Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.4

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА ГРИНА СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

А. В. Чигарев

(Минск)

Рассматривается решение задачи нахождения среднего тензора Грина микронеоднородной упругой неограниченной среды. Для статистически изотропной однородной среды задача сводится к нахождению собственных значений упругого и поляризационного операторов и вычислению обратных преобразований Фурье. Методом замены полевых переменных просуммированы все одно- и двухточечные последовательности в выражении для упругого оператора и его собственных значений. Получено для конкретной корреляционной функции общее выражение среднего тензора Грина и рассмотрены вопросы нахождения его приближений по первым корням и асимптотических формул по величине длин волн (частот).

Нахождение функции Грина для неоднородных и случайно-неоднородных сред рассматривалось в работах [1–5]. Применению методов функции Грина в стохастических системах посвящены работы [6–8].

1. Рассмотрим неограниченную линейную упругую неоднородную среду, в которой связь между напряжениями σ_{ij} и деформациями e_{ij} определяется соотношением

$$\sigma = \lambda(x)e, \quad e_{kl} = {}^1/_2\,(u_{kl,} + u_{l,k}) \tag{1.1}$$

где $\lambda_{ijkl}(x)$ — тензор упругих коэффициентов, зависящий от пространственных координат случайным образом. Здесь и в дальнейшем будем записывать полевые переменные в прямых обозначениях, переходя при необходимости к координатному представлению тензоров. Тензор Грина $G_{kn}(x, x_1)$ рассматриваемой среды удовлетворяет уравнению

$$(\lambda G_{,x})_{,x} + \rho_0\omega^2 G = \delta(x - x_1) \tag{1.2}$$

Вводя в рассмотрение вспомогательную среду с параметрами λ°, ρ_0, перейдем от уравнения (1.2) к эквивалентному интегральному ($G_{kn}{}^\circ(x - x_1)$ — тензор Грина однородной вспомогательной среды)

$$G(x, x_1) = G^\circ(x - x_1) - \int G^\circ(\lambda' G_{,x})_{,x}\,dx_1, \quad \lambda' = \lambda - \lambda^\circ \tag{1.3}$$

Дифференцируя уравнение (1.3), перебрасывая производную под знаком интеграла и представляя [9]

$$G^\circ_{,xx}(x - x_1) = G^{(s)}_{,xx}\,\delta(x - x_1) + G^R_{,xx}(x - x_1)$$

получим

$$BG_{,x} = G^\circ_{,x} - \int G^{(R)}_{,xx}\lambda' G_{,x}dx_1$$

$$B_{iqjl} = \delta_{iq}\delta_{jl} + \lambda'_{nmql}G^{(s)}_{in,mj}$$

Переходя к новым полевым переменным g, Γ [9]

(1.4) $\qquad g_{ijk} = B_{iqjl}G_{qk,\,l}, \quad \Gamma_{nmst} = \lambda'_{nmql}B^{-1}_{qlst}$

запишем интегральное уравнение в виде

(1.5) $\qquad g = \overset{\circ}{G}_{,x} - \int G^{(R)}_{,xx}\Gamma g dx_1$

Решая уравнение (1.5) последовательными итерациями, получим представление для g_{ijk} в виде ряда рассеяния по степеням Γ. Наилучшая сходимость ряда имеет место при условии [9]

(1.6) $\qquad \langle \Gamma_{ijkl} \rangle = 0$

Непосредственной проверкой получаем, что $\langle g \rangle$ при условии (1.6) удовлетворяет уравнению

(1.7) $\qquad \langle g \rangle = \overset{\circ}{G}_{,x} + \int\int G^{(R)}_{,xx} Q \langle g \rangle dx_1 dx_2$

$$Q_{nmst}(x_1, x_2) = \langle \Gamma_{nmpq}(x_1)\,\Gamma_{\beta\gamma st}(x_2)\rangle\, G^{(R)}_{p\beta,\,q\gamma}(x_2 - x_1) + \ldots$$

Определим эффективный тензор поляризации Γ^*_{nmst} соотношением

(1.8) $\qquad \langle \Gamma g \rangle = \Gamma^* \langle g \rangle = \int \gamma^*(x, x_1)\langle g \rangle dx_1$

Осредняя уравнение (1.5) с учетом (1.8), получим

(1.9) $\qquad \langle g \rangle = \overset{\circ}{G}_{,x} - \int G^{(R)}_{,xx}\Gamma^* \langle g \rangle dx_1$

Сравнивая соотношения (1.7), (1.9), найдем связь между γ^* и Q

(1.10) $\qquad \gamma^*(x, x_1) = -Q(x, x_1)$

Полевые величины $G_{,x}$, λ и g, Γ связаны формулами

(1.11) $\qquad g = (E^1 + \lambda' G^{(s)}_{,xx})G_{,x}$

$$\Gamma g = \lambda' G_{,x}, \quad E^1_{iqjl} = \delta_{iq}\delta_{jl}$$

Осредняя (1.11), получим с учетом (1.8)

(1.12) $\qquad \langle g \rangle = \langle G_{,x} \rangle + G^{(s)}_{,xx} \ \Lambda' \langle G_{,x} \rangle$

$$\Gamma^* \langle g \rangle = \Lambda' \langle G_{,x} \rangle, \quad \Lambda' = \Lambda^* - \lambda^\circ$$

Здесь упругий оператор Λ^* вводится соотношением

(1.13) $\qquad \langle \lambda G_{,x} \rangle = \Lambda^* \langle G_{,x} \rangle = \int \lambda^* \langle G_{,x} \rangle dx_1$

Из уравнений (1.12) следует

(1.14) $\Gamma^* (E^1 + G^{(s)}_{,xx} \ \Lambda') \langle G_{,x} \rangle = \Lambda' \langle G_{,x} \rangle$

Пусть рассматриваемая среда статистически однородная изотропная. Тогда

$$\gamma^*(x, x_1) = \gamma^*(x - x_1), \quad \lambda^*(x, x_1) = \lambda^*(x - x_1).$$

Обозначим Фурье-образы ядер γ^*, λ^* через $D^*(\omega, k)$, $L^*(\omega, k)$. Применяя преобразование Фурье к уравнению (1.14), получим

(1.15) $\qquad L^*(\omega, k) = \lambda^\circ + M^{-1}D^*(\omega, k), \quad M_{pnqj} = E^1_{pnqj} - D^*_{njim}G^{(s)}_{ip,\,mq}$

Осредним уравнение (1.2) с учетом (1.3) и преобразуем по Фурье. Имеем ($P_{kn}(\omega, k)$ — Фурье-образ тензора G_{kn})

(1.16) $\qquad (L^*_{ijkl}k_l k_j - \rho_0\omega^2\delta_{ik})\,P_{kn} = -\delta_{in}$

2. Пусть вспомогательная среда однородная изотропная

$$(2.1)\qquad \overset{\circ}{\lambda}_{ijkl} = \lambda_0 E^1_{ijkl} + 2\mu_0 E^2_{ijkl}, \quad E^2_{ijkl} = {}^1/_2\,(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il})$$

Тогда известно выражение для тензора $G_{kn}{}^\circ$ [1].

Ограничимся в выражении (1.7) учетом двухточечного момента $\Gamma_{ijkl}(x)$, что соответствует учету двухточечных моментов $\lambda_{ijkl}(x)$ всех порядков. Рассмотрим неоднородную изотропную среду

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} &\lambda_{ijkl}(x) = \lambda(x) E^1_{ijkl} + 2\mu(x) E^2_{ijkl} \\ &\Gamma_{ijkl}(x) = \Gamma_1(x) E^1_{ijkl} + 2\Gamma_2(x) E^2_{ijkl} \end{aligned}$$

Предположим, что

$$(2.3)\qquad \langle \Gamma_i(x_1)\Gamma_j(x_2)\rangle = R(0) e^{-\tau}\tau^{-1}\sin\tau, \quad \tau = a^{-1}\rho = a^{-1}\,|\,x_1 - x_2\,|$$

Применяя преобразование Фурье ко второй формуле (1.7) с учетом (1.10), (2.3), получим

$$(2.4)\qquad D^*_{nj\gamma\delta}(\omega, k) = \sum_{\alpha=1}^{6} D_\alpha{}^*(\omega, k) E^\alpha_{nj\gamma\delta}$$

По формулам (1.5) с учетом (2.4) найдем

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} &L_{nj\gamma\delta}(\omega, k) = \sum_{\alpha=1}^{6} L_\alpha{}^*(\omega, k) E^\alpha_{nj\gamma\delta} \\ &E^3_{nj\gamma\delta} = q_n q_j \delta_{\gamma\delta}, \quad E^4_{nj\gamma\delta} = q_\gamma q_\delta \delta_{nj} \\ &E^5_{nj\gamma\delta} = {}^1/_4\,(\delta_{n\gamma} q_j q_\delta + \delta_{n\delta} q_j q_\gamma + \delta_{j\gamma} q_n q_\delta + \delta_{j\delta} q_n q_\gamma) \\ &E^6_{nj\gamma\delta} = q_n q_j q_\gamma q_\delta, \quad q_i = k_i / k \end{aligned}$$

Для случая сильной изотропии $D_i{}^*(\omega, k) = L_i{}^*(\omega, k) = 0$ $(i = 3, 4, 5, 6)$ формулы (1.15) запишем следующим образом:

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} &L_2{}^* = \mu_0 + \frac{D_2{}^*}{1 - T^{(t)} D_2{}^*}, \quad T^{(t)} = \frac{2(3\lambda_0 + 8\mu_0)}{16\mu_0(\lambda_0 + 2\mu_0)} \\ &K^* = K_0 + \frac{D^*}{1 - TD^*}, \quad T = (\lambda_0 + 2\mu_0)^{-1} \\ &K^* = L_1{}^* + {}^2/_3 L_2{}^*, \quad D^* = D_1{}^* + {}^2/_3 D_2{}^* \end{aligned}$$

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} &D_1{}^*(\omega, k) = \frac{2A}{15}\Big\{2\Psi_j^{(1)} + 2\Psi_j^{(2)} + \Psi_{j\alpha}^{(3)} + \Psi_{j\alpha}^{(4)} + \\ &+ \frac{3}{2}\Psi_{j\alpha}^{(6)} + \Psi_{j\alpha}^{(7)} + 2\Psi_{jl}^{(8)} + \Psi_j^{(9)}\Big\}_2^1\Big|_t^l \\ &D_2{}^*(\omega, k) = \frac{2A}{15}\{\Psi_j^{(1)} + \Psi_j^{(2)} + \Psi_{j\alpha}^{(3)} + \Psi_{j\alpha}^{(4)} + \\ &+ \Psi_{j\alpha}^{(5)} + \Psi_{j\alpha}^{(6)} + \Psi_{j\alpha}^{(7)} + \Psi_{jt}^{(8)} + \Psi_{j\alpha}^{(10)}\}_2^1\big|_t^l \\ &\Psi_j^{(1)} = -\frac{ik_t k^2}{c_t{}^2 \alpha_j{}^2} F\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{7}{2}; z_j\right) \\ &\Psi_j^{(2)} = \frac{k^2}{c_t{}^2 \alpha_j} F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}; z_j\right) \\ &\Psi_{j\alpha}^{(3)} = -\frac{2k^4}{21\omega^2\alpha_j} F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{11}{2}; z_j\right) \\ &\Psi_{j\alpha}^{(4)} = -\frac{2k_\alpha{}^4}{\omega^2\alpha_j} F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}; z_j\right) \end{aligned}$$

$$\Psi'^{(5)}_{j\alpha} = \frac{2ik_\alpha k^4}{21\omega^2\alpha_j^3} F\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{11}{2}; z_j\right)$$

$$\Psi'^{(6)}_{j\alpha} = \frac{4k_\alpha{}^2 k^2}{7\omega^2\alpha_j} F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}; z_j\right)$$

$$\Psi'^{(7)}_{j\alpha} = -\frac{4ik_\alpha{}^3 k^2}{7\omega^2\alpha_j^2} F\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{9}{2}; z_j\right)$$

$$\Psi'^{(8)}_{j\alpha} = -\frac{5k_\alpha}{c_\alpha{}^2\alpha_j} F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}; z_j\right)$$

$$\Psi'^{(9)}_{j} = \frac{15ik_l{}^4}{4k\omega^2} \ln\frac{\alpha_j + ik}{\alpha_j - ik}$$

$$\Psi'^{(10)}_{j\alpha} = \frac{4k_\alpha{}^2 k^4}{63\omega^2\alpha_j^3} F\left(2, \frac{3}{2}, \frac{11}{2}; z_j\right)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \mp i\delta_\beta}{a}, \quad \delta_\beta = 1 - ak_\beta \quad (\beta = l, t)$$

$$\{f_j\}_2^1 = f_1 - f_2, \quad \{f_\alpha\}\big|_t^l = f_l - f_t$$

$$A = -\frac{\pi R(0)a}{2i\rho_0}, \quad a|\theta_\beta| < 1, \quad \theta_\beta = -\operatorname{Im} k_\beta$$

Подставляя L^* в уравнения (1.16) и разрешая их относительно P, получим

$$P_{kn} = P_{kn}{}^{(l)} + P_{kn}{}^{(t)}, \; P_{kn}{}^{(l)} = P^{(l)}_{q_k q_n}, \; P_{kn}{}^{(t)} = P^{(t)}(\delta_{kn} - q_k q_n) \tag{2.8}$$
$$P^{(l)} = -[(L_1{}^* + 2L_2{}^*)k^2 - \rho_0\omega^2]^{-1}, \quad P^{(t)} = -[L_2{}^* k^2 - \rho_0\omega^2]$$

Из формул (2.7) следует, что $D_i{}^*(\omega, k)$, $L_i{}^*(\omega, k)$ — функции k^2

$$D^*_{(\alpha)} = A\sum_{n=0}^{n} d_n^{(\alpha)} k^{2n} \quad (\alpha = 0, 1, 2) \tag{2.9}$$
$$D^*_{(0)} = D^*, \quad D^*_{(2)} = D_2{}^*, \quad D^*_{(1)} = D_1{}^*,$$
$$L^*_{(\alpha)} = \lambda_0^{(\alpha)} + Aa_0^{(\alpha)-1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\alpha)} k^{2n}$$
$$L_0{}^* = L^*, \quad L^*_{(1)} = L_1{}^* + 2L_2{}^*$$
$$a_0^{(\alpha)} = 1 - AT^{(\alpha)} d_0^{(\alpha)}, \quad a_n^{(\alpha)} = -AT^{(\alpha)} d_n^{(\alpha)} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$
$$c_n^{(\alpha)} = d_n^{(\alpha)} - a_0^{(\alpha)-1}\sum_{k=0}^{n} a_k^{(\alpha)} c_{n-k}^{(\alpha)}, \quad a_0^{(l)} = 3a_0^{(0)} a_0^{(t)}$$

Подставляя (2.9) в (2.8), можем записать

$$P^{(\beta)}(k, \omega) = -[\varkappa_\beta(k^2) - \rho_0\omega^2]^{-1} = -2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n^{(\beta)}}{\varkappa_\beta{}'(k_n^{(\beta)})(k^2 - k_n^{(\beta)2})} \tag{2.10}$$
$$\varkappa_\beta(k^2) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n^{(\beta)} k^{2n}, \quad s_1^{(\beta)} = \lambda_0^{(\beta)} + As_0^{(\beta)} a_0^{(\beta)-1}$$
$$s_n^{(\beta)} = As_{n-1}^{(\beta)} a_0^{(\beta)-1}, \quad \lambda_0^{(t)} = \mu_0, \quad \lambda_0^{(l)} = \lambda_0 + 2\mu_0$$

Выполняя обратное преобразование Фурье в соотношениях (2.8) с учетом (2.10), получим

$$
(2.11)\qquad \langle G_{ij}\rangle = -\frac{\delta_{ij}}{4\pi\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n^{(t)}}{\varkappa_t'(k_n^{(t)})}\exp(ik_n^{(t)}\rho) +
$$

$$
+\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left\{\frac{1}{4\pi\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n^{(\alpha)}}{\varkappa_\alpha'(k_n^{(\alpha)})}\exp(ik_n^{(\alpha)}\rho)_t^l\right)\right\}
$$

3. Рассмотрим вычисление $\langle G_{ij}\rangle$ приближенно при $n = 0, 1$. При $n = 0$ с учетом (2.10) имеем

$$
(3.1)\qquad k_0^{(\alpha)} = k_\alpha(1 + Ac_0^{(\alpha)}a_0^{(\alpha)-1}),\quad k_\alpha = \frac{\omega}{c_\alpha},\quad c_\alpha = \frac{\lambda_0^{(\alpha)}}{\rho_0}
$$

В зависимости от длин рассматриваемых волн из (3.1) получим следующие асимптотические формулы:

длинные волны

$$
ak_\alpha \ll 1\ (\omega\tau_\alpha \ll 1,\ \tau_\alpha = ac_\alpha^{-1})
$$

$k_0^{(\alpha)} = k_\alpha$ — получаем однородную среду с упругими коэффициентами λ_0, μ_0;

волны порядка размера неоднородности

$$
ak_\alpha \approx 1\ (\omega\tau_\alpha \approx 1),\quad |\delta_\alpha| \ll 1,\quad \delta_\alpha = 1 - \omega\tau_\alpha\quad (\alpha = l, t)
$$

$$
k_0^{(\alpha)} = k_\alpha\left(1 + \frac{\eta_0^{(\alpha)}}{\lambda_0^{(\alpha)}}\right)^{-1/2},\quad \eta_0^{(t)} = 2N\left(\frac{\delta_l}{c_l^2} + \frac{\delta_t}{c_t^2}\right)
$$

$$
\eta_0^{(l)} = N\left(\frac{27\delta_l}{c_l} + \frac{28\delta_t}{c_t}\right),\quad N = \frac{\pi R(0)}{15\rho_0}
$$

короткие волны

$$
ak_\alpha \gg 1\quad (\omega\tau_\alpha \gg 1)
$$

$$
k_0^{(\alpha)} = ik_\alpha(\lambda_0^{(\alpha)}T^{(\alpha)})^{1/2}(1 - \lambda_0^{(\alpha)}T^{(\alpha)})^{-1}
$$

С учетом формул (2.11), (2.12) имеем при $n = 0$

$$
(3.2)\qquad \langle G_{(\rho)}{}^{(\alpha)}\rangle = -T^{(\alpha)}[4\pi\rho(\lambda_0^{(\alpha)}T^{(\alpha)} - 1)]^{-1}\exp(ik_0^{(\alpha)}\rho]
$$

где $\langle G_{(\rho)}{}^{(\alpha)}\rangle$ — оригинал $P^{(\alpha)}(\omega, k)$. При $n = 1$ с учетом (2.10) имеем

$$
(3.3)\qquad k_0^{(\alpha)2} = 2\rho_0\omega^2[S_0^{(\alpha)} + S_1^{(\alpha)}]^{-1},\quad k_1^{(\alpha)2} = -\frac{Ac_1^{(\alpha)}}{2a_0^{(\alpha)}}[S_0^{(\alpha)} + S_1^{(\alpha)}]
$$

$$
S_0^{(\alpha)} = \lambda_0^{(\alpha)} + Ac_0^{(\alpha)}a_0^{(\alpha)-1},\quad S_1^{(\alpha)} = (S_0^{(\alpha)2} + 4\rho_0\omega^2 Ac_1^{(\alpha)}a^{(\alpha)-1})^{1/2}
$$

Исследование асимптотики формул (3.3) по величине длин волн (частот) сводится к нахождению соответствующих выражений для $c_0^{(\alpha)}$, $c_1^{(\alpha)}$ $k_0^{(\alpha)}$, $k_1^{(\alpha)}$. Имеем:

длинные волны

$$
(3.4)\qquad k_0^{(\alpha)} = k_\alpha\left(1 + i\frac{\rho_0 a\omega^3}{2\lambda_0^{(\alpha)2}}\theta_{(1)2}^{(\alpha)}\right)
$$

$$
k_1^{(\alpha)} = {}^1/_2\left(\frac{\lambda_0^{(\alpha)}}{\theta_{(1)1}^{(\alpha)3}}\right)^{1/2}(a\omega\theta_{(1)2}^{(\alpha)} + 2i\theta_{(1)1}^{(\alpha)})
$$

$$\theta_{(1)1}^{(l)} = -\frac{2Na^2}{21}\left(\frac{31}{c_l^2}+\frac{3}{c_t^2}\right),\quad \theta_{(1)2}^{(l)} = -\frac{2Na^2}{7}\left(\frac{13}{c_l^3}+\frac{1}{c_t^3}\right)$$

$$\theta_{(1)1}^{(t)} = -\frac{Na^2}{7}\left(\frac{4}{c_l^2}+\frac{3}{c_t^2}\right),\quad \theta_{(1)2}^{(t)} = \frac{2Na^2}{7}\left(\frac{4}{c_l^3}+\frac{3}{c_t^3}\right)$$

$$\langle G_{(\rho)}^{(\alpha)}\rangle = -\frac{1}{4\pi\rho}[(\lambda_0^{(\alpha)}+2ia\omega^3c_\alpha^{-2}\theta_{(1)2}^{(\alpha)})^{-1}\exp(ik_0^{(\alpha)}\rho) -$$
$$-(\lambda_0^{(\alpha)})^{-1}\exp(ik_1^{(\alpha)}\rho)]$$

волны порядка размера неоднородности

$$k_0^{(\alpha)} = k_\alpha[1-(2\lambda_0^{(\alpha)})^{-1}(\eta_0^{(\alpha)}+\eta_{(1)2}^{(\alpha)}a^{-2})] \tag{3.5}$$

$$k_1^{(\alpha)} = \left(\frac{\lambda_0^{(\alpha)}}{2}\right)^{1/2}(-\eta_{(1)1}^{(\alpha)}+i\eta_{(1)}^{(\alpha)2})(\eta^{(\alpha)}\eta_1^{(\alpha)})^{-1}$$

$$\eta^{(\alpha)} = (\eta_{(1)1}^{(\alpha)2}+\eta_{(1)2}^{(\alpha)2}),\quad \eta_1^{(\alpha)} = (\eta^{(\alpha)}-\eta_{(1)2}^{(\alpha)})^{1/2},\ \eta_0^{(\alpha)} = Ac_0^{(\alpha)}$$

$$\eta_{(1)1}^{(t)} = -\frac{4Na^2}{7}\left(\frac{5\delta_l}{c_l^2}+\frac{9\delta_t}{c_t^2}\right),\quad \eta_{(1)2}^{(t)} = \frac{4Na^2}{7}\left(\frac{4\delta_l}{c_l^2}+\frac{3\delta_t}{c_t^2}\right)$$

$$\eta_{(1)1}^{(l)} = -\frac{Na^2}{21}\left(\frac{831\delta_l}{c_l^2}+\frac{156\delta_t}{c_t^2}\right),\quad \eta_{(1)2}^{(l)} = \frac{8Na^2}{7}\left(\frac{13\delta_l}{c_l^2}+\frac{\delta_t}{c_t^2}\right)$$

$$\langle G_{(\rho)}^{(\alpha)}\rangle = -\frac{1}{4\pi\rho}[(\lambda_0^{(\alpha)}+2ik_\alpha\eta_{(1)2}^{(\alpha)})^{-1}\exp(ik_0^{(\alpha)}\rho) -$$
$$-(\lambda_0^{(\alpha)})^{-1}\exp(ik_1^{(\alpha)}\rho)]$$

короткие волны

$$k_0^{(\alpha)} = ik_\alpha(\lambda^{(\alpha)}T^{(\alpha)})^{1/2}(1-\lambda_0^{(\alpha)}T^{(\alpha)})^{-1} \tag{3.6}$$
$$c_1^{(\alpha)} = c_2^{(\alpha)} = \ldots = 0,\quad (T^{(l)})^{-1} = T^{-1}+{}^4/_3(T^{(t)})^{-1}$$
$$\langle G_{(\rho)}^{(\alpha)}\rangle = T^{(\alpha)}[4\pi\rho(1-\lambda_0^{(\alpha)}T^{(\alpha)})]^{-1}\exp(ik_0^{(\alpha)}\rho)$$

Из формул (2.12) с учетом (3.1) — (3.6) следует, что за счет неоднородности в выражении средней функции появляются экспоненциально затухающие члены. Для коротких волн имеем только чисто затухающие члены. При использовании точных операторных соотношений дисперсионные уравнения в области коротких волн $ak_\alpha \gg 1$ — некорректны [10], и исследование полей требует привлечения лучевых методов [3]. Отметим, что в случаях длинных и коротких волн ряды (2.10) обрываются, для случая $ak_\alpha \approx 1$ все члены рядов пропорциональны δ_α, поэтому в выражении (3.5) выписаны лишь первые два члена. В формуле (3.4) для $k_0^{(\alpha)}$ пренебрегаем в действительной части членом, пропорциональным $(ak_\alpha)^2$. При отборе корней (3.3) исходим из условия: $k_0^{(\alpha)}$ стремится к k_α при переходе к однородной среде ($R_{(0)} \to 0$). Тогда первый член в выражении для $\langle G_{(\rho)}^{(\alpha)}\rangle$ переходит в функцию Грина однородной среды, а второй член обращается в нуль. Если взять два других корня, то в этом случае $k_1^{(\alpha} \to \to k_\alpha$ при $R(0) \to 0$. Первый член в $\langle G_{(\rho)}^{(\alpha)}\rangle$ обращается в нуль, а второй — в функцию Грина однородной среды.

Корреляционная функция (2.3) представляет произведение функций: $R_1(\rho) = R_1(0)\exp(-\tau)$ характеризует полностью разупорядоченные структуры [11]; $R_2(\rho) = R_2(0)\tau^{-1}\sin\tau$ определяет марковское поле коэффициентов $\gamma(x)$ [12,13].

Функция (2.3) за счет наличия отрицательной корреляции описывает поля $\gamma(x)$, которые на масштабе длины порядка $2\pi a$ меняются довольно резко (принимают достаточно часто значения разных знаков). Корреляционная зависимость типа (2.3) отмечается в экспериментах [14]. Рассмотренный способ вычисления тензора Грина пригоден для любой экспоненциально-тригонометрической корреляционной функции, которую можно представить в виде экспоненты.

В частности, для $R_1'(\rho) = R(0) \exp(-\tau)$ выражения (2.7) упрощаются следующим образом: 1) вместо $\alpha_j (j = 1,2)$ пишем $\alpha_2 = a^{-1}(1 - iak_\beta)$, 2) разности по j нет, $\{f_j\}_2^1 = f_2$, 3) $A = -\pi R(0)(2\rho_0)^{-1}$. Соответствующие изменения осуществляются в (3.1) — (3.4), причем качественный характер зависимости $k^{(\alpha)}$ от ω не изменится. Формул (3.5) не будет, так как в этом случае в соотношениях (2.10) нет малого параметра $\delta_\alpha = 1 - ak_\alpha$.

Поступила 2 VIII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963.
2. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. Изд-во МГУ, 1976.
3. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.
4. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
5. *Эллиот Р., Крамханcл Дж., Лис П.* Теория и свойства случайно неупорядоченных кристаллов и связанных с ними физических систем. В сб.: Теория и свойства неупорядоченных материалов. М., «Мир», 1977.
6. *Болотин В. В.* Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1971.
7. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М., «Наука», 1977.
8. *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М., «Наука», 1970.
9. *Чигарев А. В.* К расчету макроскопических коэффициентов стохастически неоднородных упругих сред. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
10. *Кунин И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой. М., «Наука», 1975.
11. *Усов А. А., Шермергор Т. Д.* Дисперсия скорости и рассеяние продольных ультразвуковых волн в композиционных материалах. ПМТФ, 1978, № 3.
12. *Ядренко М. И.* Изотропные случайные поля марковского типа. В сб.: Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 5. Изд-во Киевск. ун-та, 1971.
13. *Подболотов Б. Н., Поленов В. С., Чигарев А. В.* Динамическое деформирование квазиизотропных композитных сред. ПММ, 1976, т. 40, вып. 4.
14. *Волков С. Д., Ставров В. П.* Статистическая механика композитных материалов. Минск, Изд-во Белорусск. ун-та, 1978.