$x \neq 0$

(3.8) $\qquad 0 < g'(x) < g'(kx),$

Действительно, $g''(x) = -6\alpha_{30}x$, откуда $g''(x) > 0$ при $x > 0$, и неравенство (3.8) выполняется. Пусть $x < 0$. Тогда на оси $y = 0$ точка kx лежит левее точки x. Кроме того, $g''(x) < 0$, поэтому и при $x < 0$ условие (3.8) выполняется. Аналогично проверяется и последнее условие теоремы 2 для функции $g(x)$. Следовательно, область D_1 моноциклична.

Если в условии (3.4) первое неравенство заменить на противоположное, сохранив все остальные условия доказываемой теоремы, то система (3.1) будет ацикличной, так как при $\alpha_{01} < 0$ кривая $\Phi(x, y) = 0$ не окружает особую точку (0, 0). Последнее означает, что значение c_0 таково, что кривая контактов целиком расположена в области D_1, не окружая ее границу. Отсюда следует справедливость утверждения о) теоремы 4. Теорема доказана.

Если выполнены условия (3.2), (3.3) и одно из условий

$$\Delta = 4\alpha_{21}\alpha_{03}\alpha_{01} + \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{02} - \alpha_{11}^2\alpha_{03} - \alpha_{12}^2\alpha_{01} - \alpha_{02}^2\alpha_{21} = 0$$

$$^1/_4\Delta(\alpha_{21} + \alpha_{03}) > 0$$

что соответственно означает, что кривая $\Phi(x, y) = 0$ мнимая или вырождена в точку, то система (3.1) ациклична.

Пусть в последней теореме $\alpha_{20} \neq 0$. Тогда вместо (3.2) рассмотрим условия $\alpha_{10} < 0$, $\alpha_{20}^2 - 3\alpha_{10}\alpha_{30} < 0$. Кроме того, потребуем, чтобы точка $(-\alpha_{20} / (3\alpha_{30}), y)$ не принадлежала области $\{(x, y)\colon g^2(x) + y^2 \geqslant c_0^2\}$. Тогда, соответственно изменив условия (3.5) и сохранив остальные условия теоремы 5, приходим к выводу о существовании единственного устойчивого предельного цикла у системы (3.1).

В заключение отметим, что теорема 1 остается верной в случае, если в последнем условии в) и условиях г) этой теоремы заменить знаки неравенств на противоположные, так как при такой замене разность в числителе дроби $\omega(\varphi)$ не меняет знака.

Поступила 10 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Massera J. L.* Sur un théorème de G. Sansone sur l'équation de Liénard. Boll. Unione Mat. Ital., 1954, vo. 9, No. 3, p. 369—372.
2. *De Castro A.* Sull'esistenza ed unicità delle soluzioni periodiche dell'equazione $\ddot{x} + f(x, x^{\cdot})x^{\cdot} + g(x) = 0$. Boll. Unione Mat. Ital., 1954, vol. 9, No. 3, p. 367—369.
3. *Войлоков М. И.* Метод оценки сверху числа периодических решений у автономной системы двух дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1961, т. 16, вып. 3.
4. *Войлоков М. И.* Метод Массера доказательства единственности предельного цикла. Изв. вузов. Матем., 1962, № 5.

УДК 531.381 : 534

О КОЛЕБАНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО УСТОЙЧИВЫХ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ

Н. Г. Апыхтин

(Москва)

Методом осреднения [1] определяются амплитуды и частоты колебаний твердого тела около устойчивых перманентных вращений в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

Суть метода осреднения состоит в переходе к нормальным координатам (амплитудам и угловым переменным) и замене (малых по сравнению с линейными) нелинейных членов в уравнениях движения их интегральными средними по периодам угловых переменных. Характеристическое уравнение первого приближения имеет в этих случаях мнимые корни и один или два нулевых корня, поэтому удобно пользоваться преобразованием от x_i к a_k, ξ_k, u_k, которое в матричной форме имеет вид

(1) $$x=\sum_i a_i\,[\operatorname{Re} V_1(i\omega_i)\cos u_i - \operatorname{Im} V_1(i\omega_i)\sin u_i] + V_2'(0)\,\xi_i$$

где V_1, V_2 — нулевые столбцы при чисто мнимых и нулевых корнях присоединенной матрицы для характеристической матрицы уравнений первого приближения.

Исследование будем проводить для уравнений возмущенного движения твердого тела, главные моменты инерции которого A, B, C, проекции вектора угловой скорости вращения на оси инерции p, q, r, координаты центра масс в осях инерции x_0, y_0, z_0 и которое находится в однородном или центральном ньютоновском силовых полях

$$U = -mg\,(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3)$$
$$U = -mg\,(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) - \mu\,(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2)\,/\,2$$

где γ_i — направляющие косинусы оси апликат в главных осях инерции.

Случай Эйлера ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$). Уравнения движения допускают частное решение $p = q = 0$, $r = \omega$. В возмущенном движении, полагая $p = x_1$, $q = x_2$, $r = \omega + x_3$, получим

$$x_1^{\cdot} = -a\omega x_2 - a x_2 x_3,\quad x_2^{\cdot} = b\omega x_1 + b x_1 x_3,\quad x_3^{\cdot} = c x_1 x_2$$
$$a = (C - B)\,/\,A,\quad b = (C - A)\,/\,B,\quad c = (A - B)\,/\,C$$

Для устойчивых вращений вокруг оси апликат ($ab > 0$) характеристическое уравнение $\lambda\,(\lambda^2 + ab\omega^2) = 0$ имеет нулевой корень и пару чисто мнимых корней $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{23} = \pm i\omega\sqrt{ab}$, поэтому преобразование (1) имеет вид

$$x_1 = -\alpha\sqrt{ab}\,\sin u,\quad x_2 = \alpha b\cos u,\quad x_3 = \xi$$

а уравнения в нормальных координатах

(2) $$\alpha^{\cdot} = 0,\ \xi^{\cdot} = -bc\sqrt{ab}\,\alpha^2\sin u\cos u,\ u^{\cdot} = \sqrt{ab}\,(\omega + \xi)$$

Осредненные по u уравнения (2) имеют решение $\alpha = \alpha_0$, $\xi = \xi_0$, $u = \sqrt{ab}\,(\omega + \xi_0)\,t + u_0$. Эти функции будут решением точных (не осредненных) уравнений при $c = 0$ ($A = B$). Указанное решение определяет колебание тела по переменным x_1 и x_2 с периодом $2\pi\,/\,\sqrt{ab}\,(\omega + \xi_0)$. В пространстве переменных (x_1, x_2, x_3) фазовые траектории представляют собой эллипсы, плоскости которых параллельны плоскости x_1x_2.

При движении тела в центральном ньютоновском поле сил уравнения Эйлера — Пуассона допускают частное решение $p = q = 0$, $r = \omega$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$, а уравнения возмущенного движения таковы:

(3) $$x_1^{\cdot} = -a\omega x_2 + \mu a y_2 - a\,(x_2x_3 - \mu y_2 y_3)$$
$$x_1^{\cdot} = b\omega x_1 - \mu b y_1 + b\,(x_1x_3 - \mu y_1 y_3),\quad x_3^{\cdot} = c\,(x_1x_2 - \mu y_1 y_2)$$
$$y_1^{\cdot} = -x_2 + \omega y_2 + x_3 y_2 - x_2 y_3$$
$$y_2^{\cdot} = x_1 - \omega y_1 + x_1 y_3 - x_3 y_1,\quad y_3^{\cdot} = x_2 y_1 - x_1 y_2$$

Характеристическое уравнение линеаризованной системы (3)

$$\lambda^2\,(\lambda^4 + m\lambda^2 + n) = 0,\quad m = \omega^2\,(1 + ab) - \mu\,(a + b),\quad n = (\mu - \omega^2)^2 ab$$

имеет два нулевых и две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_k$ ($k = 1,2$; $m = \omega_1^2 + \omega_2^2$, $n = \omega_1^2\omega_2^2$), поэтому преобразование (1) в данном случае имеет вид

(4) $$x_1 = -a_i d_{1i}\sin u_i,\quad x_2 = a_i c_{1i}\cos u_i,\quad x_3 = -n\xi_1$$
$$y_1 = -a_i d_{2i}\sin u_i,\quad y_2 = a_i c_{2i}\cos u_i,\quad y_3 = -n\xi_2$$

где производится суммирование по индексу i от единицы до двух и

$$c_{1k} = -b\omega\omega_k^2\,(\omega_k^2 + \mu - \omega^2),\quad c_{2k} = -\omega_k^2\,(\omega_k^2 + \mu b - b\omega^2)$$
$$d_{1k} = -\omega_k^3\,(\omega_k^2 + \mu b - \omega^2),\quad d_{2k} = \omega\omega_k\,(1 - b),\quad k = 1,2$$

После этого уравнения (3) преобразуются в уравнения в нормальных координатах вида

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&a_k^{\cdot} = (\alpha_{ij}^{(k)} \sin u_k \cos u_j + \beta_{ij}^{(k)} \cos u_k \sin u_j)\xi_i a_j\\
&u_k^{\cdot} = \omega_k + (-1)^k\ (\alpha_{ij}^{(k)} \cos u_k \cos u_j - \beta_{ij}^{(k)} \sin u_k \sin u_j)\, a_k^{-1}\xi_i a_j\\
&n\xi_k^{\cdot} = \gamma_{ij}^{(k)} a_i a_j \sin u_i \cos u_j\\
&\alpha_{ij}^{(k)} = (-1)^{i-1}\, n\, (\mu^{i-1} a d_{2,1+k} c_{ij} + d_{1,1+k} c_{1+i,\,j})\,(d_{12}d_{21} - d_{11}d_{22})^{-1}\\
&\beta_{ij}^{(k)} = (-1)^{i-1} n\, (\mu^{i-1} b d_{ij} c_{2,\,1+k} + d_{1+i,\,j} c_{1,\,1+k})\,(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})^{-1}\\
&\gamma_{ij}^{(k)} = c^{k-1}\,(c_{1j}d_{1+k,\,i} - \mu^{k-1} c_{2j} d_{ki})
\end{aligned}
$$

Здесь и в дальнейшем $k = 1,2$ и по индексам i и j производится суммирование от единицы до двух.

Осредняя правые части уравнения (5) по угловым переменным u_k, получим укороченные уравнения и их решения

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&a_k^{\cdot} = 0,\ \ \xi_k^{\cdot} = 0,\ \ u_k^{\cdot} = \omega_k + {}^1\!/_2\,(-1)^k\,(\alpha_{ik}^{(k)} - \beta_{ik}^{(ik)})\,\xi_{i0} = \omega_k^*\\
&a_k = a_{k0},\quad \xi_k = \xi_{k0},\quad u_k = \omega_k^*\ t + u_{k0}
\end{aligned}
$$

На основании (6) переменные (4) будут квазипериодическими функциями времени с периодами $T_k = 2\pi \,/\, \omega_k^*$.

Случай Лагранжа ($x_0 = y_0 = 0$, $A = B$). Уравнения Эйлера — Пуассона допускают частное решение $p = q = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$, $r = \omega$.

Полагая в возмущенном движении $p = x_1$, $q = x_2$, $\gamma_1 = y_1$, $\gamma_2 = y_2$, $\gamma_3 = 1 + y_3$, имеем уравнения возмущенного движения в однородном поле тяжести

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&x_1^{\cdot} = ax_2 + by_2,\quad x_2^{\cdot} = -ax_1 - by_1\\
&y_1^{\cdot} = -x_2 + ry_2 - x_2y_3,\ y_2^{\cdot} = x_1 - ry_1 + x_1y_3,\ y_3^{\cdot} = x_2y_1 - x_1y_2\\
&a = (A - C)r \,/\, A,\ b = mgz_0 \,/\, A,\ r^{\cdot} \equiv 0
\end{aligned}
$$

Характеристическое уравнение $\lambda\,[\lambda^4 + (r^2 + a - 2b)\,\lambda^2 + (b + ar)^2] = 0$ линеаризованной системы (7) имеет один нулевой корень и две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_k$, $\omega_1^2 + \omega_2^2 = r^2 + a - 2b$, $\omega_1^2\omega_2^2 = (b + ar)^2$. Поэтому преобразование (1) к трем амплитудам ξ, a_1, a_2 и двум угловым переменным u_1, u_2 имеет вид

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&x_1 = -a_i d_{1i} \sin u_i,\quad x_2 = a_i c_{1i} \cos u_i\\
&y_1 = -a_i d_{2i} \sin u_i,\quad y_2 = a_i c_{2i} \cos u_i,\quad y_3 = \xi\\
&c_{1k} = r\,(b + ar) - a\omega_k^2,\quad c_{2k} = \omega^2 + b + ar\\
&d_{1k} = \omega_k\,(\omega_k^2 + b - r^2),\ d_{2k} = -\omega_k\,(a + r),\ k = 1,2
\end{aligned}
$$

где производится суммирование по индексу i от единицы до двух.

При этом уравнения в нормальных координатах принимают вид

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
&a_k^{\cdot} = (c_{1,1+k}d_{1i} \sin u_i \cos u_k - c_{1i}d_{1,1+k} \cos u_i \sin u_k)\xi a_i d^{-1}\\
&u_k^{\cdot} = \omega_k + (-1)^k\,(c_{1,1+k}d_{1i} \sin u_i \sin u_k + c_{2i}d_{1,1+k} \cos u_i \cos u_k)\, a_k^{-1}\xi a_i d^{-1}\\
&\xi_k^{\cdot} = a_i a_j\,(c_{2i}d_{1j} - c_{1i}d_{2j}) \sin u_j \cos u_i,\quad d = (a + r)\,(b + ar)\,(\omega_2^2 - \omega_1^2)
\end{aligned}
$$

При осреднении правых частей уравнений (9) по угловым переменным u_k получим укороченные уравнения и их решения в форме (6), где

$$
\omega_k^* = \omega_k + (-1)^k\,(c_{1,\,1+k}d_{1k} + c_{2k}d_{1,\,1+k})\ \xi_0\,(2d)^{-1}
$$

В переменных x_k, y_k это означает квазипериодические движения с периодами $T_k = 2\pi \,/\, \omega_k^*$.

Уравнения возмущенного движения в центральном ньютоновском поле сил в линейном приближении совпадают по виду с уравнениями (7) и, следовательно, преобразованием (8) сводятся к уравнениям в нормальных координатах, где величины $c_{1,1+k}d_{1i}$ заменены на α_{ki}; $c_{1i}d_{1,1+k}$ — на β_{ki}; причем

$$
\alpha_{ki} = c_{1,\,1+k}d_{1i} - \mu c_{2,\,1+k}d_{2i},\quad \beta_{ki} = c_{1i}d_{1,\,1+k} - \mu c_{2i}d_{2,\,1+k}
$$

Укороченные уравнения и их решения имеют вид (6), где

$$
\omega_k^* = \omega_k + (-1)^k\,(\alpha_{kk} + \beta_{kk})\xi_0(2d)^{-1}
$$

Это означает, что тело совершает квазипериодические колебания по переменным (8) с периодами $T_k = 2\pi / \omega_k^*$.

Случай Ковалевской ($y_0 = z_0 = 0$, $A = B = 2C$). **Уравнения Эйлера — Пуассона допускают частное решение $p = \omega$, $\gamma_1 = 1$, $q = r = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ в случаях однородного или центрального ньютоновского силового поля.**

Уравнения возмущенного движения тяжелого твердого тела имеют вид

$$
\begin{aligned}
&2x_1^{\cdot} = x_2x_3, \quad 2x_2^{\cdot} = -\omega x_3 + ay_3 - x_1x_3 \\
&x_3^{\cdot} = -ay_2, \quad a = mgx_0 / C \\
&y_1^{\cdot} = x_3y_2 - x_2y_3, \quad y_2^{\cdot} = -x_3 + \omega y_3 + x_1y_3 - x_3y_1 \quad y_3^{\cdot} = x_2 - \omega y_2 + \\
&+ x_2y_1 - x_1y_2
\end{aligned} \tag{10}
$$

Характеристическое уравнение линеаризованной системы (10) $2\lambda^2 [2\lambda^4 + (2\omega^2 - 3a)\lambda^2 + a(a - \omega^2)] = 0$ при устойчивых перманентных вращениях ($a < 0$) имеет два нулевых корня и две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_k$, $2(\omega_1^2 + \omega_2^2) = 2\omega^2 - 3a$, $2\omega_1^2\omega_2^2 = a(a - \omega^2)$.

Поэтому преобразованием

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \xi_2, \; x_2 = -a_id_{1i}\sin u_i, \; x_3 = a_ic_{1i}\cos u_i \\
&y_1 = \xi_2, \; y_2 = -a_id_{2i}\sin u_i, \; y_3 = a_ic_{2i}\cos u_i \\
&c_{1k} = a\omega, \quad c_{2k} = a + \omega_k^2, \quad d_{1k} = \omega_k(\omega_k^2 + a - \omega^2), \quad d_{2k} = -\omega\omega_k
\end{aligned} \tag{11}
$$

уравнения (10) приводятся к следующим уравнениям в нормальных координатах:

$$
\begin{aligned}
&a_k^{\cdot} = a_i(\alpha_{ki}\cos u_k \sin u_i - \beta_{ki}\sin u_k \cos u_i) \\
&u_k^{\cdot} = \omega_k + (-1)^k a_ia_{k+1}(\alpha_{ki}\sin u_k \sin u_i + \beta_{ki}\cos u_k \cos u_i)(a_1a_2)^{-1} \\
&\xi_1^{\cdot} = -2^{-1} a_ia_jd_{1j}c_{1i}\cos u_i \sin u_j, \quad \xi_2^{\cdot} = (d_{2i}\xi_1 - d_{1i}\xi_2)\, a_i \sin u_i \cdot \cos u_j \\
&\alpha_{ki} = a\omega(-d_{2i}\xi_1 + d_{1i}\xi_2)(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})^{-1} \\
&\beta_{ki} = [-(2^{-1}d_{2,1+k}c_{1i} + d_{1,1+k}c_{2i})\,\xi_1 + d_{1,1+k}c_{1i}\xi_2](d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21})^{-1}
\end{aligned} \tag{12}
$$

Укороченные уравнения и их решения имеют вид (6), где

$$
\omega_k^* = \omega_k + (-1)^k 2^{-1}(\alpha_{kk} + \beta_{kk}) \tag{13}
$$

т. е. координаты (11) будут квазипериодическими функциями времени с периодами $T_k = 2\pi / \omega_k^*$.

Если движение твердого тела происходит в центральном ньютоновском поле сил, первые два уравнения возмущенного движения (10) примут вид

$$
2x_1^{\cdot} = x_2x_3 - \mu y_2y_3, \quad 2x_2^{\cdot} = -\omega x_3 + (a + \mu)\, y_3 - x_1x_3 + \mu y_1y_3
$$

а остальные уравнения (10) не изменятся.

При этом характеристическое уравнение линеаризованных уравнений возмущенного движения $2\lambda^2 [2\lambda^4 + (2\omega^2 - 3a - \mu)\lambda^2 + a(a + \mu - \omega^2)] = 0$ имеет два нулевых корня и две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_k$, $2(\omega_1^2 + \omega_2^2) = 2\omega^2 - 3a - \mu$, $2\omega_1^2\omega_2^2 = a(a + \mu - \omega^2)$. Преобразованием (11) эти уравнения приводятся к уравнениям в нормальных координатах (12), где величины d_{ki} и $\xi_1^{\cdot}$ увеличиваются на $2^{-1}\mu d_{2,1+k}c_{2i}\xi_2$ и $2^{-1} a_ia_jd_{2j}c_{2i}\cos u_i \sin u_j$ соответственно.

Укороченные уравнения примут вид (6), где ω_k^* определяется формулой (13). Отсюда следует, что движение по переменным x_i, y_i будет квазипериодическим с двумя периодами.

Поступила 19 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков Б. В.* Колебания. М., Гостехиздат, 1954.