

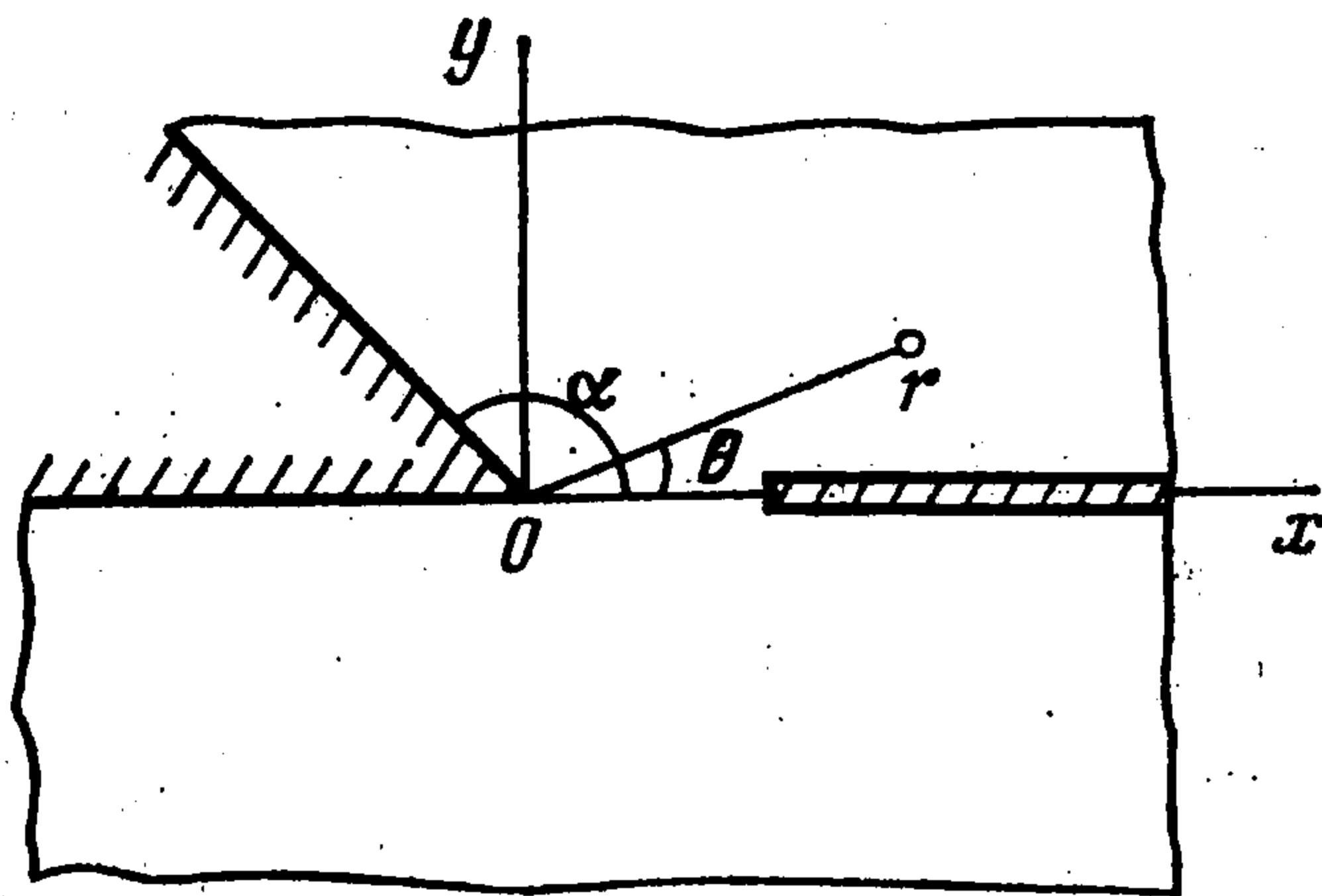
ТРЕЩИНА НА ПРОДОЛЖЕНИИ ГРАНИ ОБЪЕМЛЮЩЕГО ПОЛУПРОСТРАНСТВО КЛИНА

Л. А. Кипнис

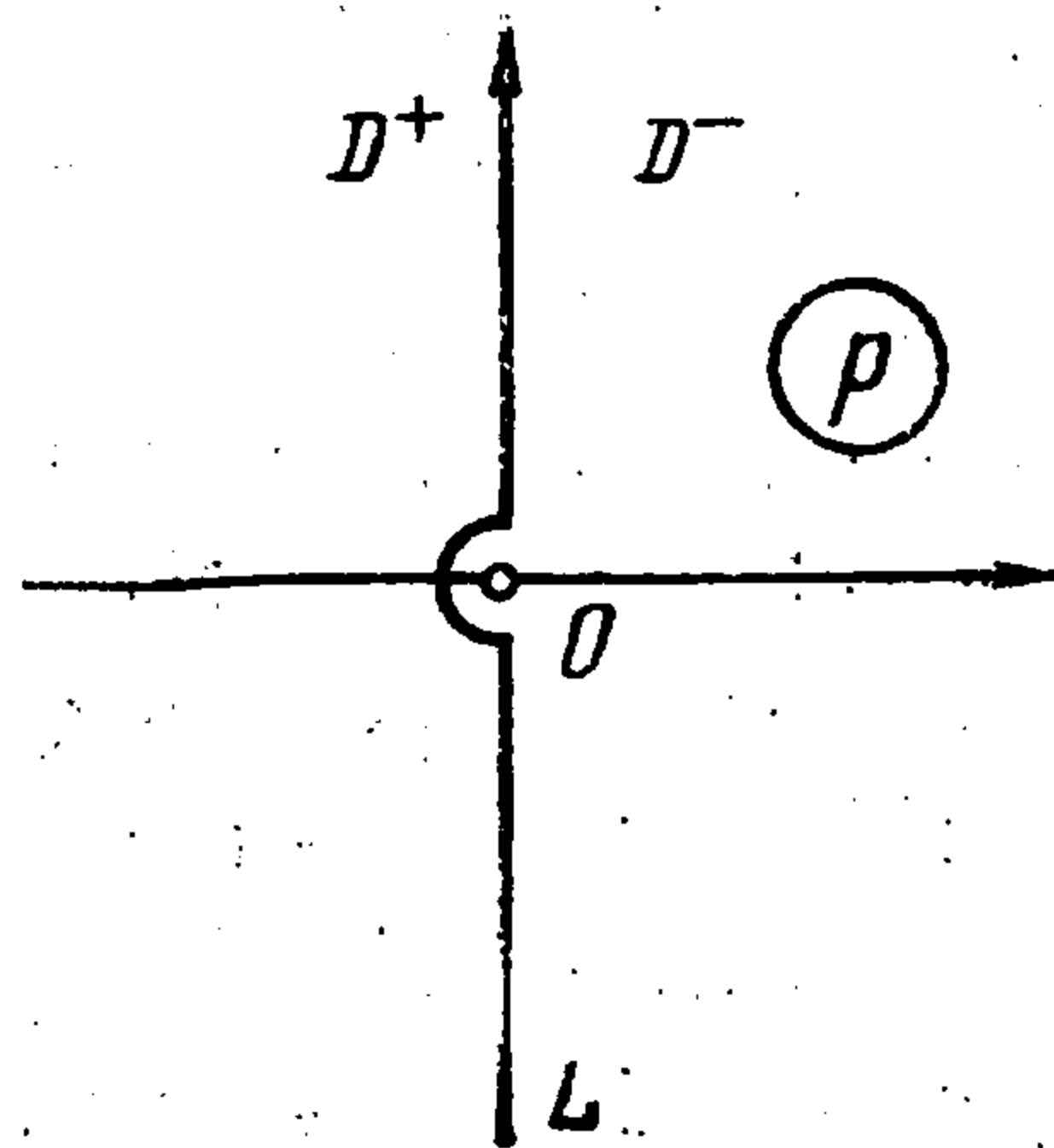
(Москва)

В рамках плоской задачи теории упругости рассматривается равновесие бесконечного клина, объемлющего полупространство и содержащего на продолжении одной из граней внутреннюю полубесконечную трещину. Грани клина и берега трещины свободны от напряжений. На бесконечности напряжения стремятся к нулю, но их главный вектор и главный момент отличны от нуля и заданы по условию. Строится точное решение однородного векторного уравнения Винера — Хопфа данной задачи, вычисляются коэффициенты интенсивности напряжений у края трещины и приводятся асимптотики для напряжений вблизи ребра клина.

1. Постановка задачи. Пусть бесконечный упругий клин с углом раствора, большим π , содержит трещину при $y = 0, x > 1$ (фиг. 1). Грани клина и берега трещины свободны от напряжений. На бесконечности напряжения стремятся к нулю, но их главный вектор и главный момент отличны



Фиг. 1



Фиг. 2

от нуля и равны соответственно (X, Y) и M . Следовательно, перешеек $y = 0, 0 < x < 1$ между клином $0 < \theta < \alpha$ и полупространством $-\pi < \theta < 0$ передает заданную силу и заданный момент

$$\int_0^1 \sigma_\theta(r, 0) dr = Y, \quad \int_0^1 \tau_{r\theta}(r, 0) dr = X$$

$$\int_0^1 \sigma_\theta(r, 0) r dr = M$$

Запишем граничные условия и условия в особых точках рассматриваемой однородной сингулярной задачи теории упругости

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \theta = \alpha, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (0 < \alpha < \pi) \\ \theta = -\pi, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \\ \theta = 0, \quad [\sigma_\theta] = [\tau_{r\theta}] = 0 \\ \theta = 0, \quad r > 1, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \\ \theta = 0, \quad r < 1, \quad [u_\theta] = [u_r] = 0 \end{aligned}$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} \right] \Big|_{\theta=0} &\sim \frac{2(1-\nu^2)}{E} \times \\ &\times \frac{\pi \sin^2 \alpha X - [\alpha(\pi + \alpha) + \sin \alpha(\pi \cos \alpha - \sin \alpha)] Y}{\pi(\alpha^2 - \sin^2 \alpha)} \times \\ &\times \frac{1}{r^2} \mp \frac{4(1-\nu^2)}{E} \frac{(\pi + \alpha) \cos \alpha - \sin \alpha}{\pi(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)} \frac{M}{r^3} \quad (r \rightarrow \infty) \\ \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right] \Big|_{\theta=0} &\sim \frac{2(1-\nu^2)}{E} \times \\ &\times \frac{[\sin \alpha(\pi \cos \alpha + \sin \alpha) - \alpha(\pi + \alpha)] X + \pi \sin^2 \alpha Y}{\pi(\alpha^2 - \sin^2 \alpha)} \times \\ &\times \frac{1}{r^2} - \frac{4(1-\nu^2)}{E} \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha} \frac{M}{r^3} \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} \right] \Big|_{\theta=0} &\sim - \frac{2(1-\nu^2)}{E} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}(r-1)^{3/2}} \quad (r \rightarrow 1+0) \\ \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right] \Big|_{\theta=0} &\sim - \frac{2(1-\nu^2)}{E} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}(r-1)^{3/2}} \\ \sigma_\theta(r, 0) &\sim \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}(1-r)}, \quad \tau_{r\theta}(r, 0) \sim \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}(1-r)} \quad (r \rightarrow 1-0) \\ \sigma_\theta(r, 0) &\sim \frac{A_1(\alpha)}{r^{1-\lambda_1}}, \quad \tau_{r\theta}(r, 0) \sim \frac{A_2(\alpha)}{r^{1-\lambda_1}} \quad (r \rightarrow 0, 0 < \alpha \leq 2\alpha_* - \pi) \end{aligned}$$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \sigma_\theta(r, 0) &\sim \frac{A_1(\alpha)}{r^{1-\lambda_1}} + \frac{B_1(\alpha)}{r^{1-\lambda_2}} \\ \tau_{r\theta}(r, 0) &\sim \frac{A_2(\alpha)}{r^{1-\lambda_1}} + \frac{B_2(\alpha)}{r^{1-\lambda_2}} \quad (r \rightarrow 0, 2\alpha_* - \pi < \alpha < \pi) \end{aligned}$$

Здесь σ_θ , $\tau_{r\theta}$, σ_r — напряжения; u_θ , u_r — смещения; $[N]$ — скачок величины N ; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; K_I , K_{II} — коэффициенты интенсивности напряжений у края трещины; $\lambda_j(\alpha)$ ($\beta_j < \alpha < \pi$; $j = 1, 2$) — единственный корень уравнения $\sin p(\pi + \alpha) - (-1)^j p \sin(\pi + \alpha) = 0$ (p — комплексное число) в полосе $0 < \operatorname{Re} p < 1$ ($1/2 < \lambda_j < 1$); $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2\alpha_* - \pi$; α_* — единственный корень уравнения

$$2\kappa \cos 2\kappa - \sin 2\kappa = 0 \quad (\pi/2 < \kappa < \pi)$$

$A_j(\alpha)$, $B_j(\alpha)$ — неизвестные величины; $2\alpha_* \approx 257^\circ$.

Условия (1.2) — (1.4) сформулированы при помощи общих предложений о сингулярных задачах теории упругости (см. [1], стр. 51—63).

2. Решение векторного уравнения Винера — Хопфа. Применение интегрального преобразования Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, соотношениям закона Гука и к условиям (1.1) приводит к следующему однородному двумерному векторному функциональному уравнению Винера — Хопфа:

$$(2.1) \quad \varphi^+(p) = (p+1) \operatorname{ctg} p\pi G(p) \varphi^-(p) \quad (\lambda_1 - \operatorname{Re} p < 0)$$

$$\begin{aligned}
G(p) &= \begin{vmatrix} b(p) + c(p)l & c(p)m(p) \\ c(p)n(p) & b(p) - c(p)l \end{vmatrix} \\
b(p) &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\sin p\pi \sin p\alpha \cos p\alpha}{\cos p\pi (p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha)} - 1 \right] \\
c(p) &= -\frac{p \sin p\pi \sin \alpha}{2 \cos p\pi (p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha)} \\
m(p) &= (p-1) \sin \alpha, \quad n(p) = -(p+1) \sin \alpha, \quad l = \cos \alpha \\
f(p) &= l^2 + mn = 1 - p^2 \sin^2 \alpha \\
\varphi^+(p) &= (\Phi_1^+(p), \Phi_2^+(p)), \quad \varphi^-(p) = (\Phi_1^-(p), \Phi_2^-(p)) \\
\Phi_1^+(p) &= \frac{E}{4(1-\nu^2)} \int_1^\infty \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} \right] \Big|_{\theta=0} r^{p+1} dr, \quad \Phi_2^+(p) = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \times \\
&\times \int_1^\infty \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right] \Big|_{\theta=0} r^{p+1} dr, \quad \Phi_1^-(p) = \int_0^1 \sigma_\theta(r, 0) r^p dr \\
\Phi_2^-(p) &= \int_0^1 \tau_{r\theta}(r, 0) r^p dr
\end{aligned}$$

Вектор-функция $\varphi^-(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -\lambda_1$, а вектор-функция $\varphi^+(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, причем

$$(2.2) \quad \Phi_2^+(-1) = 0$$

В плоскости комплексной переменной p рассмотрим контур L , состоящий из мнимой оси, за исключением малого симметричного отрезка около начала координат, и левой полуокружности малого радиуса с центром в начале координат (фиг. 2). Области слева и справа от контура обозначим через D^+ и D^- .

Можно показать, что матрица $G(p)$ удовлетворяет условиям (сформулированным в работе [2]), достаточным для ее представления на контуре L в виде

$$\begin{aligned}
(2.3) \quad G(p) &= X^+(p)[X^-(p)]^{-1} \quad (p \in L) \\
X(p) &= \begin{cases} X^+(p), & p \in D^+ \\ X^-(p), & p \in D^- \end{cases} \\
X(p) &= F(p)[I \operatorname{ch}(\sqrt{f}\beta) + U(p)\operatorname{sh}(\sqrt{f}\beta)] \\
F(p) &= \exp \left[\frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{\ln \Delta(t)}{t-p} dt \right], \quad \beta(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varepsilon(t) dt}{\sqrt{f(t)}(t-p)} \\
\Delta(p) &= \lambda_1(p)\lambda_2(p), \quad \varepsilon(p) = \frac{1}{2} \ln [\lambda_1(p) / \lambda_2(p)] \\
U(p) &= [f(p)]^{-1/2} \begin{vmatrix} l & m(p) \\ n(p) & -l \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

($\lambda_1(p)$, $\lambda_2(p)$ — собственные числа матрицы $G(p)$, I — единичная матрица).

Из (2.3) находим

$$\begin{aligned}
(2.4) \quad X(p) &\rightarrow Q, \quad p \rightarrow \infty \\
Q &= \begin{vmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{vmatrix}, \quad q = \frac{\sin \alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varepsilon(it) dt}{\sqrt{1+t^2 \sin^2 \alpha}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X^-(0)]^{-1} &= \\
&= (2aA)^{-1} \begin{vmatrix} a^2 + 1 - (a^2 - 1) \cos \alpha & (a^2 - 1) \sin \alpha \\ (a^2 - 1) \sin \alpha & a^2 + 1 + (a^2 - 1) \cos \alpha \end{vmatrix} \\
a &= \left[\frac{(\alpha - \sin \alpha)(\pi + \alpha + \sin \alpha)}{(\alpha + \sin \alpha)(\pi + \alpha - \sin \alpha)} \right]^{1/4}, \quad A = \left[\frac{4(\alpha^2 - \sin^2 \alpha)}{(\pi + \alpha)^2 - \sin^2 \alpha} \right]^{1/4} \\
[X^-(1)]^{-1} &= F^{-1} \begin{vmatrix} \operatorname{ch} s - \operatorname{sh} s & 0 \\ 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sh} s & \operatorname{ch} s + \operatorname{sh} s \end{vmatrix} \\
s &= -\frac{\cos \alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{e(it) dt}{(t^2 + 1) \sqrt{1 + t^2 \sin^2 \alpha}}, \\
F &= \exp \left[-\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\ln \Delta(it) dt}{t^2 + 1} \right]
\end{aligned}$$

Учитывая факторизацию (2.3) и известное представление [3]

$$p \operatorname{ctg} p\pi = K^+(p) K^-(p), \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)}$$

($\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера), уравнение (2.1) перепишем так:

$$(2.5) \quad p [K^+(p)]^{-1} [X^+(p)]^{-1} \varphi^+(p) = (p+1) K^-(p) [X^-(p)]^{-1} \varphi^-(p) \quad (p \in L)$$

Векторная функция в левой части (2.5) аналитична в области D^+ , а векторная функция в правой его части — в области D^- . Таким образом, они равны одной и той же векторной функции, аналитической во всей плоскости p .

Найдем эту единую аналитическую функцию. При помощи (1.3) при $p \rightarrow \infty$ получаем [3]

$$(2.6) \quad \varphi^+(p) \sim (-p/2)^{1/2} v, \quad \varphi^-(p) \sim (2p)^{-1/2} v, \quad v = \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix}$$

Из (2.6), (2.4) и свойств функций $K^\pm(p)$ следует, что левая и правая части (2.5) ведут себя как $2^{-1/2} Q^{-1} v p$ при $p \rightarrow \infty$. Следовательно, единая аналитическая функция равна $c_0 + c_1 p$, где c_0, c_1 — векторы, подлежащие определению.

По условию задачи (ρ — неизвестная величина)

$$(2.7) \quad \varphi^-(0) = \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} = \chi, \quad \varphi^-(1) = \begin{bmatrix} M \\ \rho \end{bmatrix} = \mu \quad \left(\rho = \int_0^1 \tau_{r\theta}(r, 0) r dr \right)$$

Используя (2.7), при помощи (2.5) находим

$$(2.8) \quad c_0 = \pi^{-1/2} [X^-(0)]^{-1} \chi, \quad c_1 = 4\pi^{-1/2} [X^-(1)]^{-1} \mu - c_0$$

Решение функционального уравнения (2.1) запишется так:

$$(2.9) \quad \varphi^-(p) = (p+1)^{-1} [K^+(p)]^{-1} X^-(p) (c_0 + c_1 p) \quad (p \in D^-)$$

$$(2.10) \quad \varphi^+(p) = p^{-1} K^+(p) X^+(p) (c_0 + c_1 p) \quad (p \in D^+)$$

Неизвестную величину ρ определим из условия (2.2) при помощи (2.10)

$$(2.11) \quad \rho = F [4(\operatorname{ch} s + \operatorname{sh} s)]^{-1} \left\{ (aA)^{-1} \left[(a^2 - 1) \sin \alpha Y + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \left(a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) X \right] - 8F^{-1} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sh} s M \right\}$$

3. Коэффициенты интенсивности напряжения у края трещины. Асимптотики для напряжений вблизи ребра клина. Из (2.9) следует, что

$$(3.1) \quad \varphi^-(p) \sim Qc_1 p^{-1/2} \quad (p \rightarrow \infty)$$

Согласно (3.1) и (2.6), получаем формулу для коэффициентов интенсивности напряжений

$$v = (2/\pi)^{1/2} Q \{4 [X^-(1)]^{-1} \mu - [X^-(0)]^{-1} \chi\}$$

где матрицы Q , $[X^-(0)]^{-1}$, $[X^-(1)]^{-1}$ определяются формулами (2.4), а величина ρ — формулой (2.11).

При $\alpha = \pi$ приходим к известному результату [4, 5].

Изучим поведение напряжений $\sigma_\theta(r, 0)$ и $\tau_{r\theta}(r, 0)$ при $r \rightarrow 0$.

Для $p \in D^+$, $\operatorname{Re} p > -\lambda_1$ аналитическая функция $\varphi^-(p)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \varphi^-(p) &= (p+1)^{-1} [K^-(p)]^{-1} G^{-1}(p) X^+(p) (c_0 + c_1 p) \\ G^{-1}(p) &= \frac{2 \cos p\pi}{\sin^2 p(\pi + \alpha) - p^2 \sin^2 \alpha} \begin{vmatrix} -h_1(p) & -i_1(p) \\ i_2(p) & h_2(p) \end{vmatrix} \\ h_{1,2}(p) &= p \sin \alpha (\sin p\pi \cos \alpha \pm p \sin \alpha \cos p\pi) \mp \\ &\mp \sin p\alpha \sin p(\pi + \alpha) \\ i_{1,2}(p) &= p(p \mp 1) \sin p\pi \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Применяя формулу обращения, получаем (γ — прямая, параллельная мнимой оси и лежащая в полосе $-\lambda_1 < \operatorname{Re} p < 0$)

$$(3.2) \quad \begin{bmatrix} \sigma_\theta(r, 0) \\ \tau_{r\theta}(r, 0) \end{bmatrix} = (2\pi r i)^{+1} \int_{\gamma} (p+1)^{-1} [K^-(p)]^{-1} G^{-1}(p) \times \\ \times X^+(p) (c_0 + c_1 p) r^{-p} dp$$

При помощи теоремы о вычетах из (3.2) получаем асимптотику ($r \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_\theta(r, 0) \\ \tau_{r\theta}(r, 0) \end{bmatrix} &\sim \sum_{j=1}^2 \frac{2\Gamma(1/2 - \lambda_j) \cos \lambda_j \pi}{\Gamma(2 - \lambda_j)} [\sin \lambda_j(\pi + \alpha) - \\ &- (-1)^j \lambda_j \sin \alpha]^{-1} [(\pi \mp \alpha) \cos \lambda_j(\pi + \alpha) + (-1)^j \sin \alpha]^{-1} \times \\ &\times H_j X^+(-\lambda_j) (c_0 - \lambda_j c_1) r^{\lambda_j - 1} \\ H_j &= \begin{vmatrix} h_1(\lambda_j) & -i_2(\lambda_j) \\ i_1(\lambda_j) & -h_2(\lambda_j) \end{vmatrix} \quad (2\alpha_* - \pi < \alpha < \pi) \end{aligned}$$

Если $0 < \alpha \leq 2\alpha_* - \pi$, то слагаемого, соответствующего $j = 2$, не будет.

Автор благодарит Г. П. Черепанова за внимание к работе.

Поступила 25 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
2. Храпов А. А. Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
3. Нобл Б. Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
4. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
5. Парис П., Си Дж. Анализ напряженного состояния около трещин. В сб.: Прикладные вопросы вязкости разрушения. М., «Мир», 1968.