УДК 531.011

МОНОЦИКЛИЧНОСТЬ И АЦИКЛИЧНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

И. А. Коновалов

(Тюмень)

Рассматривается задача о моноцикличности и ацикличности динамических систем второго порядка. Результаты [1,2] обобщаются на более широкий класс конкретных динамических систем. Аналогичная задача о моноцикличности, а также грубости периодических решений систем дифференциальных уравнений исследовалась в работах [3,4].

1. В плоскости (x, y) рассматривается система

$$dx / dt = X(x, y), \quad dy / dt = Y(x, y) \tag{1.1}$$

Введем криволинейную систему координат (c, φ) с помощью соотношений

$$\begin{gathered} y = af(x), \quad [f(x)]^2 + y^2 = c^2 \\ a = \operatorname{tg}\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 < c < +\infty \end{gathered} \tag{1.2}$$

Предположим, что функция f определена, однозначна и имеет конечную первую производную на множестве вещественных чисел $f(0) = 0$, $f'(x) \neq 0$ при $(x, af(x)) \in \{(x, af(x)): f^2(x) + y^2 > c_0^2\}$, где c_0 — некоторое фиксированное значение c.

Из второго и третьего предположений следует, что при указанных x функция f строго монотонна.

Преобразование, обратное (1.2), определим соотношениями $\varphi = \operatorname{arctg}(y / f(x))$, $c = [f^2(x) + y^2]^{1/2}$. Якобиан преобразования (1.2)

$$D(c, \varphi) / D(x, y) = -f'(x) / c \quad (x \neq 0)$$

сохраняет знак в каждом квадранте плоскости (x, y). Поэтому обратное преобразование обеспечивает взаимно-однозначное отображение плоскости (x, y) (без точки $(0, 0)$) на плоскость (c, φ) (без точки $(0, \varphi)$).

Теорема 1. Пусть система (1.1) на множестве $D = \{(x, y): f^2(x) + y^2 \geqslant c_0^2\}$ удовлетворяет следующим условиям:

а) X и Y непрерывны и обеспечивают единственность решения задачи Коши.

б). Все точки множества D неособые.

в). Если $k > 1$, то

$$\begin{gathered} Y(q)X(q_k) \geqslant Y(q_k)X(q) \quad (x \neq 0) \\ Y(0, y)X(0, ky) \geqslant Y(0, ky)X(0, y) \\ f'(kx)Y(q)X(q_k) \geqslant f'(x)Y(q_k)X(q) \quad (x \neq 0) \\ q = (x, af(x)), \quad q_k = (kx, af(kx)) \end{gathered}$$

г). Система (1.1) имеет предельный цикл L_1, на котором существует точка (x', y'), такая, что при $k > 1$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered} f'(kx')Y(Q)X(Q_k) > f'(x')Y(Q_k)X(Q) \\ f'(x' / k)Y(Q)X(Q_{1/k}) < f'(x')Y(Q_{1/k})X(Q) \\ Q = (x', af(x')), \quad Q_k = (kx', af(kx')) \end{gathered}$$

Тогда предельный цикл L_1 системы (1.1) является единственным в области D.

Доказательство. Отметим, что из первого и третьего условий в) следует $f'(x) > 0$ при $(x, af(x)) \in D$.

Пусть уравнения

$$x_1 = x_1(t), \quad y_1 = y_1(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T \tag{1.3}$$

определяют замкнутую интегральную кривую L_1 системы (1.1). В силу замкнутости она пересекает каждую полукривую семейства (1.2) (ветвь кривой семейства (1.2), исходящую из точки (0, 0)). L_1 не касается ни одной полукривой семейства (1.2). В самом деле, предположим, что она касается полукривой

(1.4) $$y = f(x)\,\mathrm{tg}\,\varphi_0$$

в некоторой точке $(x_1(t_1), y_1(t_1))$. Тогда из непрерывности функций (1.3) и первых двух условий в) следует существование такой окрестности W точки t_1, что участок Ω кривой L_1, соответствующий всем значениям $t \in W$, совпадает с некоторой частью полукривой (1.4), содержащей точку $(x_1(t_1), y_1(t_1))$. Если же при всех $t \in W$ в указанных условиях выполнено строгое неравенство, то по непрерывной зависимости решения от начальных условий участок Ω, за исключением точки $(x_1(t_1), y_1(t_1))$, весь расположен в той части окрестности полукривой (1.4), которая соответствует значениям φ, удовлетворяющим неравенству $\varphi < \varphi_0$. Таким образом, кривая L_1 не может пересечь полукривую (1.4) в точке касания $(x_1(t_1), y_1(t_1))$. При наличии точки касания $(x_1(t_1), y_1(t_1))$ кривая не может пересечь полукривую (1.4) ни в какой другой ее точке. Действительно, в противном случае существует полукривая $y = f(x)\,\mathrm{tg}\,\varphi_1$, $0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_0 \leqslant 2\pi$, такая, что некоторый участок Ω_1 кривой L_1 касается последней полукривой в некоторой точке $(x_1(t_2), y_1(t_2))$, находясь при этом в части окрестности полукривой, соответствующей значениям φ, таким, что $\varphi \geqslant \varphi_1$, а это невозможно в силу первых двух условий в). Таким образом, в любой точке (x_1, y_1) замкнутой интегральной кривой L_1 выполняется соотношение

(1.5) $$f(x_1)Y(x_1, y_1) - y_1 X(x_1, y_1) f'(x_1) \neq 0$$

Допустим, что система (1.1), кроме кривой L_1, имеет еще одну замкнутую интегральную кривую L_2, определенную уравнениями $x_2 = x_2(t)$, $y_2 = y_2(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Для всех точек кривой L_2 также выполняется соотношение (1.5), где x_1, y_1 заменено на x_2, y_2. Запишем систему (1.1) в криволинейных координатах (c, φ) в виде

(1.6) $$c^{-1}dc \,/\, d\varphi = P(c, \varphi)$$
$$P(c, \varphi) = \frac{f(x) f'(x) X(x, y) + yY(x, y)}{f(x) Y(x, y) - yf'(x) X(x, y)}$$

Здесь x и y — функции от c, φ, определенные соотношениями $f(x) = c\cos\varphi$, $y = c\sin\varphi$. Пусть L_1 и L_2 в координатах (c, φ) определены соответственно уравнениями $c_1 = c_1(\varphi)$, $c_2 = c_2(\varphi)$, $c_1, c_2 > 0$. По условию а) теоремы имеем $c_1(\varphi) \neq c_2(\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Для определенности будем считать $c_1 > c_2$. Из уравнения (1.6) следует

(1.7) $$J = \int_0^{2\pi} \omega(\varphi)\, d\varphi = 0$$
$$\omega(\varphi) = P(c_1(\varphi), \varphi) - P(c_2(\varphi), \varphi)$$

Подынтегральное выражение в (1.7) запишем в виде

$$\omega(\varphi) = c_1 c_2 E \,/\, (F_1 F_2)$$
$$E = f'(x_1)Y(r_2)X(r_1) - f'(x_2)Y(r_1)X(r_2)$$
$$F_i = f(x_i)Y(r_i) - y_i X(r_i) f'(x_i)$$

Здесь $r_1(\varphi) = (x_1, y_1)$, $r_2(\varphi) = (x_2, y_2)$ — точки, лежащие на предельных циклах.

Знаменатель полученной дроби не обращается в нуль по условию (1.5). Покажем, что числитель этой дроби неотрицателен. В самом деле, для каждой точки $r_1 = (x_1, af(x_1)) \in L_1$ $(x_1 \neq 0)$, $(0, y_1) \in L_1$ можно указать соответственно такие два числа $k > 1$, $n > 1$, что этой точке взаимно-однозначно соответствует точка

$$r_2 = (x_1 / k, af(x_1 / k)) \in L_2, \quad (0, y_1 / n) \in L_2$$

Эти точки удовлетворяют второму неравенству г) и третьему условию в), знак которого после замены k на $1 / k$ изменяется на противоположный. Последнее означает, что числитель неотрицателен, следовательно, при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\omega(\varphi)$ сохраняет знак, что противоречит условию (1.7). Отсюда следует, что система (1.1) не имеет предельных циклов, вложенных в предельный цикл L_1. Аналогично, используя (1.5), третье условие в) и г), приходим к выводу об отсутствии предельных циклов, окружающих L_1.

Замечания. 1°. Если в теореме 1 вместо условий г) предположить, что существует незамкнутая неограниченная кривая Г в области D, имеющая точки, как угодно близкие к кривой $f^2(x) + y^2 = c_0^2$, причем во всех точках кривой Г выполнено первое условие г), то при выполнении всех остальных условий теоремы 1 система (1.1) имеет не более одного предельного цикла в D. Действительно, пусть указанное условие выполнено. Если существует предельный цикл системы (1.1), то он необходимо пересекается кривой Г и в точке пересечения выполняются условия г) теоремы 1, и, следовательно, этот предельный цикл единственный.

2°. Теорема 1 из работы [4] является следствием данной теоремы, если в последней положить $f(x) = x$ и учесть замечание 1°.

3°. Если в формулировке теоремы 1 отбросить условие г), то возможна кольцевая область, окружающая границу области D, в каждой точке (x, y) которой выполняется соотношение

$$Y(q)X(q_k) = Y(q_k)X(q)$$
$$f'(kx)Y(q)X(q_k) = f'(x)Y(q_k)X(q)$$

Иначе говоря, эта область может состоять из замкнутых интегральных кривых системы (1.1), сплошным образом заполняющих ее.

4°. Если у системы (1.1) имеется предельный цикл L_1, то он орбитально устойчив. Сменив знаки неравенств в), г) на противоположные, установим орбитальную неустойчивость периодического решения.

Теорема 2. Предположим, что

д). Функции $X(x, y) = y$ и $Y(x, y) = -g(x) + y\Phi(x, y)$ удовлетворяют условиям а) и б) теоремы 1.

е). Если $k > 1$, то

$$\Phi(q) \geqslant \Phi(q_k) \quad (x \neq 0), \quad \Phi(0, y) \geqslant \Phi(0, ky)$$
$$g'(kx)\,Y(q)\,ag(kx) \geqslant g'(x)\,Y(q_k)\,ag(x)$$

ж). На предельном цикле L_1 системы (1.1) имеется точка (x', y'), такая

$$g'(kx')\,Y(Q)\,ag(kx') > g'(x')\,Y(Q_k)\,ag(x')$$
$$g'(x'/k)\,Y(Q)\,ag(x'/k) < g'(x')\,Y(Q_{1/k})\,ag(x')$$

з). Свойства функции g идентичны свойствам функции f.

Тогда система (1.1) имеет единственный предельный цикл L_1 в D.

Доказательство. Покажем, что функции X и Y удовлетворяют оставшимся условиям в) и г) теоремы 1. В самом деле, выполнение третьего условия в) и условия г) этой теоремы очевидно. Докажем справедливость первого и второго условий в) теоремы 1. Предположим противное: пусть

$$Y(q)\,X(q_k) - Y(q_k)\,X(q) < 0$$

Из условий данной теоремы имеем

$$[-g(x) + ag(x)\ \Phi(q)]\,ag(kx) - [-g(kx) + ag(kx)\ \Phi(g_k)]\,ag(x) < 0$$

Учитывая, что $a = y/g(x)$, приходим к неравенству

$$y^2 g(kx)\,[\Phi(q) - \Phi(q_k)]\,/\,g(x) < 0 \quad (y \neq 0)$$

Но $g(x)\,g(kx) > 0$, поэтому $\Phi(q) < \Phi(q_k)$, что противоречит первым двум условиям е) доказываемой теоремы.

Теорема доказана.

Заметим, что теорема остается верной для любой двусвязной области D^*, представляющей плоскость (x, y), из которой исключена односвязная область, содержащая точку (0, 0), ограниченная произвольной замкнутой кривой, если в D^* выполняются все условия теоремы 1.

В доказанной теореме, как и в теореме 1, рассматривается устойчивое орбитально периодическое решение при его существовании. Заменив знаки неравенств е) и ж) на противоположные, устанавливаем неустойчивость периодического решения.

2. Установим условия различия моноциклических и ациклических систем второго порядка. Предположим, что

и). $X = X_1 + X_2, \quad Y = Y_1 + Y_2$

к). Вспомогательная система

$$dx / dt = X_1 (x, y), \quad dy / dt = Y_1 (x, y)$$

удовлетворяет условиям единственности решения задачи Коши и имеет первый интеграл $F(x, y) = C$, где $C \geqslant 0$, $F(0, 0) = 0$. Здесь F — однозначная функция и $F(q) < F(q_k)$ в плоскости (x, y).

л). В области $D^* = \{(x, y)\colon c_0^2 \leqslant F(x, y) \leqslant c_1^2\}$ (допустимо $c_1 = +\infty$) X, Y удовлетворяют всем условиям теоремы 1 с учетом замечания 1°.

Теорема 3. Пусть в D^* существует единственная замкнутая кривая L^*, окружающая кривую

$$F(x, y) = c_0^2 \tag{2.1}$$

Кривая L^* определяется уравнением

$$X_1(x, y)\, Y_2(x, y) - X_2(x, y)\, Y_1(x, y) = 0 \tag{2.2}$$

При переходе через кривую (2.2) выражение $X_1Y_2 - X_2Y_1$ меняет знак.

Тогда у системы (1.1) в D^* имеется единственный устойчивый предельный цикл.

Доказательство. Уравнением $F(x, y) = C$ задана топографическая система замкнутых кривых, окружающих особую точку (0, 0), вложенных одна в другую и заполняющих всю плоскость. Производная F_t' в силу системы (1.1) определяется выражением

$$F_t' = F_x'X_2 + F_y'Y_2$$

Тогда (2.2) — кривая контактов вспомогательной системы и системы (1.1). Из к), л) и условий данной теоремы следует существование единственного устойчивого предельного цикла. Теорема доказана.

Если при $k > 1$ заменить знаки неравенств в) и г) теоремы 1 на противоположные, то при выполнении всех условий теоремы 3 система (1.1) будет иметь единственный неустойчивый предельный цикл в D^*.

Если кривая (2.2) пересекает кривую (2.1) либо расположена целиком в области D^*, не окружая при этом кривую (2.1), или вырождена в точку, или мнимая, то существует незамкнутая интегральная кривая, проходящая через всю область D^*, имеющая точки, как угодно близкие к границе (2.1). По условию а) теоремы 1 предельный цикл в D^* у системы (1.1) отсутствует.

Теорема 4. Предположим, что

м). Система (1.1) в области

$$D_1 = \left\{(x, y)\colon y^2 + 2\int_0^x g(x)\, dx \geqslant c_0^2\right\}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 2, где учтено замечание 1°.

н). Уравнение $\Phi(x, y) = 0$ определяет замкнутую кривую, охватывающую границу (2.1) области D_1.

Тогда у системы (1.1) имеется единственный устойчивый предельный цикл в области D_1.

о). Если замкнутая кривая $\Phi(x, y) = 0$ пересекает границу D_1 либо вся расположена в D_1, не охватывая при этом границу области, или вырождена в точку, или мнимая, то система (1.1) ациклична в D_1.

Доказательство. В качестве топографической системы рассмотрим интегральные кривые $F(x, y^2) = C$ вспомогательной системы

$$dx / dt = y, \quad dy / dt = -g(x)$$

Производная F_t' в силу системы (1.1) имеет вид $F_t' = y^2\Phi(x, y)$. Отсюда следует что теорема 4 есть следствие теоремы 3.

3. Надлежащий выбор разложения $Y(x, y) = -g(x) + y\Phi(x, y)$ позволяет получить коэффициентные критерии существования единственного предельного цикла. Применим результаты, полученные в п. 1 и 2, к системе

$$dx / dt = y, \quad dy / dt = Y(x, y) \tag{3.1}$$

$$Y(x, y) = \sum_{i+k=1}^{3} \alpha_{ik} x^i y^k, \quad \alpha_{ik} = \text{const}$$

Теорема 5. Система (3.1) имеет единственный устойчивый предельный цикл, если коэффициенты α_{ik} удовлетворяют условиям

$$\alpha_{10} < 0, \quad \alpha_{30} < 0, \quad \alpha_{20} = 0 \tag{3.2}$$

$$\delta = \alpha_{21}\alpha_{03} - {}^1/_4\alpha_{12}^2 > 0 \tag{3.3}$$

$$\alpha_{01} > 0, \quad \alpha_{21} + \alpha_{03} < 0 \tag{3.4}$$

$$2\alpha_{10}\lambda^2 + \alpha_{30}\lambda^4 + 2c_0^2 \geqslant 0, \quad \lambda^4 < c_0^2 \tag{3.5}$$

$$\lambda^2 = x_0^2 + y_0^2, \ x_0 = ({}^1/_4\alpha_{12}\alpha_{02} - {}^1/_2\alpha_{03}\alpha_{11}) / \delta$$

$$y_0 = ({}^1/_4\alpha_{12}\alpha_{11} - {}^1/_2\alpha_{21}\alpha_{02}) / \delta$$

Доказательство. Выберем функции g и Φ в виде

$$g(x) = -\alpha_{10}x - \alpha_{30}x^3$$

$$\Phi(x, y) = \alpha_{01} + \alpha_{11}x + \alpha_{02}y + \alpha_{12}xy + \alpha_{21}x^2 + \alpha_{03}y^2$$

Из (3.3) и (3.4) следует, что уравнением $\Phi(x, y) = 0$ определен эллипс, окружающий единственную особую точку (0, 0) системы (3.1). Следовательно, существует c_0, такое, что эллипс окружает кривую

$$y^2 + 2\int_0^x g(x)\,dx = c_0^2 \tag{3.6}$$

$$|y| \leqslant c_0, \quad |x| \leqslant \{\alpha_{30}^{-1}[-\alpha_{10} - (\alpha_{10}^2 - 2\alpha_{30}c_0^2)^{1/2}]\}^{1/2}$$

Таким образом, область D_1, в которой выполнено условие н) теоремы 4, построена. В D_1 выполняются также все условия теоремы 2. Из условий теоремы 5 следует, что уравнение $z = \Phi(x, y)$ задает параболоид, вершина которого проектируется в точку (x_0, y_0) плоскости (x, y). Покажем, что точка (x_0, y_0) расположена внутри области B, ограниченной замкнутой кривой (3.6). Рассмотрим окружность $x^2 + y^2 = \lambda^2$, на которой лежит точка (x_0, y_0). Для расстояния $d = (x^2 + y^2)^{1/2}$ от точки (x, y) до начала координат из (3.6) имеем

$$d^2 = \alpha_{30}x^4 / 2 + (\alpha_{10} + 1)\, x^2 + c_0^2 \geqslant \lambda^2 \tag{3.7}$$

Верхняя грань решения этого неравенства относительно $|x|$ превосходит верхние грани решений неравенств (3.6) при выполнении условий (3.5). Отсюда следует, что условие (3.5) влечет за собой выполнение условия (3.7) в B и точка $(x_0, y_0) \in B$. Поэтому при переходе от точки q к точке q_k в области D_1 функция $\Phi(x, y)$ строго убывает. Тогда в этой области выполняется первое условие е) теоремы 2, откуда вытекает строгое неравенство в первом условии в) теоремы 1. Покажем теперь выполнимость последнего условия е) и условий ж) теоремы 2. Для этого достаточно показать, что при $k > 1$

$x \neq 0$

(3.8) $\qquad 0 < g'(x) < g'(kx),$

Действительно, $g''(x) = -6\alpha_{30}x$, откуда $g''(x) > 0$ при $x > 0$, и неравенство (3.8) выполняется. Пусть $x < 0$. Тогда на оси $y = 0$ точка kx лежит левее точки x. Кроме того, $g''(x) < 0$, поэтому и при $x < 0$ условие (3.8) выполняется. Аналогично проверяется и последнее условие теоремы 2 для функции $g(x)$. Следовательно, область D_1 моноциклична.

Если в условии (3.4) первое неравенство заменить на противоположное, сохранив все остальные условия доказываемой теоремы, то система (3.1) будет ацикличной, так как при $\alpha_{01} < 0$ кривая $\Phi(x, y) = 0$ не окружает особую точку (0, 0). Последнее означает, что значение c_0 таково, что кривая контактов целиком расположена в области D_1, не окружая ее границу. Отсюда следует справедливость утверждения о) теоремы 4. Теорема доказана.

Если выполнены условия (3.2), (3.3) и одно из условий

$$\Delta = 4\alpha_{21}\alpha_{03}\alpha_{01} + \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{02} - \alpha_{11}^2\alpha_{03} - \alpha_{12}^2\alpha_{01} - \alpha_{02}^2\alpha_{21} = 0$$

$$1/_4\Delta\,(\alpha_{21} + \alpha_{03}) > 0$$

что соответственно означает, что кривая $\Phi(x, y) = 0$ мнимая или выроздена в точку, то система (3.1) ациклична.

Пусть в последней теореме $\alpha_{20} \neq 0$. Тогда вместо (3.2) рассмотрим условия $\alpha_{10} < 0$, $\alpha_{20}^2 - 3\alpha_{10}\alpha_{30} < 0$. Кроме того, потребуем, чтобы точка $(-\alpha_{20} / (3\alpha_{30}), y)$ не принадлежала области $\{(x, y)\colon\ g^2(x) + y^2 \geqslant c_0^2\}$. Тогда, соответственно изменив условия (3.5) и сохранив остальные условия теоремы 5, приходим к выводу о существовании единственного устойчивого предельного цикла у системы (3.1).

В заключение отметим, что теорема 1 остается верной в случае, если в последнем условии в) и условиях г) этой теоремы заменить знаки неравенств на противоположные, так как при такой замене разность в числителе дроби $\omega(\varphi)$ не меняет знака.

Поступила 10 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Massera J. L.* Sur un théorème de G. Sansone sur l'équation de Liénard. Boll. Unione Mat. Ital., 1954, vo. 9, No. 3, p. 369—372.
2. *De Castro A.* Sull'esistenza ed unicità delle soluzioni periodiche dell'equazione $\ddot{x} + f(x, x^{\cdot})\,x^{\cdot} + g(x) = 0$. Boll. Unione Mat. Ital., 1954, vol. 9, No. 3, p. 367—369.
3. *Войлоков М. И.* Метод оценки сверху числа периодических решений у автономной системы двух дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1961, т. 16, вып. 3.
4. *Войлоков М. И.* Метод Массера доказательства единственности предельного цикла. Изв. вузов. Матем., 1962, № 5.

УДК 531.381 : 534

О КОЛЕБАНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО УСТОЙЧИВЫХ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ

Н. Г. Апыхтин

(Москва)

Методом осреднения [1] определяются амплитуды и частоты колебаний твердого тела около устойчивых перманентных вращений в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

Суть метода осреднения состоит в переходе к нормальным координатам (амплитудам и угловым переменным) и замене (малых по сравнению с линейными) нелинейных чле-