Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 532.516:536.25

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦ КОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ДВУСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ

Г. И. Бурдэ, И. Б. Симановский

(Пермь)

Для определения границ конвективной устойчивости двуслойной системы применяется метод, позволяющий определять достаточно большое число критических чисел Релея и соответствующих им критических движений. Суть метода заключается в сведении задачи к алгебраической проблеме собственных значений путем дискретизации уравнений по методу конечных элементов или конечных разностей. Далее приводится только схема метода, основанная на дискретизации конечными элементами.

Для определения критических чисел Релея и соответствующих им критических движений в замкнутой полости обычно используется метод Галеркина [1]. Результаты, как правило, оказываются пригодными лишь для определения нескольких нижних уровней спектра, а при переходе к полости другой формы приходится менять систему базисных функций.

Применение предлагаемого метода к определению спектра критических чисел Релея и критических движений двуслойной системы не вызывает больших затруднений и демонстрируется на примере полости квадратного сечения, заполненной несмешивающимися жидкостями в равном отношении. Предполагается, что граница раздела жидкостей горизонтальна, не подвержена деформациям (поверхностное натяжение велико) и проходит посредине полости, термокапиллярные эффекты не учитываются. Ниже будет рассматриваться два случая: полость с твердыми идеально проводящими тепло границами и конвективная ячейка бесконечного горизонтального слоя жидкости (горизонтальные границы твердые, боковые границы свободные).

1. Для применения метода необходима вариационная формулировка задачи. Получим соответствующий функционал, записывая уравнения для нейтральных плоских возмущений равновесия несжимаемой жидкости через функцию тока ψ, вихрь φ и возмущение равновесной температуры T

$$\Delta\psi - \varphi = 0, \quad \Delta\varphi - \sqrt{R}\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \Delta T - \sqrt{R}\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

$$(R = g\beta A l^4 / (\nu\chi), \ \Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)$$

В качестве единиц измерения длины, скорости и температуры выбраны соответственно величины l, ν / l, $(\nu / l)\,[A\nu / (\beta g \chi)]^{1/2}$ (l — характерный размер, A — градиент температуры, остальные обозначения обычные).

Решения уравнений (1.1) осуществляют экстремум функционала

$$J = \int_S \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\varphi^2 - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 - \right.\right. \tag{1.2}$$

$$\left.\left. - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \sqrt{R}\left(\psi\frac{\partial T}{\partial x} - T\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]\right\} dx\,dy$$

при граничных условиях для ψ и φ, соответствующих свободным либо твердым границам, и условиях для T, соответствующих теплоизолированным либо идеально проводящим тепло границам.

Функционал для двуслойной системы представляет собой сумму функционалов вида (1.2), поскольку при обезразмеривании уравнений по параметрам одной из жидкостей коэффициенты уравнений для верхней и нижней жидкостей различны

$$
\begin{gathered}
\Delta\psi^{(k)} - \varphi^{(k)} = 0 \\
\Delta\varphi^{(k)} - \sqrt{R}\, a^{(k)} \frac{\partial T^{(k)}}{\partial x} = 0 \\
\Delta T^{(k)} - \sqrt{R}\, b^{(k)} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial x} = 0, \quad k = 1, 2 \\
a^{(1)} = 1, \quad a^{(2)} = \varepsilon, \quad b^{(1)} = 1, \quad b^{(2)} = \chi_r \varkappa_r
\end{gathered} \tag{1.3}
$$

Здесь и далее индексом 1 обозначаются величины, относящиеся к верхней жидкости, а индексом 2 — к нижней. В качестве единиц измерения длины, скорости и температуры в (1.3) использованы соответственно половина стороны квадрата l, ν_1 / l и $(\nu_1 / l)\,[A_1\nu_1 / (\beta_1 g\chi_1)]^{1/2}$, где A_1 обозначает величину равновесного градиента температуры в верхней жидкости.

Уравнения (1.3) содержат четыре безразмерных параметра: число Релея $R = g\beta_1 l^4 A_1 / (\nu_1\chi_1)$ и отношения характеристик верхней и нижней жидкостей $\varkappa_r = \varkappa_1 / \varkappa_2$, $\chi_r = \chi_1 / \chi_2$, $\varepsilon = \nu_1\beta_2 / (\nu_2\beta_1)$.

Эти уравнения должны быть дополнены условиями на границе раздела жидкостей ($y = 1$). Из отсутствия вертикальных перемещений границы раздела и равенства горизонтальных скоростей и температур следует

$$
\psi^{(1)} = \psi^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial y}, \quad T^{(1)} = T^{(2)} \tag{1.4}
$$

Непрерывность касательных напряжений и тепловых потоков приводит к соотношениям

$$
\eta_r \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)}, \quad \varkappa_r \frac{\partial T^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial T^{(2)}}{\partial y} \tag{1.5}
$$

Условия на границе раздела содержат еще один параметр η_r, представляющий собой отношение коэффициентов динамической вязкости верхней и нижней жидкостей.

На твердых, идеально проводящих тепло горизонтальных границах полости выполняются соотношения

$$
\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad T = 0 \quad (y = 0, 2) \tag{1.6}
$$

Условия на боковых твердых, идеально теплопроводящих границах записываются в виде

$$
\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad T = 0 \quad (x = 0, 2) \tag{1.7}
$$

В случае свободных границ (боковые стороны конвективной ячейки) — в виде

$$
\psi = \varphi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (x = 0, 2) \tag{1.8}
$$

Выпишем полный вид функционала, экстремум которого осуществляется решениями уравнений (1.3) при граничных условиях (1.4) — (1.8) (функционал построен авторами)

$$J = J^{(1)} + \frac{\chi_r}{\varepsilon} J^{(2)} + \left(1 - \frac{\eta_r \chi_r}{\varepsilon}\right) \int_0^2 \left(\varphi^{(1)} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial y}\right)_{y=1} dx \tag{1.9}$$

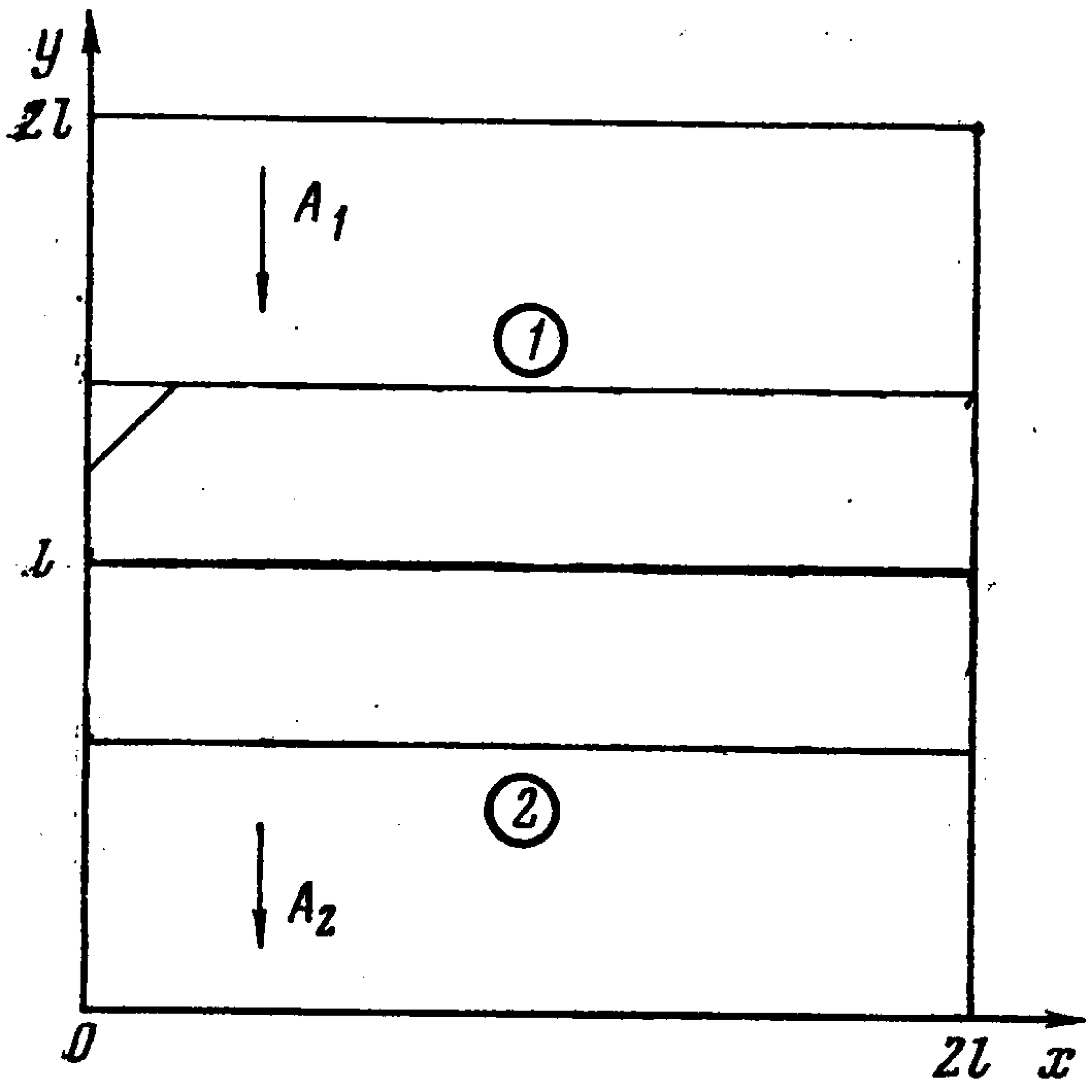
$$J^{(k)} = \int_{S_k} \left\{ \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial y} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial y} + \frac{1}{2} (\varphi^{(k)})^2 - \right.$$

$$- \frac{1}{2} \frac{a^{(k)}}{b^{(k)}} \left[\left(\frac{\partial T^{(k)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T^{(k)}}{\partial y} \right)^2 \right] +$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sqrt{R}\, a^{(k)} \left(\psi^{(k)} \frac{\partial T^{(k)}}{\partial x} - T^{(k)} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial x} \right) \right\} dx\, dy$$

(интегрирование производится по части полости, занятой соответствующей жидкостью).

2. Сведем задачу к алгебраической проблеме собственных значений. В соответствии с идеей метода конечных элементов разобьем сечение на некоторое число элементов треугольной формы. Наиболее удобно такое разбиение, при котором одна из сторон каждого элемента, примыкающего к границе раздела, лежит на границе раздела (фиг. 1). Тогда интегралы $J^{(1)}$ и $J^{(2)}$ в (1.9) могут быть представлены как суммы интегралов по площадям отдельных элементов, а интеграл по границе раздела — как сумма интегралов по отдельным отрезкам.



Фиг. 1

Аппроксимируя функции ψ, φ, T внутри каждого элемента (как в первой, так и второй жидкости) полиномами первой степени по x, y, можно представить функционал J как функцию значений ψ, φ, T в узловых точках, совпадающих с вершинами элементов. Варьирование J по этим значениям приводит к системе линейных алгебраических уравнений, где неизвестными являются значения функции тока ψ во внутренних точках области (кроме границы раздела, где $\psi = 0$), значения вихря φ во внутренних точках, на твердых границах и на границе раздела и значения температуры T во внутренних точках, на теплоизолированных границах и на границе раздела. Путем исключения значений φ и T из числа неизвестных эта система сводится к системе уравнений для значений ψ в N внутренних узлах.

С целью упрощения формирования матрицы этой системы удобно значения вихря и температуры на границе раздела и границах полости выразить через значения переменных во внутренних точках. Для узлов, лежащих на границе раздела, это можно сделать, например, следующим образом.

Произведем разложение переменных в приграничных узлах в ряд Тейлора (нулевым индексом отмечены значения величин на границе раздела, а штрихом — их значения в приграничных узлах)

$$(2.1)\qquad T_1' = T_0 + \left(\frac{\partial T_1}{\partial y}\right)_{y=1} h_1, \quad T_2' = T_0 - \left(\frac{\partial T_2}{\partial y}\right)_{y=1} h_2$$

$$(2.2)\qquad \psi_1' = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right)_{y=1} h_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2}\right)_{y=1} h_1^2,$$

$$\psi_2' = -\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right)_{y=1} h_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}\right)_{y=1} h_2^2$$

Здесь h_1 — расстояние до ближайшего приграничного узла в верхней жидкости, а h_2 — расстояние до ближайшего узла в нижней жидкости.

Из (2.1) с учетом второго соотношения (1.5) получим формулу, выражающую T_0 через значения в приграничных узлах

$$(2.3)\qquad T_0 = \left(\varkappa_r T_1' + \frac{h_1}{h_2} T_2'\right)\left(\varkappa_r + \frac{h_1}{h_2}\right)^{-1}$$

а из (2.2) с учетом второго условия (1.4), первого условия (1.5) и первого уравнения (1.3) — формулы для значений вихря $\varphi_0^{(1)}$ и $\varphi_0^{(2)}$ на границе раздела (эти значения неодинаковы для первой и второй жидкости)

$$(2.4)\qquad \varphi_0^{(1)} = 2\,\frac{\psi_1'/h_1 + \psi_2'/h_2}{\eta_r h_2 + h_1}, \quad \varphi_0^{(2)} = \eta_r \varphi_0^{(1)}$$

Используя соотношения (2.3), (2.4), можно исходную систему свести к системе $3N$ алгебраических уравнений.

Для удобства изложения запишем эту систему в матричной форме. Введем вектор-столбцы $\{\psi\}$, $\{\varphi\}$ и $\{T\}$, элементы которых — значения функции тока, вихря и температуры в узлах. Введем также матрицы порядка N $(\psi\varphi)$, (ψT), $(\varphi\varphi)$, $(\varphi\psi)$, (TT), $(T\psi)$, позволяющие записать систему алгебраических уравнений в виде трех матричных уравнений, каждое из которых получено варьированием функционала соответственно по значениям ψ, φ, T

$$(\psi\varphi)\{\varphi\} + \sqrt{R}\,(\psi T)\{T\} = 0$$
$$(\varphi\varphi)\{\varphi\} + (\varphi\psi)\{\psi\} = 0$$
$$(TT)\{T\} + \sqrt{R}\,(T\psi)\{\psi\} = 0$$

Исключая $\{\varphi\}$ и $\{T\}$ из этих уравнений, придем к системе уравнений, определяющих значения ψ в узлах

$$(2.5)\qquad [(M) - R^{-1}(E)]\{\psi\} = 0$$

Здесь (E) — единичная матрица, а матрица (M) порядка N связана с введенными выше матрицами следующим образом:

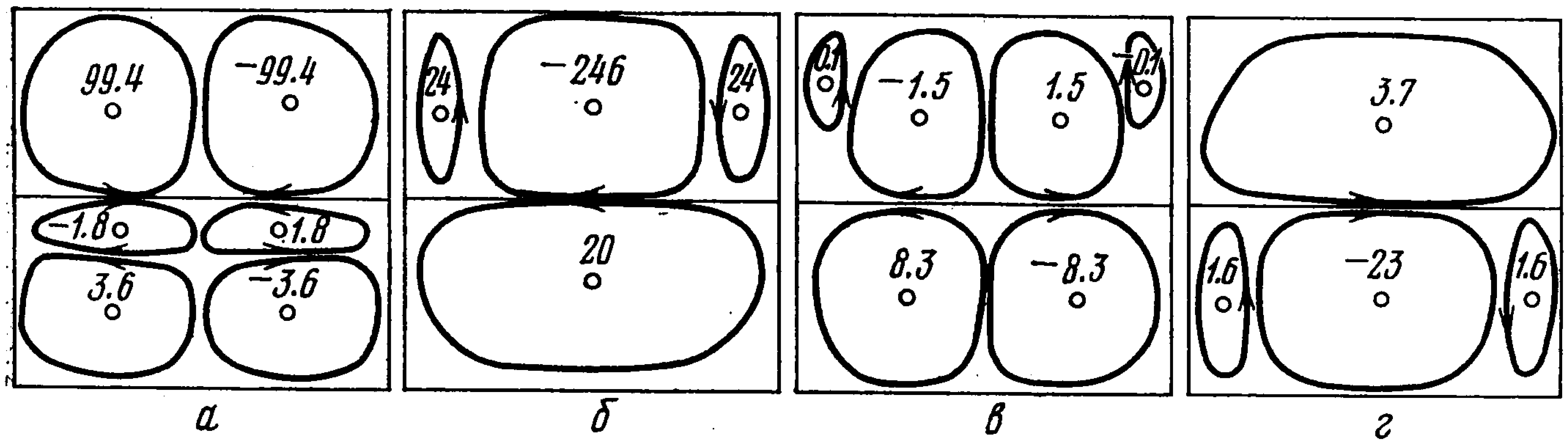
$$(2.6)\qquad (M) = -(\varphi\psi)^{-1}(\varphi\varphi)(\psi\varphi)^{-1}(\psi T)\,(TT)^{-1}(T\psi)$$

Уравнения (2.5) образуют задачу на собственные значения, где собственными значениями являются величины, обратные критическим числам Релея, а собственными векторами — совокупности значений ψ, соответствующие критическим движениям.

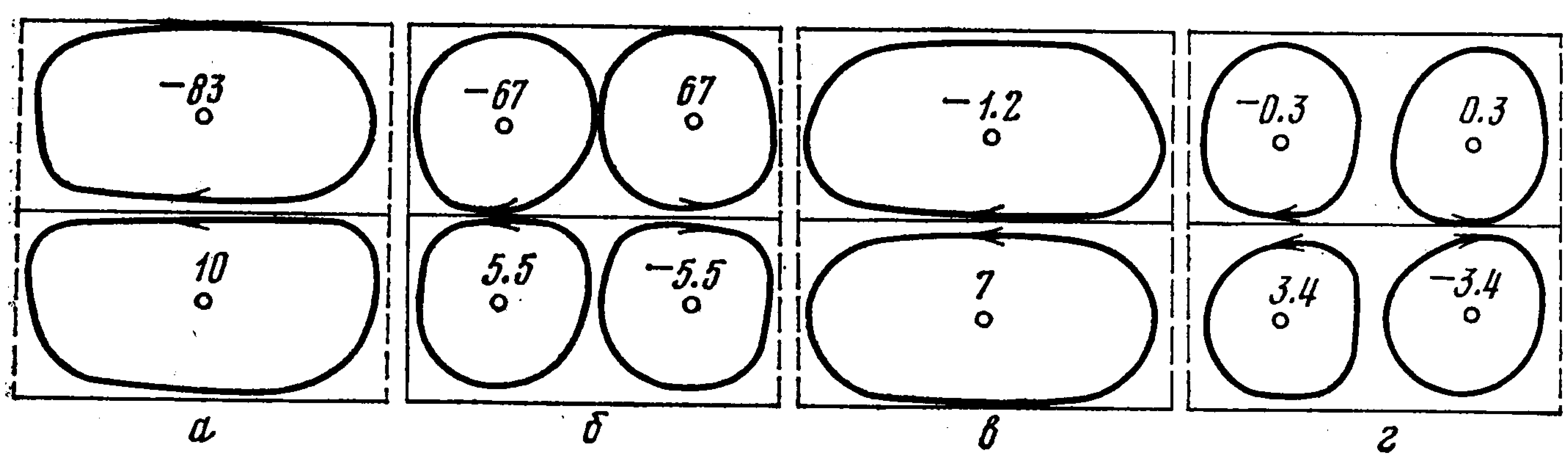
Заметим, что матрицы, использующиеся в (2.6), могут быть вычислены одинаковым образом для полостей любой формы; необходимо только изменять координаты узловых точек элементов.

Собственные значения и собственные векторы системы (2.5) удобно отыскивать степенным методом [2], начиная с наибольшего по модулю значения (наименьшего критического числа Релея). При определении следующих собственных значений используется метод понижения [2].

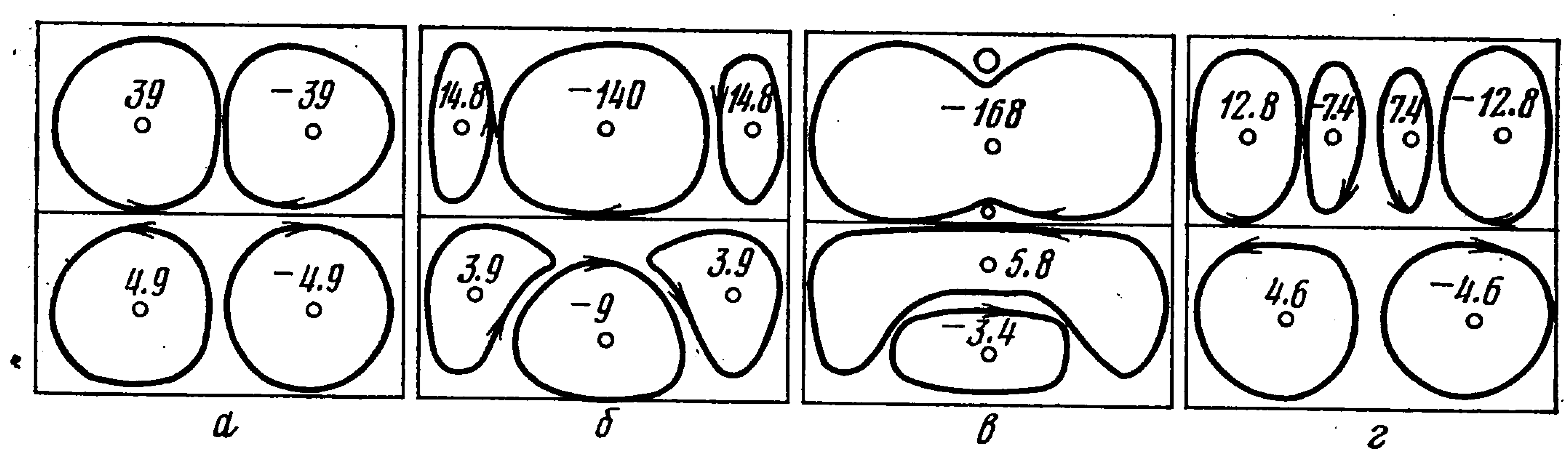
3. Рассмотрим некоторые результаты расчетов. На фиг. 2, 3 показаны нижние четыре критических движения для $\varkappa_r = \chi_r = 1$, $\varepsilon = \eta_r = 0.5$ при числах Релея 27530



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

(*а*), 28710 (*б*), 51640 (*в*), 51820 (*г*) в полости с твердыми границами (фиг. 2) и в конвективной ячейке бесконечного горизонтального слоя жидкости (фиг. 3) при числах Релея 13670 (*а*), 16480 (*б*), 23050 (*в*), 30280 (*г*). В центрах вихрей указаны максимальные по модулю значения функции тока для данного вихря (интенсивности вихрей).

При указанных выше значениях параметров условия возникновения конвекции неодинаковы для верхней и нижней жидкости. Если ввести числа Релея, определенные отдельно по равновесным градиентам температуры и параметрам соответственно верхней и нижней жидкостей $R_1 = g\beta_1 A_1 l^4 / (\nu_1\chi_1)$, $R_2 = g\beta_2 A_2 l^4 / (\nu_2\chi_2)$, то при этих значениях параметров $R_1 = 2R_2$.

Таким образом, если бы не было теплового и динамического взаимодействия через границу раздела, то при достижении порогового числа Релея наблюдалось бы движение в верхней жидкости и равновесие в нижней.

Благодаря взаимодействию через границу раздела движение возникает сразу в обеих жидкостях (см. фиг. 2, *а* и фиг. 3, *а*), но при этом интенсивность движения в верхней жидкости значительно больше, чем в нижней. Интересно, что в полости с твердыми стенками (фиг. 2, *а*) движение в нижней половине разбивается на систему четырех вихрей; из них два верхних, по-видимому, индуцированы напряжениями границы раздела, а два нижних обусловлены архимедовой силой.

Подобные структуры получались в нелинейных расчетах [3], где проводилось численное исследование конечно-амплитудных конвективных движений в двуслойной системе. Результаты данной работы показывают, что для интерпретации таких движений как результата нелинейных эффектов нет оснований.

Рассматривая следующие критические движения, можно увидеть, что взаимодействие через границу раздела приводит еще к одному, несколько неожиданному результату. В третьем и четвертом критических движениях интенсивность циркуляции в нижней жидкости, напротив, больше, чем в верхней (хотя числа Релея находятся в обратном соотношении). При этом по форме третье движение схоже с первым, а четвертое — со вторым (это особенно заметно в случае ячейки со свободными боковыми границами, где структура движений проще, фиг. 3).

В связи с этим можно снова упомянуть о результатах нелинейных расчетов [3], где было обнаружено, что в аналогичной ситуации ($R_2 < R_1$) при увеличении разности температур горизонтальных границ интенсивность конечно-амплитудного движения в нижней жидкости может превышать интенсивность движения в верхней. По-видимому, это объясняется тем, что к движению, возникшему на пороге устойчивости, подмешивается третье критическое движение.

На фиг. 4 приведены нижние четыре критических движения для системы вода — ртуть при температуре 20° С при числах Релея 32780 (*а*) ,33355 (*б*), 89029 (*в*), 110732 (*г*). Соотношение чисел Релея, определенных по параметрам первой и второй жидкостей, в этом случае следующее: $R_1 = 63.4\ R_2$. Как видно, в этой ситуации движения, следующие за пороговым, имеют сложную структуру. В структуре же порогового движения обращает на себя внимание возникновение встречных потоков на границе раздела.

Авторы благодарят Е. М. Жуховицкого за обсуждение результатов работы.

Поступила 24 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
2. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.
3. *Симановский И. Б.* Численное исследование конвекции в системе двух несмешивающихся жидкостей, подогреваемых снизу. В сб.: Конвективные течения и гидродинамическая устойчивость. Изд-во УНЦ АН СССР, Свердловск, 1979.