

**ПРИМЕНЕНИЕ ВТОРОГО АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ
ИСКАЖЕНИЯ ИМПУЛЬСА В АКУСТОДИАГНОСТИКЕ СЛОЯ
НА ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ**

У. К. Нигул, А. А. Равасоо

(Таллин)

Рассматривается одномерный эхо-сигнал от плоской границы раздела двух сред, в которых волновой процесс описывается при помощи квазилинейных волновых уравнений. В зависимости от физической интерпретации коэффициентов уравнения описывают процесс распространения волны нелинейной деформации в упругой или идеально сжимаемой жидкой среде [1]. Подобно первому асимптотическому приближению [1-4] строится второе асимптотическое приближение методом последовательного интегрирования неоднородных волновых уравнений.

1. Рассмотрим одномерный волновой процесс в среде, представляющей собой слой A на полупространстве B (фигура). Пусть t — время, X — лагранжева координата. Через U_j , σ_{11j} , ρ_j ($j = A, B$) обозначаем продольное перемещение, продольную компоненту тензора псевдонапряжения Лагранжа и плотность в начальном состоянии слоя A и полупространства B . Пусть штрих означает производную по X , а точка — производную по t .

Опишем волновой процесс при помощи уравнений

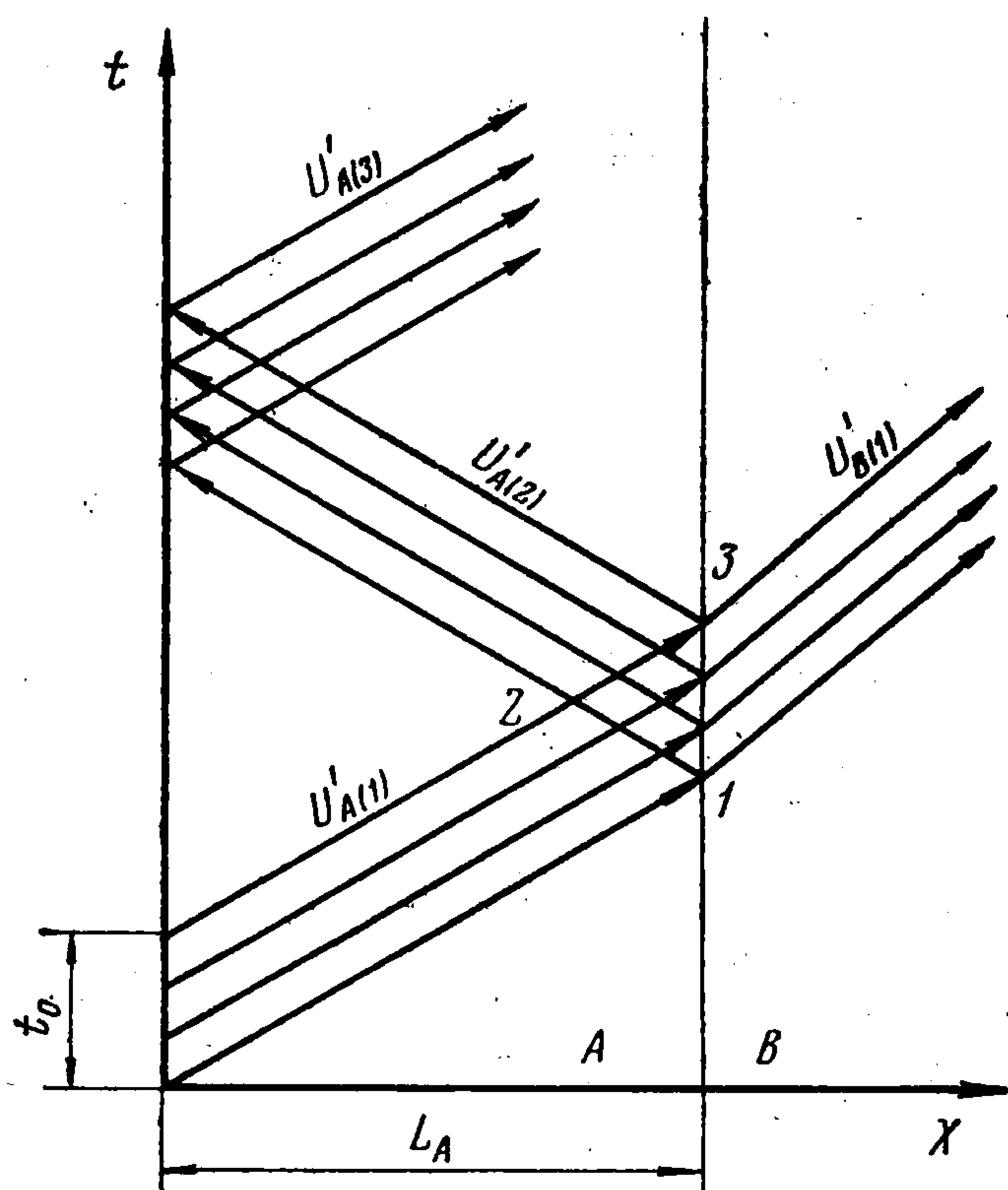
$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{11j}'(X, t) &= \rho_j U_j''(X, t), \\ j &= A, B \\ \sigma_{11j}(X, t) &\equiv Q_j(U_j') = \\ &= P_0 + \beta_j [U_j' + \frac{1}{2}k_{1j} \times \\ &\times (U_j')^2 + \frac{1}{3}k_{2j} (U_j')^3 + \dots] \end{aligned}$$

(P_0, β_j, k_{ij} — постоянные коэффициенты). Введя определения

$$q_j(U_j') = \beta_j^{-1} dQ_j(U_j')/dU_j', \quad c_j^2 = \beta_j \rho_j^{-1}$$

получим из (1.1) уравнение

$$(1.2) \quad c_j^{-2} U_j''(X, t) - q_j(U_j') U_j''(X, t) = 0, \quad j = A, B$$



Примем следующие начальные условия, краевое условие на границе $X = 0$ и условие контакта на границе раздела $X = L_A$:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} U_j(X, 0) &= 0, \quad U_j'(X, 0) = 0 \\ U_A'(0, t) &= -\varepsilon c_A \psi(t) [H(t) - H(t - t_0)], \\ |\varepsilon| &\ll 1; \quad 0 \leq t_0 < c_A^{-1} L_A \\ U_A'(L_A, t) &= U_B'(L_A, t), \quad \sigma_{11A}(L_A, t) = \sigma_{11B}(L_A, t) \end{aligned}$$

Здесь $H(t)$ — функция Хевисайда, $\psi(t)$ — произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \psi(0) = \psi(t_0) &= 0, \quad \psi'(0) = \psi'(t_0) = 0 \\ \max |\psi(t)| &= 1, \quad 0 < t < t_0 \end{aligned}$$

и имеющая в промежутке $0 \leq t \leq t_0$ непрерывные производные всех необходимых в дальнейшем порядков.

Краевое воздействие на границе $X = 0$ (третье условие в (1.3)) генерирует импульс конечной длины, который обозначим через $U_{A(1)}(X, t)$. В результате отражения — преломления этого импульса на границе раздела двух сред $X = L_A$ возникают отраженный импульс $U_{A(2)}(X, t)$ и преломленный импульс $U_{B(1)}(X, t)$ (фигура). В данном случае отраженный импульс $U_{A(2)}(X, t)$ представляет собой эхо-сигнал от границы раздела $X = L_A$.

Используя методику, изложенную в [1,3], получим с точностью второго асимптотического приближения следующее представление эхо-сигнала:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} U_{A(2)2}(X, t) &= [H(t_{2A}) - H(t_{2A} - t_0)] \left\{ \sum_{i=0}^{10} J_i F_i + \right. \\ &+ \left. [H(t_{1A}) - H(t_{1A} - t_0)] \sum_{i=11}^{33} J_i F_i \right\} \\ t_{1A} &= t - c_A^{-1} X, \quad t_{2A} = t - 2c_A^{-1} L_A + c_A^{-1} X \end{aligned}$$

Здесь $F_i = F_i(X, t)$ — функции, которые определены заданием функции $\psi(t)$, входящей в краевое условие при $X = 0$, а $J_i = J_i(X)$ — величины, зависящие от постоянных рассматриваемой среды

$$(1.5) \quad \begin{aligned} F_0 &= \psi_2, \quad F_1 = F_0^2, \quad F_2 = F_0', \quad F_3 = F_1', \quad F_4 = M_2 F_2 \\ F_5 &= \psi_2^3, \quad F_6 = F_5', \quad F_7 = F_5'', \quad F_8 = N_2 F_2, \quad F_9 = M_2 F_3 \\ F_{10} &= M_2^2 \psi_2'', \quad F_{11} = \psi_1 \psi_2, \quad F_{12} = M \psi_1', \quad F_{13} = (M_1 - M_0) \psi_2' \\ F_{14} &= F_1', \quad F_{15} = M_1 \psi_2', \quad F_{16} = \psi_1 \psi_2^2, \quad F_{17} = \psi_1^2 \psi_2 \\ F_{18} &= \psi_1' \psi_2^2, \quad F_{19} = \psi_1 F_3, \quad F_{20} = \psi_1^2 \psi_2', \quad F_{21} = (\psi_1^2)' \psi_2 \\ F_{22} &= N_2 \psi_1', \quad F_{23} = N_1 \psi_2', \quad F_{24} = M_2 (\psi_1^2)', \quad F_{25} = M_1 F_3 \\ F_{26} &= M_1^2 \psi_2'', \quad F_{27} = M_2^2 \psi_1'', \quad F_{28} = M_2 (\psi_1^2)'', \quad F_{29} = M_1 F_3' \\ F_{30} &= M_1 \psi_1 \psi_2', \quad F_{31} = M_2 \psi_1 \psi_2', \quad F_{32} = M_1 \psi_1' \psi_2, \quad F_{33} = M_2 \psi_1' \psi_2 \\ \psi_k &= \psi(t_{kA}), \quad \psi_k' = \psi'(t_{kA}), \quad M_k = \int_0^{t_{kA}} \psi(z) dz \end{aligned}$$

(1.6)

$$\begin{aligned}
M_0 &= \int_0^{t_0} \psi(z) dz, \quad N_k = \int_0^{t_{kA}} \psi^2(z) dz, \quad k = 1, 2 \\
J_0 &= \varepsilon J_A \\
J_1 &= \frac{1}{16} \varepsilon^2 k_{1A} [2(J_{1A} J_{2A}^2 K_A - 2J_A^2) + \varepsilon k_{1A} J_A^3] \\
J_2 &= \frac{1}{4} \varepsilon^2 k_{1A} J_A M_0 \\
J_3 &= \frac{1}{16} \varepsilon^2 k_{1A} J_A [4c_A^{-1} (L_A J_{2A} - J_A X) - \varepsilon k_{1A} J_A M_0] \\
J_4 &= -\frac{1}{16} J_A [4\varepsilon^2 k_{1A} J_{1A} - \varepsilon^3 (3k_{1A}^2 - 4k_{2A})] \\
J_5 &= \frac{1}{96} \varepsilon^3 k_{1A}^2 [2(5 + 7J_A) - 12J_A^2 (1 + 2J_A - J_A^3) - \\
&\quad - J_{1A}^3 J_{2A} (3J_A + 7) K_B^2 + 3J_{1A}^2 J_{2A}^2 (3J_A - 1) K_B] - \\
&\quad - \frac{1}{6} \varepsilon^3 k_{2A} J_A (J_A^2 + J_{2A}^3) + \frac{1}{6} \varepsilon^3 k_{2B} J_A J_{1A}^3 J_{2A} c_A^2 c_B^{-2} \\
J_6 &= \frac{1}{6} \varepsilon^3 c_A^{-1} \left\{ \frac{1}{8} k_{1A}^2 \{12J_A^3 X + L_A [2J_{1A}^2 J_{2A} K_B - 2J_{1A}^2 J_{2A} - \right. \\
&\quad \left. - J_A (13 + 11J_A^2)]\} + k_{2A} J_A [L_A (J_A^2 + 1) - J_A^2 X] \right\} \\
J_7 &= \frac{1}{24} \varepsilon^3 k_{1A}^2 c_A^{-2} [J_A^3 (5L_A^2 - 4L_A X - X^2) + J_A L_A^2] \\
J_8 &= \frac{1}{4} \varepsilon^3 J_A \left\{ \frac{1}{8} k_{1A}^2 [5J_A (2 - J_A) - 1] + k_{2A} J_A^2 \right\} \\
J_9 &= -\frac{1}{64} \varepsilon^3 J_A k_{1A}^2 J_{1A} J_{2A} (3J_A - 2J_{1A} K_B) \\
J_{10} &= -\frac{1}{16} \varepsilon^3 k_{1A}^2 J_A^2 J_{1A}, \quad J_{11} = -\frac{1}{16} J_A (8\varepsilon^2 k_{1A} - \varepsilon^3 k_{1A}^2 J_A) \\
J_{12} &= J_{13} = \frac{1}{4} \varepsilon^2 k_{1A} J_A, \quad J_{14} = \frac{1}{16} \varepsilon^3 k_{1A}^2 J_A^2 M_0 \\
J_{15} &= -\frac{1}{4} \varepsilon^3 J_A \left(\frac{3}{4} k_{1A}^2 - k_{2A} \right), \quad J_{16} = \frac{1}{2} \varepsilon^3 J_A^2 \left(\frac{5}{8} k_{1A}^2 - k_{2A} \right) \\
J_{17} &= \frac{1}{2} \varepsilon^3 J_A (k_{1A}^2 - k_{2A}), \\
J_{18} &= -\frac{1}{2} J_{19} = \frac{1}{16} \varepsilon^3 k_{1A}^2 c_A^{-1} J_A^2 (2L_A - X) \\
J_{20} &= -\frac{1}{2} J_{21} = \frac{1}{16} \varepsilon^3 k_{1A}^2 c_A^{-1} X J_A, \quad J_{22} = -\frac{1}{2} J_{16}, \\
J_{23} &= \frac{1}{32} \varepsilon^3 k_{1A}^2 J_A \\
J_{24} &= J_A^{-1} J_{25} = -\frac{1}{4} \varepsilon^3 J_A \left(\frac{9}{8} k_{1A}^2 - k_{2A} \right), \quad J_{26} = J_A^{-1} J_{27} = J_{23} \\
J_{28} &= J_{20}, \quad J_{29} = J_{18}, \\
J_{30} &= -2J_A^{-1} J_{31} = -2J_{32} = J_A^{-1} J_{33} = -\frac{1}{8} \varepsilon^3 k_{1A}^2 J_A \\
(1.7) \quad J_A &= \frac{\rho_B c_B - \rho_A c_A}{\rho_B c_B + \rho_A c_A}, \quad J_{1A} = 1 - J_A, \quad J_{2A} = 1 + J_A \\
K_A &= \frac{k_{1B} \beta_A}{k_{1A} \beta_B} - 1, \quad K_B = \frac{k_{1B} c_A}{k_{1A} c_B}
\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что, как видно из (1.4), в области нелинейного взаимодействия падающего и отраженного импульсов (см. треугольник 123 на фигуре) отражен-

ный импульс описывается совокупностью всех членов этой формулы ($i = 0, 1, \dots, 33$) а вне указанной области взаимодействия — первой суммой в фигурных скобках ($i = 0, 1, \dots, 10$). Член $i = 0$, содержащий ε в первой степени, определяет линейное (нулевое) приближение, а члены, содержащие ε во второй и третьей степени, определяют соответственно поправки от учета нелинейных эффектов с точностью первого и второго асимптотического приближения. С точностью первого асимптотического приближения, построенного в [1,3], в сумме (1.4) содержатся члены $i = 0, 1, \dots, 4$ и $i = 11, 12, 13$. При этом коэффициенты J_i следует выписывать с точностью составляющих, содержащих ε в первой и во второй степенях.

2. Рассмотрим некоторую фиксированную точку $X = a$ вне области взаимодействия импульсов $U'_{A(1)}(X, t)$ или $U'_{A(2)}(X, t)$, где эхо-сигнал определяется первой суммой членов в фигурных скобках формулы (1.4). Допустим, что в этой точке осуществляется регистрация эхо-сигнала и измеряется время запаздывания

$$(2.1) \quad r = 2c_A^{-1}L_A - c_A^{-1}a$$

Предполагаем, что удастся выбрать функцию $\psi(t)$ так, что в эксперименте окажется возможным разложить эхо-сигнал $U'_{A(2)}(X, t)$ на составляющие, изменяющиеся во времени, согласно функциям $F_i(a, t)$, и имеющие соответственно амплитуды J_i . Тогда коэффициенты J_i при $X = a$ могут быть интерпретированы как постоянные, найденные из эксперимента.

Обсудим вопрос о том, какая информация о параметрах слоя A и полупространства B может быть извлечена из сведений о численных значениях r, J_0, J_1, J_2, \dots . Амплитуду воздействия $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon c_A$ и значение определенного интеграла M_0 будем интерпретировать как заданные постоянные, из которых последняя равна нулю при так называемых «уравновешенных» воздействиях.

Ясно, что реальные акустические измерения осуществимы лишь с некоторой известной точностью и поэтому речь может идти только об использовании тех из постоянных J_1, J_2, \dots , которые не слишком малы по сравнению с J_0 и уровнем шума, причем каждая из постоянных r, J_0, J_1, J_2, \dots определяется с некоторой погрешностью. Поэтому в дальнейшем выделим следующие группы экспериментально найденных постоянных.

1°. Параметры линейного составляющего эхо-сигнала r и J_0 , которые выражаются через амплитуду $\varepsilon_1 = \varepsilon c_A$ воздействия и через параметры слоя A и полупространства B согласно формулам (1.6) и (2.1).

2°. Параметры первого порядка нелинейных составляющих эхо-сигнала $J_1^\circ, J_2^\circ, J_3^\circ$ и J_4° , которые выражаются через параметры слоя A и полупространства B согласно формулам (1.6), причем J_1°, J_3° и J_4° обозначают соответственно главные части J_1, J_3 и J_4 , содержащие ε^2 .

3°. Параметры второго порядка нелинейных составляющих эхо-сигнала J_j ($j = 1, 3, 4, \dots, 10$), выражающиеся согласно формулам (1.6).

Вопросы извлечения информации из параметров группы 1° и 2° обсуждены в [1-3] при различных видах краевого воздействия и измеряемых величин. Аналогичным образом может быть проведен анализ возможностей извлечения информации из параметров группы 3°. Опуская подробности рассуждений, сформулируем основные результаты.

Пусть известны амплитуда воздействия $\varepsilon_1 = \varepsilon_A$ и функция изменения воздействия $\psi(t)$, а в случае $M_0 = 0$ — также расстояние a от точки воздействия до точки измерения эхо-сигнала.

Если из данных измерения эхо-сигнала извлечены только значения постоянных r и J_0 группы 1°, то на основе их могут быть вычислены лишь величины

$$(2.2) \quad (2L_A - a) / c_A, \quad J_A / c_A$$

Если из экспериментальных данных извлечены значения постоянных групп 1° и 2°, тогда могут быть вычислены величины

$$(2.3) \quad a \text{ (в случае } M_0 \neq 0), \quad \varepsilon, \quad c_A, \quad L_A, \quad J_A,$$

$$k_{1A}, \quad k_{1B} / c_B$$

Если из экспериментальных данных удастся извлечь значения постоянных групп 1° — 3°, можно дополнительно к (2.3) вычислить еще величины

$$(2.4) \quad k_{2A}, \quad k_{2B} / c_B^2$$

причем одновременно увеличивается точность вычисления величин (2.3).

Эти выводы основаны на следующих соотношениях, полученных путем применения определения величин c_A , c_B и формул (1.7):

$$(2.5) \quad \frac{\rho_B c_B}{\rho_A c_A} = \frac{J_{2A}}{J_{1A}}, \quad \frac{k_{1B}}{c_B} = \frac{1 + K_A}{c_A} k_{1A} \frac{\rho_B c_B}{\rho_A c_A} = \frac{K_B k_{1A}}{c_A}$$

Частный случай. Когда слой A и полупространство B — идеальные сжимаемые жидкости, имеют место соотношения [1]

$$(2.6) \quad k_{1i} = -(\gamma_i + 1), \quad k_{2i} = \frac{1}{2} (\gamma_i + 1) (\gamma_i + 2), \quad i = A, B$$

где γ_A и γ_B — показатели адиабаты соответственно материалов слоя A и полупространства B . В этом случае на основании найденных из эксперимента величин k_{1B} / c_B и k_{2B} / c_B^2 может быть вычислено соотношение k_{1B}^2 / k_{2B} , которое, согласно формулам (2.6), выражается через γ_B следующим образом:

$$(2.7) \quad \frac{k_{1B}^2}{k_{2B}} = \frac{\gamma_B^2 + 2\gamma_B + 1}{\frac{1}{2}\gamma_B^2 + \frac{3}{2}\gamma_B + 1}$$

Из (2.7) следует

$$(2.8) \quad \gamma_B = -\frac{2(R-1)}{R-2}, \quad R = \frac{k_{1B}^2}{k_{2B}}$$

Зная численное значение γ_B , можно вычислить k_{1B} и k_{2B} , а затем c_B . Поскольку $\rho_B c_B / \rho_A c_A$ и c_A — уже известные величины, нетрудно вычислить отношение ρ_B / ρ_A .

3. В приложениях может оказаться более выгодным или необходимым разложить отраженный импульс не на составляющие, временная зависимость которых определяется соответственно функциями $F_i(a, t)$, а иным путем.

Например, в случае источника, генерирующего синусоидальные импульсы

$$(3.1) \quad U_A^*(0, t) = -\varepsilon c_A [H(t) - H(t - t_0)] \sin \omega t$$

эхо-сигнал состоит из составляющих (гармоник) с частотами $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$. При решении обратной задачи акустодиагностики на основании формул второго приближения имеем амплитуды первых трех гармоник.

Информативность эхо-сигнала может быть повышена, если использовать источник так называемых «параметрических» импульсов вида

$$(3.2) \quad U_A'(0, t) = -\varepsilon c_A [H(t) - H(t - t_0)] \psi(t)$$

$$(3.3) \quad \psi(t) = 1/2 (\cos 2\omega_2 t - \cos 2\omega_1 t), \quad \omega_2 > \omega_1$$

Теперь при решении обратной задачи акустодиагностики на основании формул второго приближения имеем составляющие эхо-сигнала с частотами $2\omega_1, 4\omega_1, 6\omega_1, 2\omega_2, 4\omega_2, 6\omega_2, 2(\omega_2 \pm \omega_1), 2(2\omega_2 \pm \omega_1)$ и $2(\omega_2 \pm 2\omega_1)$. Итак, число составляющих различной частоты, амплитуды которых содержат информацию, увеличивается от трех в первом случае до двенадцати во втором случае. Здесь из рассмотрения исключается постоянная составляющая эхо-сигнала.

Рассмотрим опять эхо-сигнал вне области его взаимодействия с падающим импульсом. Подставляя выражения (3.2) и (3.3) в (1.4), имеем

$$(3.4) \quad U_{A(2)2}'(a, t) = [H(t_{2A}) - H(t_{2A} - t_0)] \times \\ \times \left[a_0 + \sum_{i=1}^{12} (a_i \cos \Omega_i t_{2A} + \Omega_i b_i \sin \Omega_i t_{2A}) \right]$$

$$\Omega_i = 2i\omega_1, \quad \text{если } i = 1, 2, 3$$

$$\Omega_i = 2(i - 3)\omega_2, \quad \text{если } i = 4, 5, 6$$

$$\Omega_i = 2[\omega_1 + (-1)^i \omega_2], \quad \text{если } i = 7, 8$$

$$\Omega_i = 2[\omega_1 + (-1)^i 2\omega_2], \quad \text{если } i = 9, 10$$

$$\Omega_i = 2[2\omega_1 + (-1)^i \omega_2], \quad \text{если } i = 11, 12$$

$$(3.5) \quad a_0 = \frac{1}{4} (J_1 - J_4) \\ a_1 = -\frac{1}{64} \left[32J_0 + 18J_5 - 72\omega_1^2 J_7 - \frac{9\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} J_8 - \right. \\ \left. - 12J_9 - 2 \left(1 + \frac{2\omega_1^2}{\omega_2^2} \right) J_{10} \right] \\ a_2 = a_5 = \frac{1}{8} (J_1 + J_4) \\ a_3 = -\frac{1}{64} (2J_5 - 72\omega_1^2 J_7 + J_8 + 4J_9 + 2J_{10}) \\ a_4 = \frac{1}{64} \left[32J_0 + 18J_5 - 72\omega_2^2 J_7 + \frac{9\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} J_8 - \right. \\ \left. - 12J_9 - 2 \left(1 + \frac{2\omega_2^2}{\omega_1^2} J_{10} \right) \right] \\ a_6 = \frac{1}{64} (2J_5 - 72\omega_2^2 J_7 + J_8 + 4J_9 + 2J_{10}) \\ a_{7,8} = -\frac{1}{8} \left[2J_1 \mp \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) J_4 \right] \\ a_{9,10} = \frac{1}{64} \left[-6J_5 + 24(\omega_1 \mp 2\omega_2)^2 J_7 - \frac{\omega_1\omega_2 \mp \omega_1^2 \mp 4\omega_2^2}{\omega_2(\omega_1 \mp \omega_2)} J_8 - \right. \\ \left. - 4 \left(1 \mp \frac{\omega_1}{\omega_2} \mp \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) J_9 - 4 \left(\frac{\omega_1^2}{2\omega_2^2} \mp \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) J_{10} \right] \\ a_{11,12} = \frac{1}{64} \left[6J_5 - 24(\omega_2 \mp 2\omega_1)^2 J_7 + \frac{\omega_1\omega_2 \mp \omega_2^2 \mp 4\omega_1^2}{\omega_1(\omega_2 \mp \omega_1)} J_8 + \right. \\ \left. + 4 \left(1 \mp \frac{\omega_1}{\omega_2} \mp \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) J_9 + 4 \left(\frac{\omega_2^2}{2\omega_1^2} \mp \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) J_{10} \right] \\ b_1 = -b_4 = 1/32 (16J_2 + 9J_6 + 4t_{2A} J_8)$$

$$b_2 = b_5 = -\frac{J_3}{8}, \quad b_3 = -b_6 = \frac{J_6}{32}, \quad b_7 = b_8 = \frac{J_3}{4}$$

$$b_9 = b_{10} = \frac{3J_6}{32}, \quad b_{11} = b_{12} = -\frac{3J_6}{32}$$

Допустим, что в результате обработки экспериментальных данных найдены численные значения амплитуд a_i и $\Omega_i b_i$ различных составляющих эхо-сигнала (3.4). Тогда извлечение информации из эхо-сигнала сводится к нахождению величины J_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) на основе a_i и b_i ($i = 1, 2, \dots$) путем применения формул (3.5), ибо вопрос об извлечении информации из J_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) был уже в общем виде обсужден в п. 2. Поскольку каждый из коэффициентов a_i и b_i зависит от нескольких J_i , при вычислении J_i на основании формул (3.5) важно оценить порядки величин слагаемых в этих формулах.

Рассмотрим случай

$$\omega_1 \sim \omega_2 \sim \Omega, \quad (\omega_2 - \omega_1) / \omega_2 \sim \eta, \quad 0 < \eta \ll 1$$

$$I_A \sim 1, \quad K_A \sim 1, \quad K_B \sim 1, \quad \Omega M_0 \sim 1$$

Согласно исходным предположениям и определениям

$$(3.6) \quad |ek_{1A}| \ll 1, \quad \max t_{2A} = t_0, \quad \Omega = n\pi t_0^{-1}$$

Введем постоянную α по определению

$$(3.7) \quad L_A n\pi / (t_0 c_A) \sim (ek_{1A})^{-\alpha}$$

На основании формул (1.6), (3.4), (3.5) можно прийти к заключению, что применение асимптотического метода, использованного в данной работе, обосновано только при таких значениях параметров задачи, когда в (3.7) $\alpha < 1$. Допустим, что это условие выполняется. Тогда с учетом (3.6) и (3.7) получим на основании формул (1.6) и (3.5) следующие оценки:

для величин J_j

$$J_0 \sim \varepsilon; \quad J_1, J_2, J_4 \sim \varepsilon^2 k_{1A}; \quad J_3, J_6 \sim \varepsilon^2 k_{1A} L_A c_A^{-1}$$

$$J_5, J_8, J_9, J_{10} \sim \varepsilon^3 k_{1A}^2; \quad J_7 \sim \varepsilon^3 k_{1A}^2 L_A^2 c_A^{-1}$$

множители J_j ($j = 0, 1, \dots, 6, 9, 10$) в формулах (3.5) имеют порядок единицы, множитель при J_7 — порядок Ω^2 , а множитель при J_8 — порядок η^{-1} при вычислении a_1, a_4, a_9, a_{11} и порядок единицы при вычислении величин a_3, a_6, a_{10} и a_{12} .

Учитывая сказанное, заключаем, что в данном случае приближенное вычисление J_j по a_j и b_j может быть выполнено по следующей схеме: J_0 вычисляется по a_1 или a_4 , J_1 и J_4 — из системы выражений для a_2 и a_7 , J_2 — по b_1 или b_4 , J_3 — по b_2 или b_5 , J_6 — по b_3 или b_6 , $J_5, J_7, J_8, J_9, J_{10}$ вычисляется из системы выражений для a_6, a_9, a_{10}, a_{11} и a_{12} .

Поступила 19 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Никул У. К. Эхо-сигналы от упругих объектов, т. 1. Таллин, «Валгус», 1976.
2. Nigul U. Asymptotic analysis of the non-linear effects of finite echo-pulses from elastic half-space. *Acustica*, 1976, vol. 34, No. 3.
3. Никул У. К. Асимптотический анализ возможности использования нелинейных эффектов в акустодиагностике свойств упругого объекта «слой на полупространстве». *Механика полимеров*, 1977, № 2.
4. Никул У. К. Асимптотическое описание процесса формирования нелинейного искажения одномерных импульсов в слоистой среде. *ПММ*, 1976, т. 40, вып. 6.