УДК 62—50

ДЕКОМПОЗИЦИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ С УПРАВЛЕНИЕМ

В. И. Цурков

(Москва)

Построено разложение нелинейной задачи оптимального управления на задачи меньшей размерности. Исходная задача описывает динамику системы в случае, когда выделяются связи, соответствующие подсистемам, и имеются общие ограничения. Устанавливаются критерии оптимальности промежуточных допустимых решений и монотонность итеративного процесса по функционалу исходной задачи.

Рассматривается задача оптимального управления вида [1,2]

$$dx_j(t)/dt = A_j(t)\,x_j(t) + b_j(u_j(t), t),\quad u_j(t) \geqslant 0 \tag{1}$$

$$x_j(0) = \varkappa_j,\quad v_j(x_j(T)) \leqslant 0,\quad p_j(x_j(t), u_j(t), t) \leqslant 0;\quad j \in J \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{J} q_j(x_j(T)) \leqslant 0,\quad \sum_{j=1}^{J} d_j(x_j(t), u_j(t)) \leqslant 0 \tag{3}$$

$$F(u_j) = \sum_{j=1}^{J} w(x_j(T)) + \int_0^T \sum_{j=1}^{J} c_j(x_j(t), u_j(t), t)\,dt \to \max \tag{4}$$

Соотношения (1) — (3) описывают динамику управляемой системы, состоящей из J подсистем, каждой из которых соответствует фиксированный индекс $j = 1, \ldots, J$. При каждом $j \in J$ размерности вектор-функций $\varkappa_j$, b_j, x_j равны N_j, u_j — I, v_j — S_j, q_j — R, p_j — K_j, d_j — L; матрица A_j имеет размерность $N_j \times N_j$.

Величины u_j представляют собой управления, величины x_j — фазовые переменные, t — время. Конкретный смысл всех остальных переменных (1) — (4) указан, например, в [2].

Связи (1) и неравенства (1), (2) являются ограничениями для подсистем, неравенства (3) суть общие ограничения динамической системы и так же, как функционал (4), сепарабельны по подсистемам. Конкретный вид подсистем может быть интерпретирован на моделях [2].

Задача (1) — (4) относится к задачам оптимального управления типа Больца [3]. Равенства в (2) суть начальные условия, вторые и первые неравенства соответственно в (2) и (3) являются условиями на правом конце. Последние соотношения (2), (3) представляют собой смешанные ограничения. Рассматриваемая задача заключается в общем случае в определении ограниченных измеримых на отрезке $[0, T]$ управлений, обеспечивающих максимум (4) при ограничениях (1) — (3).

Исходная задача имеет по управлениям и фазовым переменным размерность

$$I \times J + \sum_{j=1}^{J} N_j$$

Целью работы является сведение задачи (1) — (4) к задачам меньшей размерности. В [4] такая декомпозиция осуществляется для линейных задач оптимального управления.

Предполагаются выполненными следующие условия [1,2] для входящих функций. Функции $-p_j(x_j, u_j, t)$, $-d_j(x_j, u_j, t)$, $b_j(u_j, t)$, $c_j(x_j, u_j, t)$ непрерывно дифференцируемы во всем пространстве, вогнуты по x_j, u_j и монотонно возрастают по x_j; функции $-v_j(\beta_j)$, $-q_j(\beta_j)$, $w_j(\beta_j)$ — непрерывно дифференцируемые, вогнутые и монотонно возрастающие по β_j. Предполагается также, что ограниченные измеримые компоненты матриц $A_j(t)$ больше или равны нулю почти всюду на отрезке $[0, T]$.

Предположим, что для исходной задачи и рассматриваемых ниже промежуточных задач выполняются условия [1,2], обеспечивающие сведение задач оптимального управления к задачам выпуклого программирования в банаховых пространствах, для которых справедливы принципы действенности. Указанные условия сводятся, в частности, к выполнению условия Слейтера по ограничениям и к неравенствам

$$x_j(t) \geqslant \varepsilon > 0, \quad p_j(0, 0, t) \leqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{J} d_j(0, 0, t) \leqslant 0$$

Декомпозиция строится по схеме, описанной в [4]. Вводятся макроуправления $U^i(t)$ и функции $\alpha_j^i(t)$

$$U^i(t) = \sum_{j=1}^{J} u_j^i(t), \quad \alpha_j^i(t) = \frac{u_j^i(t)}{U^i(t)}, \quad i \in I$$

Фиксируя $\alpha_j^i(t)$, из (1) — (4) получим задачу с макроуправлениями

$$\frac{dx_j(t)}{dt} A_j(t) x_j(t) + B_j(U^i(t), t), \quad U^i(t) \geqslant 0 \tag{5}$$

$$x_j(0) = \varkappa_j, \quad v_j(x_j(T)) \leqslant 0, \quad P_j(x_j(t), U^i(t), t) \leqslant 0$$

$$\sum_{j=1}^{J} q_j(x_j(T)) \leqslant 0, \quad D(x_j(t), U^i(t), t) \leqslant 0$$

$$g(U^i) = \sum_{j=1}^{J} w_j(x_j(T)) + \int_0^T C(x_j(t), U^i(t), t)\,dt \to \max$$

$$B_j(U^i, t) = b_j(\alpha_j^i U^i, t), \quad P_j(x_j, U^i, t) = p_j(x_j, \alpha_j^i U^i, t)$$

$$D(x_j, U^i, t) = \sum_{j=1}^{J} d_j(x_j, \alpha_j^i U^i, t), \quad C(x_j, U^i, t) = \sum_{j=1}^{J} c_j(x_j, \alpha_j^i U^i, t)$$

Для задачи (5) рассматривается задача, двойственная в смысле Вулфа [5]

$$-\frac{d\chi_j(t)}{dt} = A_j^*(t)\chi_j(t) - \frac{\partial P_j(x_j, U^i, t)}{\partial x_j}\eta_j(t) - \tag{6}$$

$$-\frac{\partial D(x_j, U^i, t)}{\partial x_j}\delta(t) + \frac{\partial C(x_j, U^i, t)}{\partial x_j}$$

$$-\sum_{j=1}^{J}\frac{\partial B_j(U^i, t)}{\partial U^i}\chi_j(t) + \sum_{j=1}^{J}\frac{\partial P_j(x_j, U^i, t)}{\partial U^i}\eta_j(t) +$$

$$+\frac{\partial D(x_j, U^i, t)}{\partial U^i}\delta(t) \geqslant \frac{\partial C(x_j, U^i, t)}{\partial U^i}$$

$$\chi_j(T) = -\frac{\partial v_j(x_j(T))}{\partial x_j}\omega_j - \frac{\partial q_j(x_j(T))}{\partial x_j}\nu + \frac{\partial w_j(x_j(T))}{\partial x_j}$$

$$\eta_j(t) \geqslant 0, \quad \delta(t) \geqslant 0, \quad \omega_j \geqslant 0, \quad \nu \geqslant 0$$

$$\psi = \sum_{j=1}^{J} w_j(x_j(T)) + \int_0^T \left\{C(x_j, U^i, t) + \sum_{j=1}^{J}\Omega_j(t)\right\}dt \to \min$$

$$\Omega_j = \Omega_{1j} - \Omega_{2j}$$

$$\Omega_{j1} = [B_j(U^i, t) + A_j(t)x_j(t) - dx_j(t)/dt]\,\chi_j(t)$$

$$\Omega_{j2} = P_j(x_j, U^i, t)\eta_j(t) + D(x_j, U^i, t)\delta(t) + v_j(x_j(T))\omega_j + q_j \times$$
$$\times (x_j(T))\nu$$

Здесь $A_j^*(t)$ — матрицы, полученные транспонированием $A_j(t)$; переменные $\chi_j(t)$ являются двойственными импульсами, соответствующими дифференциальным связям (5). Двойственные переменные ω_j, $\eta_j(t)$, ν, $\delta(t)$ удовлетворяют последним неравенствам (5). Размерности вектор-функций $\chi_j(t)$, $\eta_j(t)$, $\delta(t)$ равны соответственно

N_j, K_j, L, а размерности векторов ω_j и ν — S_j и R.

Пусть при некоторых фиксированных $\alpha_j^i(t)$ найдены единственные экстремальные решения пары сопряженных задач (5) и (6) $U^{i0}(t) > 0$, $x_j^\circ(t)$ и $\chi_j^\circ(t)$, $\eta_j^\circ(t)$, $\delta^\circ(t)$, ω_j°, ν°. Задачи для подсистем распадаются на J задач, где при каждом $j \in J$ имеются связи (1) и ограничения (2), а к функционалам (4) добавляются слагаемые

$$-q_j(x_j(T))\nu^0 - \int_0^T d_j(x_j(t), u_j(t), t)\,\delta^0(t)\,dt$$

Пусть $u_j^*(t)$ — ограниченные оптимальные решения задач для подсистем, а $u_j^{i0}(t)$ определяются равенством $u_j^{i0}(t) = \alpha_j^i(t)\,U^{i0}(t)$. Величины $u_j^{i0}(t)$ называются дезагрегированными управлениями. Введем функции $\alpha_j^i(t, \rho_j)$ согласно соотношению

$$\alpha_j^i(t, \rho_j) = [u_j^{i0}(t) + \rho_j(u_j^{i*}(t) - u_j^{i0}(t))]\,/\,Z \tag{7}$$

$$Z = \sum_{j=1}^{J}[u_j^{i0}(t) + \rho_j(u_j^{i*}(t) - u_j^{i0}(t))]$$

Здесь параметры ρ_j при каждом $j \in J$ принадлежат отрезку $[0, 1]$.

Подставляя $\alpha_j^i(t, \rho_j)$, согласно (7), в исходную задачу (1) — (4), получим задачу с макроуправлениями, зависящую от параметров ρ_j. Обозначим через $g^\circ(\rho_j)$ экстремальное значение функционала в (5) как функцию ρ_j. Пусть максимум функции $g^\circ(\rho_j)$ на единичном кубе достигается при ρ_j°. Тогда функции $\alpha_j^i(t)$ для следующего шага итеративного процесса получаются подстановкой ρ_j° в (7).

Таким образом исходная задача (1) — (4) сведена к задачам меньшей размерности. Задача с макроуправлениями имеет количество неизвестных

$$I + \sum_{j=1}^{J} N_j$$

Задачи для подсистем включают каждая $I + N_j$ переменных. Задача о нахождении максимума $g^\circ(\rho)$ включает J_j переменных.

Строится последовательность управлений $u_j^\circ(t)$ и решений $x_j^\circ(t)$, допустимых к исходной задаче (1) — (4). Сформулируем критерий оптимальности (условие окончания процесса) и установим монотонность итеративного метода по функционалу.

Пусть $x_j^*(t)$ — экстремальные решения задач для подсистем, соответствующие управлениям $u_j^*(t)$. Тогда условием экстремальности решения $u_j^\circ(t)$, $x_j^\circ(t)$ задачи (1) — (4) является выполнение равенства

$$\sum_{j=1}^{J}\Lambda_j + \int_0^T\left\{\sum_{j=1}^{J}[c_j(x_j^*, u_j^*, t) - c_j(x_j^\circ, u_j^\circ, t)]\right\}dt = 0 \tag{8}$$

$$\Lambda_j = w_j(x_j^*(T)) - q_j(x_j^*(T))\nu^\circ - w_j(x_j^\circ(T)) - \int_0^T d_j(x_j^*, u_j^*, t)\,\delta^\circ(t)\,dt$$

Вывод соотношения (8) проводится аналогично [4]. Пусть $\lambda_j^*(t)$, $\zeta_j^*(t)$, γ_j^* — экстремальные решения задач, двойственных к задачам для подсистем. Тогда набор $\lambda_j^*(t)$, $\zeta_j^*(t)$, $\delta^\circ(t)$, γ_j^*, ν° вместе с $u_j^*(t)$, $x_j^*(t)$ является допустимым к двойственной задаче для исходной (1) — (4). Для допустимых решений пары сопряженных задач имеет место неравенство значений функционалов

$$\sum_{j=1}^{J}\left(w_j^* + \int_0^T c_j^*(t)\,dt\right) \geqslant \sum_{j=1}^{J}\left(w_j^\circ + \int_0^T c_j^\circ(t)\,dt\right) \tag{9}$$

$$w_j^* = w_j(x_j^*(T)) - v_j(x_j(T))\gamma^* - q_j(x_j^*(T))\nu^\circ, \quad w_j^\circ = w_j(x_j^\circ(T))$$

$$c_j^*(t) = c_j(x_j^*, u_j^*, t) + b_j^*(t)\lambda_j^*(t) + p_j(x_j^*, u_j^*, t)\zeta_j^*(t) +$$
$$+ d_j(x_j^*, u_j^*, t)\,\delta^\circ(t)$$

$$b_j^*(t) = b_j(u_j^*, t) - A_j(t)x_j^*(t) - dx_j^*(t)/dt$$

$$c_j^\circ(t) = c_j(x_j^\circ, u_j^\circ, t)$$

Слагаемые с $b_j^*(t)$ под интегралом левой части (9) равны нулю в силу (1). Кроме того

$$\int_0^T \left[\sum_{j=1}^J p_j(x_j^*, u_j^*, t)\,\zeta_j^*(t)\right] dt = 0, \quad \sum_{j=1}^J v_j(x_j^*(T))\,\gamma_j^* = 0$$

в силу условия [2] дополняющей нежесткости.

Таким образом из (9) следует (8). Равенства в (9), (8) обеспечивают экстремальность решения $u_j^\circ(t)$, $x_j^\circ(t)$ задачи (1) — (4). Если $u_j^\circ(t)$, $x_j^\circ(t)$ не экстремальны для исходной задачи, то в (8) выполняется строгое неравенство.

Покажем строгую монотонность итеративного процесса по функционалу. Пусть при некоторых $\alpha_j^i(t)$ получено решение $U^{i0}(t) > 0$ задачи с макроуправлениями (5), причем соответствующее решение $u_j^\circ(t)$, $x_j^\circ(t)$ не оптимально для исходной задачи. Рассмотрим функции $\alpha_j^i(t, \rho)$ согласно (7), где $\rho_j = \rho$. Найдем производную по ρ значения функционала $g^\circ(\rho)$ в точке $\rho = 0$, которую обозначим $(g^\circ(0))'$. Аналогично [4] эта производная вычисляется как производная функции Лагранжа задачи (5), т. е. функционала в (6), с учетом выражения $\partial\alpha_j^i(t, 0)\,/\,\partial\rho$ согласно (7). Учтем зависимость $x_j^\circ(t)$ от ρ и будем рассматривать в качестве двойственных переменных их экстремальные значения в силу предположения о единственности. После тождественных преобразований с учетом (5) окончательно получим

$$(g^\circ(0))' = \int_0^T \sum_{j=1}^J \left(\frac{\partial c_j}{\partial u_j} u_j^* + \frac{\partial b_j}{\partial u_j} u_j^* \chi_j^\circ - \frac{\partial p_j}{\partial u_j} u_j^* \eta_j^\circ - \frac{\partial d_j}{\partial u_j} u_j^* \delta^\circ\right) dt \tag{10}$$

Здесь частные производные определяются на решении $u_j^\circ(t)$, $x_j^\circ(t)$.

Умножая вторые соотношения (6) на $U^{i0}(t)$, суммируя по i и интегрируя, из (6) и (10) найдем

$$(g^\circ(0))' = \int_0^T \sum_{j=1}^J \left[\frac{\partial c_j}{\partial u_j}(u_j^* - u_j^\circ) + \frac{\partial b_j}{\partial u_j}(u_j^* - u_j^\circ)\chi_j^\circ - \right. \tag{11}$$
$$\left. - \frac{\partial p_j}{\partial u_j}(u_j^* - u_j^\circ)\eta_j^\circ - \frac{\partial d_j}{\partial u_j}(u_j^* - u_j^\circ)\delta^\circ\right] dt$$

Умножая первое соотношение (6) на $(x_j^* - x_j^\circ)$, суммируя по $n \in N_j$ и по j, интегрируя с учетом (5) и принимая во внимание начальные условия (2), получим равенство

$$\sum_{j=1}^J \left\{\int_0^T [(x_j^* - x_j^\circ) H_j + \varphi_j]\, dt + (x_j^*(T) - x_j^\circ(T))\,\chi_j^\circ(T) = 0\right. \tag{12}$$
$$H_j = \partial c_j\,/\,\partial x_j - \eta_j^\circ \partial p_j\,/\,\partial x_j - \delta^\circ \partial d_j\,/\,\partial x_j$$
$$\varphi_j = [b_j(u_j^\circ, t) - b_j(u_j^*, t)]\,\chi_j^\circ$$

Из (11), (12), заменяя величины $\chi_j^\circ(T)$ их выражениями согласно (6) и добавляя к (11) равные нулю в силу условий дополняющей нежесткости для задачи (5) выражения

$$\int_0^T \sum_{j=1}^J p_j(x_j^\circ, u_j^\circ, t)\,\eta_j^\circ dt, \quad \int_0^T \sum_{j=1}^J d_j(x_j^\circ, u_j^\circ, t)\,\delta^\circ dt$$

$$\sum_{j=1}^J v_j(x_j^\circ(T))\,\omega_j^\circ, \quad \sum_{j=1}^J q_j(x_j^\circ(T))\,\nu^\circ$$

для производной $(g^\circ(0))'$ окончательно получим

$$(g^\circ(0))' = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 \tag{13}$$

$$\pi_1 = \sum_{j=1}^{J} \Lambda_j + \int_0^T \left\{ \sum_{j=1}^{J} [c_j(x_j^*, u_j^*, t) - c_j(x_j^\circ, u_j^\circ, t)] \right\} dt$$

$$\pi_2 = \int_0^T \left\{ \sum_{j=1}^{J} M_{xu} [(c_j, 1) + (b_j, \chi_j^\circ) - (p_j, \eta_j^\circ) - (d_j, \delta^\circ)] + \right.$$

$$\left. + M_x [(w_j, 1) - (v_j, \omega_j^\circ) - (q_j, \nu^\circ)] \right\} dt$$

$$\pi_3 = -\int_0^T \sum_{j=1}^{J} p_j(x_j^*, u_j^*, t) \eta_j^\circ dt, \quad \pi_4 = -\sum_{j=1}^{J} v_j(x_j^*(T)) \omega_j^\circ$$

$$M_{xu}(z, \mu) = \left(z(x_j^\circ, u_j^\circ, t) + \frac{\partial z}{\partial x_j} (x_j^* - x_j^\circ) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial z}{\partial u_j} (u_j^* - u_j^\circ) - z(x_j^*, u_j^*, t) \right) \mu$$

$$M_x(z, \mu) = \left(z(x_j^*(T)) - \frac{\partial z}{\partial x_j} (x_j^*(T) - x_j^\circ(T)) - z(x_j^\circ(T)) \right) \mu$$

Здесь $\pi_1 > 0$ как левая часть (8); $\pi_2 \geqslant 0$ в силу (6), предполагаемых свойств выпуклости входящих функций и неравенства $\chi_j(t) \geqslant 0$ для решения уравнений (6) с условием на правом конце, причем $\chi_j(T) \geqslant 0$ и $d\chi_j(t) / dt \leqslant 0$ согласно предполагаемым свойствам монотонности входящих функций и неравенству $A_j(t) \geqslant 0$; $\pi_3 \geqslant 0$, $\pi_4 \geqslant 0$ в силу соотношений (1), (6).

Из соотношения (13) следует оценка $g^\circ(\rho) > g^\circ(0)$ в некоторой окрестности точки $\rho = 0$, что означает монотонность итеративного процесса по функционалу.

Локальная монотонность показана в предположении о единственности экстремальных двойственных переменных задачи (6). Случай неединственности исследуется по схеме [4]. Следствием монотонности и соотношения (13) является, как и в [4], вывод о сходимости к экстремальному решению задачи (1) — (4).

Автор признателен Л. А. Галину за полезные советы.

Поступила 29 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тер-Крикоров А. М.* Выпуклое программирование в пространстве, сопряженном пространству Банаха, и выпуклые задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 2.
2. *Тер-Крикоров А. М.* Оптимальное управление и математическая экономика. М., «Наука», 1977.
3. *Моисеев Н. Н.* Элементы теории оптимальных систем. М., «Наука», 1975.
4. *Цурков В. И.* Принцип разложения для линейных задач оптимального управления. М., ВЦ АН СССР, 1978.
5. *Bittner L.* Abschätzungen bei Variationsmethoden mit Hilfe von Dualitätssätzen. I. Nummer. Math., 1968, Bd 11, H 2.