}(\omega)$, справедливо неравенство $\arg \omega_2^{**} > 3\pi/4$. Если в качестве пути интегрирования в (3.1) взять луч, выходящий под углом β из начала координат, то значение интеграла (3.1) не будет зависеть от угла β при

$$(3.3) \quad 0 < \beta < \arg \omega_2^{**}$$

Выберем $\beta = \pi - \alpha$, тогда, учитывая (3.3) для α получим неравенство

$$(3.4) \quad \pi - \arg \omega_2^{**} < \alpha < \pi/4$$

Множество α , удовлетворяющее неравенству (3.4), не является пустым, поскольку, как отмечалось выше, $\arg \omega_2^{**} > 3\pi/4$. Заметим, что если выбрать α не из диапазона (3.4), а из более широкого диапазона $0 < \alpha < \pi/4$, то окончательный результат не изменится, однако в этом случае необходимо будет учитывать вычет $\text{res} \Phi_{11}(\omega_2^{**})$.

Выбрав $\beta = \pi - \alpha$ и выполняя интегрирование по C_{31}' , перепишем интеграл (3.1) в виде

$$(3.5) \quad C_{31}': \omega_2 = e^{i(\pi-\alpha)}q, \quad \Omega_1 \equiv \Omega_{13} = e^{-i(\pi/2-2\alpha/3)}\omega q^{-2/3} \\ \int_{C_{31}'} \Phi_{11} d\omega_2 = \int_{C_{31}'} \Phi_{11} d\omega_2 = - \int_0^\infty \exp \left[\varphi_1(x, q, \alpha) + \right. \\ \left. + i \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{4\alpha}{3} \right) \right] (I_0 - I_1(\Omega_{13})) [Ai'(\Omega_{13}) + \\ + e^{-i4\alpha/3}q^{4/3} (I_0 - I_1(\Omega_{13}))]^{-1} q^{1/3} dq \\ \varphi_1(x, q, \alpha) = -ixq \cos \alpha - xq \sin \alpha$$

Объединяя интегралы (3.2) и (3.5), получим

$$(3.6) \quad \int_{-\infty}^\infty \Phi_{11} d\omega_2 = -ie^{-i4\alpha/3} \int_0^\infty e^{\varphi_1(x, q, \alpha)} \\ [Ai'(\Omega_{12})(I_0 - I_1(\Omega_{13})) + e^{i\pi/3} Ai'(\Omega_{13})(I_0 - I_1(\Omega_{12}))] [Ai'(\Omega_{13}) + \\ + e^{-i4\alpha/3}q^{4/3} (I_0 - I_1(\Omega_{13}))]^{-1} [Ai'(\Omega_{12}) + \\ + e^{-i(2\pi/3+4\alpha/3)}q^{4/3} (I_0 - I_1(\Omega_{12}))]^{-1} q^{1/3} dq$$

Согласно [8], функция Эйри удовлетворяет соотношению

$$(3.7) \quad Ai(z) + e^{-2\pi i/3} Ai(e^{-2\pi i/3}z) + e^{-4\pi i/3} Ai(e^{-4\pi i/3}z) = 0$$

С помощью дифференцирования и интегрирования получим из (3.7) следствия

$$(3.8) \quad \text{Ai}'(z) + e^{-2\pi i/3} \text{Ai}'(e^{-4\pi i/3} z) + e^{-4\pi i/3} \text{Ai}'(e^{-2\pi i/3} z) = 0$$

$$\int_0^z \text{Ai}(z_1) dz_1 + \int_0^{ze^{-2\pi i/3}} \text{Ai}(z_1) dz_1 + \int_0^{ze^{-4\pi i/3}} \text{Ai}(z_1) dz_1 = 0$$

Применим соотношения (3.8) к выражению в квадратных скобках в числителе дроби (3.6), в результате найдем

$$(3.9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11} d\omega_2 = -ie^{-i4\alpha/3} \int_0^{\infty} e^{\varphi_1(x, q, \alpha)} G_1(\omega, q, \alpha) q^{1/3} dq$$

$$G_1(\omega, q, \alpha) = [3e^{i\pi/3} I_0 \text{Ai}'(e^{-4\pi i/3} \Omega_{12}) - e^{i\pi/3} \text{Ai}'(e^{-4\pi i/3} \Omega_{12}) \times$$

$$\times (I_0 - I_1(e^{-2\pi i/3} \Omega_{12})) + e^{-i\pi/3} \text{Ai}'(e^{-2\pi i/3} \Omega_{12})(I_0 - I_1(e^{-4\pi i/3} \Omega_{12}))] \times$$

$$\times [\text{Ai}'(\Omega_{13}) + e^{-i4\alpha/3} q^{1/3} (I_0 - I_1(\Omega_{13}))]^{-1} [\text{Ai}'(\Omega_{12}) +$$

$$+ e^{-i(2\pi/3+4\alpha/3)} q^{1/3} (I_0 - I_1(\Omega_{12}))]^{-1} q^{1/3} dq$$

Формула (3.9) является основной для изучения асимптотического поведения давления при $x \rightarrow \infty$. Заметим, что интеграл в правой части (3.9) записан в форме, удобной для вычисления асимптотики методом перевала. Разобьем интервал интегрирования от 0 до ∞ на два подынтервала: от 0 до ε_1 , где $\varepsilon_1 \ll 1$, и от ε_1 до ∞ . Можно показать, что интеграл по второму интервалу при $x \rightarrow \infty$ имеет порядок $\exp(-\varepsilon_1 x \sin \alpha)$. Остановимся на интеграле от 0 до ε_1 , в котором для переменных Ω_{12} и Ω_{13} справедливы неравенства $|\Omega_{12}| = |\Omega_{13}| \geq \omega/\varepsilon_1^{2/3} \gg 1$. Воспользуемся асимптотическим разложением функции Эйри в окрестности бесконечно удаленной точки [8]

$$(3.10) \quad \text{Ai}(z) \sim \frac{1}{2} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-3k/2}$$

$$|z| \rightarrow \infty, \quad |\arg z| < \pi$$

В формуле (3.10) a_k — действительные коэффициенты, зависящие от номера k [8]. Пользуясь формулой (3.10), получим асимптотические разложения для производной и интеграла функции Эйри

$$(3.11) \quad \text{Ai}'(z) \sim -\frac{1}{2} z^{1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-3k/2}$$

$$\int_0^z \text{Ai}(z_1) dz_1 \sim \int_0^z \text{Ai}(x) dx - \frac{1}{2} z^{-3/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-3k/2}$$

$$|z| \rightarrow \infty, \quad |\arg z| < \pi$$

Здесь действительные постоянные b_k, c_k зависят от номера k , причем $a_0 = b_0 = c_0 = 1$. Заменим производные и интегралы от функции Эйри в (3.9) их асимптотиками, вычисленными согласно (3.11). Для α , удовлетворяющих условию (3.4), это всегда можно сделать, поскольку аргументы выражений $e^{-4\pi i/3} \Omega_{12}, e^{-2\pi i/3} \Omega_{12}, \Omega_{12}, \Omega_{13}$ по модулю меньше π . Как и в п. 2 (переход от (2.11) к (2.12)), выполним деление полиномов, в ре-

зультате получим

$$(3.12) \quad G_1(\omega, q, \alpha) \sim 6I_0 e^{\pi i/3} \Omega_{12}^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} \Omega_{12}^{3/2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} c_{g1, k} \Omega_{12}^{-3k/2}$$

Подставим разложение (3.12) в правую часть (3.9), где интегрирование ведется от 0 до ε_1 , и рассмотрим член k этого разложения

$$(3.13) \quad I_k(\omega, x, \alpha) = 6iI_0 c_{q1, k} \omega^{-1/4-3k/2} \exp\left[i\pi\left(\frac{1}{8} - \frac{5k}{4}\right) - i\alpha\left(\frac{3}{2} + k\right)\right] I_{k1}$$

$$I_{k1}(\omega, x, \alpha) = \int_0^{\varepsilon_1} \exp[\varphi_2(\omega, x, q, \alpha)] q^{1/2+k} dq$$

$$\varphi_2 = -xq \sin \alpha - \frac{2}{3} \omega^{3/2} q^{-1} \cos(\pi/4 + \alpha) - i[xq \cos \alpha + \frac{2}{3} \omega^{3/2} q^{-1} \sin(\pi/4 + \alpha)]$$

В интеграле I_{k1} введем замену переменных $q = q_1 \sqrt{x}$, тогда верхний предел интегрирования будет $\varepsilon_1 \sqrt{x}$. Можно показать, что замена верхнего предела интегрирования на ∞ вызовет ошибку порядка $\exp(-\varepsilon_1 x \sin \alpha)$. Получим

$$(3.14) \quad I_{k1} = x^{-(3/2+k)/2} \int_0^{\infty} \exp[-\sqrt{x} \varphi_3(\omega, q_1, \alpha)] q_1^{1/2+k} dq_1$$

$$\varphi_3 = q_1 \sin \alpha + \frac{2}{3} \omega^{3/2} q_1^{-1} \cos(\pi/4 + \alpha) + i[q_1 \cos \alpha + \frac{2}{3} \omega^{3/2} q_1^{-1} \sin(\pi/4 + \alpha)]$$

Для оценки функции I_{k1} при $x \rightarrow \infty$ можно использовать метод перевала. Однако здесь в этом нет необходимости, поскольку для указанного вида функции $\varphi_3(\omega, q_1, \alpha)$ интеграл в правой части (3.14) хорошо изучен. Имеем (см. [12], стр. 354)

$$(3.15) \quad I_{k1} = x^{-(3/2+k)/2} 2 \left[\frac{2}{3} \omega^{3/2} e^{i(-\pi/4+2\alpha)}\right]^{3/4+k/2} K_{k+3/2}(2^{3/2} 3^{-1/2} \omega^{3/4} e^{3\pi i/8} x^{1/2})$$

$$(3.16) \quad K_{k+3/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{m=0}^{k+1} \frac{(k+1+m)!}{m!(k+1-m)!(2z)^m}$$

Последовательно подставляя (3.15) в (3.13) и (3.13) в (3.9), получим асимптотику интеграла (3.9) при $x \rightarrow \infty$

$$(3.17) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11} d\omega_2 \sim I_{as}(\omega, x) \equiv 12i \left(\frac{2}{3}\right)^{3/4} I_0 \omega^{1/4} x^{-3/4} e^{-\pi i/16} \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} c_{q1, k} \left(\frac{2}{3}\right)^{k/2} e^{-11\pi i k/3} \omega^{-3k/4} x^{-k/2} K_{k+3/2}(2^{3/2} 3^{-1/2} \omega^{3/4} e^{3\pi i/8} x^{1/2})$$

Пользуясь равенством $c_{g1, 0} = 1$ и вычисляя $K_{3/2}$ по формуле (3.16), выпишем главный член асимптотики (3.17)

$$(3.18) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11} d\omega_2 \sim 2i \sqrt{6\pi} I_0 e^{-\pi i/4} x^{-1} \exp(-2^{3/2} 3^{-1/2} \omega^{3/4} e^{3\pi i/8} x^{1/2})$$

Как и следовало ожидать, асимптотика (3.17) не зависит от угла α . Распространив обозначение $I_{as}(\omega, x)$ на новые значения переменных, будем понимать под символом $I_{as}(\omega, x - x_0)$ ряд (3.17), в котором x заме-

нено на $x - x_0$. Это дает возможность при $x \rightarrow \infty$ выписать асимптотику интеграла от Φ_0 в виде

$$(3.19) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0 d\omega_2 \sim - \left[I_{as}(\omega, x) - \frac{a}{a-b} I_{as}(\omega, x-b) + \right. \\ \left. + \frac{b}{a-b} I_{as}(\omega, x-a) \right]$$

Формулы (2.17) и (3.19) взаимно дополняют одна другую. Так, первая является сходящимся разложением по переменной x интеграла от Φ_0 в нуле ($x > 0$), а вторая — расходящимся асимптотическим разложением в бесконечности. Несмотря на расходимость ряда (3.17), им удобно пользоваться для вычислений на ЭВМ, ограничивая количество членов ряда.

Возмущение давления, вызванное колеблющимся треугольником, затухает при $x \rightarrow -\infty$ по экспоненциальному закону (2.8) с показателем степени, пропорциональным x . При $x \rightarrow \infty$ затухание происходит также по экспоненциальному закону (3.18); однако теперь показатель степени пропорционален $-\sqrt{x}$ (наличие в коэффициенте перед экспонентой степени x не учитывается).

Сравним полученные результаты с асимптотикой возмущения давления, вызванного покоящимся треугольником, $\omega = 0$. При $x \rightarrow -\infty$ затухание будет описываться по-прежнему формулой (2.8), оно будет более медленным, поскольку $\text{Im } \omega_{20}^* (\omega = 0) > \text{Im } \omega_{20}^* (\omega \neq 0)$. Можно показать, что при $x \rightarrow \infty$ характер асимптотики p_1 меняется, она становится степенной: $p_1 \sim x^{-1/2}$. Следовательно, возмущение давления, вызванное колеблющимся треугольником, затухает при $x \rightarrow \pm \infty$ всегда быстрее, чем возмущение, вызванное покоящимся треугольником. Особенно отличается область вниз по потоку $x \rightarrow \infty$, где характер затухания при $\omega \neq 0$ экспоненциальный, а при $\omega = 0$ степенной.

Для изучения асимптотики возмущения давления p_1 при $\omega \rightarrow \infty$ рассмотрим интеграл (2.5). Для $x < 0$ он вычисляется в явном виде, приведенном в (2.8). Пользуясь асимптотикой (3.11), запишем решение дисперсионного уравнения (2.7) в виде ряда [3]

$$(3.20) \quad \omega_{20}^* = e^{-\pi i/4} \omega^{1/2} + 1/2 e^{-3\pi i/4} \omega^{-1/2} + \dots$$

Определяя при помощи (3.20) и (3.11) величину $B(\omega, \omega_{20}^*)$, получим главный член разложения (2.5) при $\omega \rightarrow \infty$ и $x < 0$

$$(3.21) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1 d\omega_2 \sim -\pi \exp(\omega^{1/2} x e^{\pi i/4}).$$

Способ построения асимптотики интеграла (2.5) для $\omega \rightarrow \infty$ и $x > 0$ совпадает со способом построения асимптотики этого интеграла при $x \rightarrow \infty$, за исключением выбора угла α . При $\omega \rightarrow \infty$ для корня (2.7) на втором листе римановой поверхности имеем

$$(3.22) \quad \omega_2^{**} = e^{3\pi i/4} \omega^{1/2} + \frac{1}{2} e^{-3\pi i/4} \omega^{-1/2} + \dots$$

Из (3.22) заключаем, что в пределе при $\omega \rightarrow \infty$ неравенство (3.4) не может быть выполнено, поскольку $\arg \omega_2^{**} \rightarrow 3\pi/4$. Это заставляет выбрать α из диапазона

$$0 < \alpha < \pi - \arg \omega_2^{**}$$

В результате основную формулу для оценки интеграла (2.5) запишем в виде

$$(3.23) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11} d\omega_2 = -ie^{-i4\alpha/3} \int_0^{\infty} e^{\Phi_1} G_1(\omega, q, \alpha) q^{1/2} dq + 2\pi i \operatorname{res} \Phi_{11}(\omega_2^{**})$$

$$\Phi_1 = -ixq \cos \alpha - xq \sin \alpha$$

Хотя способ оценки при $\omega \rightarrow \infty$ интеграла в правой части (3.23) несколько отличается от способа оценки интеграла (3.9) при $x \rightarrow \infty$, результат оказывается одинаковым: этот интеграл стремится к нулю пропорционально $\exp(-2^{2/3} 3^{-1/2} \omega^{3/4} e^{3\pi i/3} x^{1/4})$. Второй же член в правой части (3.23) стремится к нулю как $\exp(-\omega^{1/2} e^{\pi i/4} x)$. Поэтому, сохраняя лишь второй — главный член в правой части (3.23), имеем

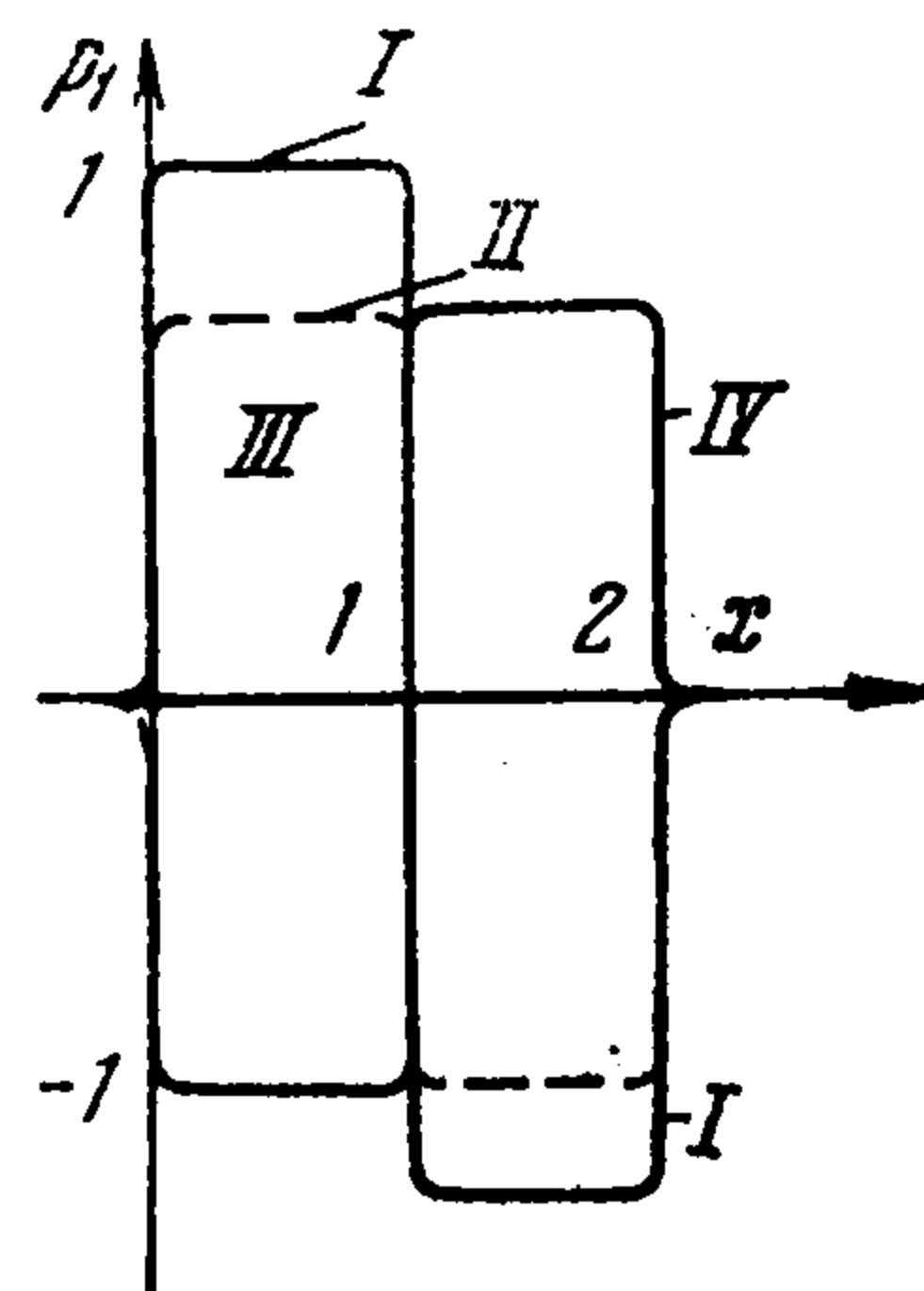
$$(3.24) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11} d\omega_2 \sim -\pi \exp(-\omega^{1/2} e^{\pi i/4} x), \quad \omega \rightarrow \infty, x > 0$$

Разложения для интегралов от Φ_{12} и Φ_{13} при $\omega \rightarrow \infty$ аналогичны.

Рассмотрим еще раз интеграл от Φ_0 ; согласно (2.1), представим его в виде

$$(3.25) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0 d\omega_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{00} d\omega_2 - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11} d\omega_2 - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{12} d\omega_2 - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{13} d\omega_2$$

Первый интеграл в правой части (3.25) не зависит от ω , его явный вид приведен в (2.4); при $\omega \rightarrow \infty$ второй интеграл, согласно (3.21) и (3.24), отличен от нуля лишь в малой окрестности точки $x = 0$; аналогично третий и четвертый отличны от нуля в окрестности точек $x = b$ и $x = a$ соответственно. Следовательно, при $\omega \rightarrow \infty$ основную роль в (3.25) играет разрывный интеграл (2.4). Интегралы от функций Φ_{11} , Φ_{12} и Φ_{13} позволяют лишь непрерывно соединить разрывы в (2.4) в точках $x = 0$, $x = b$, $x = a$. Поскольку мнимая часть интеграла (3.25) равна нулю при $\omega \rightarrow \infty$, давление p_1 также будет определяться выражением (2.4). График зависимости p_1 при $\omega \rightarrow \infty$ показан на фиг. 7 для моментов времени $t = 0, T/8, T/4, 3T/8$, где $T = 2\pi/\omega$ (кривые I — IV соответственно).



Фиг. 7

Покажем, что полученная зависимость давления от x и t при $\omega \rightarrow \infty$ точно такая же, как и давления в невязком сверхзвуковом потоке при медленных колебаниях стенки (1.4). Для этого перепишем соотношение (1.4), используя (1.1), в размерной форме (t — по-прежнему безразмерное время)

$$(3.26) \quad y_w^* = \varepsilon^2 C^{1/4} \lambda^{1/2} (M_\infty^2 - 1)^{1/4} q_{10}(x^*) \cos \omega t'$$

Здесь функция $q_{10}(x^*)$ задает треугольную форму (1.5), с параметрами a^* и b^* , связанными с a и b так же, как x^* с x из формулы (1.1).

Найдем давление, вызванное колебанием стенки (3.26) в области с характерными размерами $x^* = O(\varepsilon^3)$, $y^* = O(\varepsilon^3)$ и характерным временем $t^* = O(\varepsilon^2)$, в невязком сверхзвуковом потоке. Имеем

$$p^* = p_\infty^* + \rho_\infty^* v_\infty^{*2} \varepsilon^2 C^{1/4} \lambda^{1/2} (M_\infty^2 - 1)^{-1/4} \sigma \times$$

$$\times \left[\operatorname{sign} x^* - \frac{a^*}{a^* - b^*} \operatorname{sign}(x^* - b^*) + \frac{b^*}{a^* - b^*} \operatorname{sign}(x^* - a^*) \right] \cos \omega t'$$

Такое совпадение объясняется тем, что при $\omega \rightarrow \infty$ зависимость от времени необходимо будет учитывать для основной толщи пограничного слоя ($y \sim \varepsilon^4$). В свою очередь, такая задача может быть решена при помощи основной концепции Прандтля, согласно которой давление следует определять из решения внешней невязкой задачи.

Автор благодарит О. С. Рыжова и В. И. Жука за полезные дискуссии.

Поступила 20 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нейланд В. Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
 2. *Stewartson K.* On the flow near the trailing edge of a flat plate. II. *Mathematika*, 1969, vol. 16, No. 31.
 3. *Schneider W.* Upstream propagation of unsteady disturbances in supersonic boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 1974, vol. 63, pt 3.
 4. *Daniels P. G.* The flow about the trailing edge of a supersonic oscillating aerofoil. *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 72, pt 3.
 5. *Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением. ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
 6. *Терентьев Е. Д.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением около колеблющейся стенки в сверхзвуковом потоке. Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 5.
 7. *Фок В. А.* Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1946.
 8. *Вазов В. А.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
 9. *Stewartson K.* On laminar boundary layers near corners. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1970, vol. 23, pt 2.
 10. *Lighthill M. J.* On boundary layers and upstream influence. II. Supersonic flows without separation. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1953, vol. 217, No. 1131.
 11. *Жук В. И., Рыжов О. С.* Об одном свойстве линеаризованных уравнений пограничного слоя с самоиндуцированным давлением. Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 5.
 12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
-