Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.383

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ О ВЫНУЖДЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ БАЛОК НА УПРУГОЙ ПОЛОСЕ, ПОЛУПОЛОСЕ И ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Е. Ю. Батенькова, А. С. Зильберглейт, Б. М. Нуллер

(Ленинград)

Рассматриваются динамические задачи теории упругости для полосы, полуполосы и прямоугольника, частично подкрепленных балками постоянной жесткости. Изучаются вопросы распространения волн, переноса энергии, концентрации напряжений под концами балок. Обсуждается возможность обобщения полученных решений на другие классы смешанных задач.

Решение неоднородной задачи о стационарных колебаниях полубесконечной балки на полосе и система кусочно-однородных решений этой задачи построены в квадратурах. Аналогичные задачи для полуполосы и прямоугольника, в частности периодические задачи и задача динамики одной конечной балки на полосе, сведены при помощи новых соотношений обобщенной ортогональности с нагрузкой к нормальным системам Пуанкаре — Коха, матричные элементы которых убывают экспоненциально по номерам строк и столбцов.

Ранее метод кусочно-однородных решений применялся только к задачам эластостатики [1–9], другими методами рассматриваемые задачи, видимо, тоже не решались.

1. Пусть полубесконечная балка $x \geqslant 0$, $y = 1$ с постоянными жесткостью D и погонной массой μ лежит на упругой полосе $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Между балкой и полосой трение отсутствует, основание полосы находится в скользящей заделке. Стационарные нормальные нагрузки на свободную часть полосы и балку, а также момент и перерезывающая сила в точке $x = 0$, $y = 1$ действуют синфазно и соответственно равны $f_1(x) \cos \omega t$, $f_2(x) \cos \omega t$, $P_2 \cos \omega t$, $P_3 \cos \omega t$, где t — время, ω — частота вынужденных колебаний. Нагрузки $f_1(x)$, $f_2(x)$ являются местными либо экспоненциально убывают при $|x| \to \infty$, при $t = 0$ момент P_2 направлен по часовой стрелке, сила P_3 — по оси y. Условия на бесконечности соответствуют принципу Мандельштама: осредненный по сечению полосы и периоду $T = 2\pi\omega^{-1}$ поток энергии каждой распространяющейся волны при $x \to \pm\infty$ направлен в сторону $\pm\infty$ [10]. Локальная энергия деформаций полосы в окрестности точки $x = 0$, $y = 1$ ограничена.

Решение краевой задачи для полосы $\mathbf{u}_* = Re\,[\mathbf{u}(x, y)\, e^{i\omega t}]$ будем искать в форме Папковича — Нейбера [11]

$$2G\mathbf{u} = 4(1-\nu)\Phi - \operatorname{grad} F, \quad \Phi \equiv (\Phi_1, \Phi_2), \quad \Phi_1 \equiv 0 \tag{1.1}$$

$$F = \Phi_0 + x\,\Phi_1 + y\Phi_2, \quad \Delta\Phi_0 + k_1^2\Phi_0 = (k_2^2 - k_1^2)\,y\,\Phi_2$$
$$\Delta\Phi_2 + k_2^2\Phi_2 = 0, \quad k_1^2 = k_2^2\,(1 - 2\nu)\,(2 - 2\nu)^{-1}, \quad k_2^2 = \rho\omega^2 G^{-1}$$

где ρ — плотность материала полосы, ν и G — его упругие постоянные. Пусть u_1 и u_2 — проекции вектора $\mathbf{u}$ на оси x и y, u_3, u_4, u_5 — компоненты тензора напряжений τ_{xy}, σ_x, σ_y соответственно.

Выпишем граничные условия для комплексных амплитуд перемещений и напряжений

$$u_2\,(x,\,0) = u_3\,(x,\,0) = u_3\,(x,\,1) = 0 \tag{1.2}$$

$$u_5\,(x,\,1) = f_1\,(x) \quad (x < 0), \quad \eta\,(x) \equiv D\partial^4 u_2\,/\,\partial x^4 - \alpha u_2 + u_5 = f\,(x) \quad (x \geqslant 0,\ y = 1) \tag{1.3}$$

$$\psi_m\,(0) = P_m \quad (m = 2,\,3), \quad \psi_m\,(x) \equiv D\partial^m u_2\,/\,\partial x^m, \quad y = 1 \tag{1.4}$$
$$(D = E_0 h^3\,[12\,(1 - \nu_0^2)]^{-1}, \quad \alpha = \mu h\omega^2)$$

Здесь E_0 и ν_0 — упругие постоянные, h — толщина балки.

Применяя к уравнениям (1.1) двустороннее преобразование Лапласа, из условий (1.2) получим

$$u_s(x,\,y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L C\,(p)\,U_s(p,\,y)\,e^{px}dp, \quad s = 1,\,2,\,\ldots,5 \tag{1.5}$$
$$2GU_1\,(p,\,y) = pq_2\,(q^2 \sin q_2 \cos q_1 y - q_1 q_2 \sin q_1 \cos q_2 y)$$
$$2GU_2\,(p,\,y) = q_1 q_2\,(q^2 \sin q_2 \sin q_1 y - p^2 \sin q_1 \sin q_2 y)$$
$$q^2 = p^2 + {}^1/_2 k_2^2, \quad q_m^2 = p^2 + k_m^2, \quad m = 1,\,2$$

Подставив (1.5) в (1.3), получим два уравнения

$$\sigma^+\,(p) + \sigma^-\,(p) = C\,(p)N_1\,(p), \quad \eta^+\,(p) + \eta^-\,(p) = C\,(p)N_2\,(p), \quad p \in L \tag{1.6}$$
$$\sigma^\pm\,(p) = \pm\int\limits_0^{\pm\infty} u_5\,(x,\,1)\,e^{-px}dx, \quad \eta^\pm\,(p) = \pm\int\limits_0^{\pm\infty} \eta\,(x)\,e^{-px}\,dx$$
$$N_1\,(p) = U_5\,(p,\,1) = q^4 q_2 \sin q_2 \cos q_1 - p^2 q_1 q_2^2 \sin q_1 \cos q_2$$
$$N_2\,(p) = N_1\,(p) + (Dp^4 - \alpha)U_2\,(p,\,1), \quad 2GU_2\,(p,\,1) = k_2^2 q_1 q_2 \sin q_1 \sin q_2$$

Здесь $N_r\,(p)$ $(r = 1,\,2)$ — целые четные функции, имеющие счетное множество нулей a_{kr}. После разложения интегралов (1.5) в ряды по вычетам (в комплексных полюсах $p = a_{kr}$ каждый вычет представляет собой затухающую по x волну — однородное решение) чисто мнимые полюса, число которых S_r конечно и зависит от ω, определяют распространяющиеся волны. Большинство этих нулей с увеличением частоты ω приходят из комплексной плоскости на мнимую ось через начало координат. Случаи $a_{kr} = 0$ могут иметь место лишь при критических значениях частот ω, совпадающих с частотами собственных колебаний поперечного сечения полосы. Поэтому число мнимых нулей $S_r\,(\omega)$ при данной частоте ω определяется числом критических частот, не превышающих ω, т. е.

$$S_r(\omega) = \left[\frac{\omega}{\pi c_1}\right] + \left[\frac{\omega}{\pi c_2}\right] + 1 \quad c_m = \frac{\omega}{k_m}$$

где $[a]$ — целая часть числа a, c_1 и c_2 — скорости распространения волн растяжения и искажения, отнесенные к размерной ширине полосы. В отдельных интервалах частот это соотношение может в принципе нарушаться за счет нулей, приходящих на мнимую ось не через начало координат. Однако такие случаи являются исключением [12] и незначительно изменяют величины S_r. При некоторых значениях ω функции $N_r(p)$ имеют кратные нули, эти случаи здесь не рассматриваются. Различные по модулю чисто мнимые нули a_{kr} будем нумеровать от единицы до $S_r > 0$, нумерация комплексных (и вещественных) нулей a_{kr} в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ начинается с $S_r + 1$; нули, симметричные указанным относительно начала координат, обозначим через a_{-kr}, $a_{-kr} = -a_{kr}$. Опираясь на теорему Руше и следуя [13], можно доказать, что все большие по модулю нули $|a_{kr}| \gg \omega$ комплексны. При $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Im} p > 0$ они определяются асимптотическими формулами

$$a_{k1} = (^1/_2 k - l_1)\pi - {}^1/_4\pi + {}^1/_2 i \ln k\pi + iO(1) \tag{1.7}$$
$$a_{k2} = (^1/_2 k - l_2)\pi + iO(1)$$

где $l_r \geqslant 0$ — целые числа, зависящие от ω, k четно. В квадранте $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Im} p < 0$ большие нули a_{kr} имеют нечетные номера.

Контур L и чисто мнимые нули с положительными индексами k выберем так, чтобы выполнялся принцип Мандельштама и нумерация этих нулей в последующих выражениях была естественной — от единицы до S_r. Пусть $p = i\gamma$ — точка мнимой оси, $c_{kr} = d\omega / d\gamma$ при $i\gamma = a_{kr}$ — групповая скорость kr-й распространяющейся волны слева ($r = 1$) или справа ($r = 2$) на бесконечности, Q_{kr} — осредненная по периоду T плотность энергии этой волны, P_{kr} — ее поток, осредненный по T и по сечению $x = \mathrm{const}$. Воспользуемся формулой Рейнольдса — Релея $P_{kr} = c_{kr}Q_{kr}$ (см. [14], стр. 239; наиболее общее доказательство справедливости этой формулы получено М. А. Леонтовичем [15] и Лайтхиллом [16]). Так как $N_r(-p) = N_r(p)$, то $c_{-kr} = -c_{kr}$, и поскольку $Q_{kr} > 0$, одному из каждых двух собственных чисел с модулем, равным $|a_{kr}|$, соответствует поток $P_{kr} < 0$; это число (и точку) обозначим через a_{kr}, $k \geqslant 1$. Пусть контур L совпадает с мнимой осью, обходя точки a_{kr} слева, а точки a_{-kr} справа, $k \geqslant 1$. Тогда после разложения интегралов (1.5) в ряды по вычетам в полюсах $p = a_{kr}$ в согласии с принципом Мандельштама будем иметь $P_{k1} < 0$ при $k = 1, 2, \ldots, S_1$, $P_{k2} > 0$ при $-k = 1, 2, \ldots, S_2$.

Исключение из (1.6) функции $C(p)$ приводит к уравнению Винера — Хопфа

$$\eta^-(p) + \eta^+(p) = K(p)[\sigma^-(p) + \sigma^+(p)], \quad p \in L, \quad K(p) = N_1^{-1}(p)N_2(p) \tag{1.8}$$

Построим каноническое решение однородного уравнения $\eta_0^-(p) = K(p)\sigma_0^+(p)$, $p \in L$. Применим обычный способ [17, 8] выделения из (1.8) при помощи тригонометрических функций задачи Римана $\eta_2^-(p) =$

$= K_2(p)\sigma_2^+(p)$ с нулевым индексом на мнимой оси. Положим

$$\sigma_0^+(p) = \sigma_1^+(p)\sigma_2^+(p), \quad K(p) = K_1(p)K_2(p) \tag{1.9}$$

$$K_1(p) = \frac{D}{4G} p^3 \operatorname{ctg}^3 \pi p \prod_{k=1}^{S_1} \operatorname{ctg} \pi(p - a_{k1}) \operatorname{ctg} \pi(p + a_{k1}) \times$$
$$\times \left[\prod_{k=1}^{S_2} \operatorname{ctg} \pi(p - a_{k2}) \operatorname{ctg} \pi(p + a_{k2})\right]^{-1}$$

и воспользуемся формулой $z \operatorname{ctg} \pi z = \Gamma(1 - z)\Gamma(1 + z)\Gamma^{-1}(1/2 - z)\Gamma^{-1} \times \times (1/2 + z)$.

Факторизуя функцию $K_1(p)$ элементарными средствами в соответствии с принципом Мандельштама, получим

$$\sigma_1^+(p) = \frac{\Gamma^3(1/2 + p)}{\Gamma^3(1 + p)} \prod_{k=1}^{S_1} \frac{(p + a_{k1})\Gamma(1/2 + p - a_{k1})\Gamma(1/2 + p + a_{k1})}{\Gamma(1 + p - a_{k1})\Gamma(1 + p + a_{k1})} \times \tag{1.10}$$
$$\times \prod_{k=1}^{S_2} \frac{\Gamma(1 + p - a_{k2})\Gamma(1 + p + a_{k2})}{(p + a_{k2})\Gamma(1/2 + p - a_{k2})\Gamma(1/2 + p + a_{k2})}$$

Согласно (1.6), (1.9), функция $K_2(p)$ на мнимой оси удовлетворяет условию Гельдера, при $|\gamma| \to \infty$ $K_2(i\gamma) = 1 + 4GD^{-1}|\gamma|^{-3} + O(e^{-\gamma\pi})$.

Таким образом, имеем [18]

$$\sigma_2^+(p) = \operatorname{exp}\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln K_2(t)\,dt}{t - p}\right\} \tag{1.11}$$

Общее решение неоднородного уравнения (1.8) строится с учетом требования конечности локальной энергии под краем балки, что равносильно условию $u_5(x, 1) \sim Ax^\varphi$, $\varphi > -1$, $x \to +0$ или ([19], стр. 48) при $p \to \to \infty$ $\sigma^+(p) \sim A\Gamma(\varphi + 1)p^{-\varphi-1}$. Так как, согласно (1.10), (1.11), $\sigma_2^+(p) = = O(1)$, $\sigma_1^+(p) = O(p^{-3/2})$ при $p \to \infty$, то $\varphi = -1/2$ и, следовательно, [18]

$$\sigma^+(p) = \frac{\sigma_0^+(p)}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\sigma^-(t)}{\sigma_0^+(t)} - \frac{\eta^+(t)}{K(t)\sigma_0^+(t)}\right] \frac{dt}{(t - p)} + \tag{1.12}$$
$$+ \sigma_0^+(p)\Pi(p), \quad \Pi(p) = Ap + B$$

где A и B — постоянные. Однако именно из-за трудностей в вычислении A, B при $\omega \neq 0$ формула (1.12) малоэффективна, и здесь не будет использоваться.

Построим решение в другой форме [2], хорошо приспособленной для расчетов на вибрационную нагрузку основания (полосы) и опорных балочных плит каркасного сооружения, имеющего точечный контакт с плитами [20]. Если $f_r(x) = f_r e^{ax}$ $(r = 1, 2)$, то элементарным способом, по теореме Лиувилля, получим [19]

$$\sigma^+(p) + \sigma^-(p) = \sigma_0^+(p)\{f_1[\sigma_0^+(a)(a - p)]^{-1} + f_2[\eta_0^-(a)(p - - a)]^{-1} + \Pi(p)\} \tag{1.13}$$

Пусть в задаче (1.2), (1.3) $f_1(x) \equiv 0$, $f_2(x) = Q_2\delta(x - c)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Ее решение u_s^δ, т. е. функцию Грина, будем искать, как в [2], в виде суммы решения основной задачи

(1.14) $u_3(x, 0) = u_2(x, 0) = u_3(x, 1), \quad \eta(x) = Q_2\delta(x - c)$

выражающегося, очевидно, формулами (1.5), где

(1.15) $C(p) = Q_2 e^{-pc} N_2^{-1}(p)$

и решения смешанной (корректирующей) задачи (1.2), (1.3), где

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_2 e^{a_{k2}(x-c)} N_1(a_{k2})[N_2'(a_{k2})]^{-1}, \quad f_2(x) \equiv 0 \tag{1.16}$$

Вид функции $f_1(x)$ позволяет при решении задачи (1.2), (1.3), (1.16) воспользоваться формулой (1.13). В результате, учитывая (1.5), (1.15), получим

$$u_s^\delta(x, y) = \frac{Q_2}{2\pi i}\int_L \left\{\frac{e^{-pc}}{N_2(p)} + \frac{1}{E_1(p)}\left[\sum_{n=1}^{\infty} t(a_{n2}, p) + \Pi(p)\right]\right\} U_s(p, y)e^{px}dp \tag{1.17}$$

$$t(\tau, p) = \frac{e^{-\tau c}E_1(\tau)}{(\tau - p)N_2'(\tau)}, \quad E_1(p) = \frac{N_1(p)}{\sigma_0^+(p)}$$

Аналогично вычисляется функция Грина задачи о пригрузке, когда в (1.2) — (1.4) $f_1(x) = Q_1\delta(x - c)$, $c < 0$, $f_2(x) \equiv 0$, $P_2 = P_3 = 0$.

Коэффициент интенсивности напряжений под краем балки находится путем известных асимптотических оценок [19] и имеет вид

$$u_5^\delta(x, 1) = A(\pi x)^{-1/2} + O(\sqrt{x}), \quad x \to +0$$

Для удовлетворения условиям (1.4) и условиям на торцах прямоугольника $\lambda_1 \leqslant x \leqslant \lambda_2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > c$ или полуполос $\lambda_1 = -\infty$ и $\lambda_2 = \infty$ (см. п.3) выпишем разложения интегралов (1.17) в ряды по вычетам. Замыкая L направо ($j = 1$) и налево ($j = 2$) полуокружностями радиуса $R_k = \pi|k|$ и учитывая равенство $E_1(p) = E_2(p) \equiv N_2(p)[\eta_0^-(p)]^{-1}$, $p \in L$, получим

$$u_s^\delta(\lambda_j, y) = (-1)^j Q_2 \sum_{k=1}^{\infty} t_j(-b_{kj}) U_s(-b_{kj}, y) e^{-b_{kj}l_j}, \quad b_{kj} = (-1)^j a_{kj} \tag{1.18}$$

$$t_j(\tau) = (j-1)\frac{e^{-\tau c}}{N_2'(a_{k2})} + E_j^*(\tau)\left[\sum_{n=1}^{\infty} t(a_{n2}, \tau) + A\tau + B\right]$$

$$(E_j^*(p) = \operatorname{res}[E_j(p)]^{-1})$$

Вычислим, путем почленного дифференцирования ряда (1.18) при $j = s = 2$, $y = 1$, $\lambda_2 < c$, величины $\psi_2(0)$, $\psi_3(0)$.

Используя тождество

(1.19) $DU_2(a_{k2}, 1) = N_1(a_{k2})d_{k2}^{-1}, \quad d_{k2} = \alpha D^{-1} - a_{k2}^4$

из условия (1.4) получим систему двух уравнений относительно комплексных неизвестных A и B ($m = 2, 3$)

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{N_1(a_{k2})a_{k2}^m}{N_2'(a_{k2})d_{k2}} \left\{\eta_0^-(a_{k2})\left[\sum_{n=1}^{\infty} t(a_{n2}, a_{k2}) + Aa_{k2} + B\right] - \frac{(-1)^m}{e^{-a_{k2}c}}\right\} = \frac{P_m}{Q_2} \tag{1.20}$$

В силу оценок (1.7) k-е члены этих рядов убывают не медленнее, чем $|k|^{-7/2}$ при $m = 2$ и $|k|^{-5/2}$ при $m = 3$, внутренние ряды, согласно (1.17), имеют экспоненциальную сходимость по n.

Рассмотрим вопросы, относящиеся к единственности решений в форме (1.12) или (1.17). При исследовании единственности, т. е. при подсчете степени полинома $\Pi(p)$, представление (1.10), (1.11), в отличие от [12,21,22] и др. не наложило ограничений ни на вычеты функций $[K(p)]^{\pm 1}$ в полюсах $p = a_{kr}$, $k \leqslant S_r$, ни на взаимное расположение точек a_{k1} и a_{k2} на мнимой оси. Каждый kr-й множитель, входящий в произведения (1.10), при $|\operatorname{Im} p| \to \infty$, $\operatorname{Re} p \geqslant 0$ стремится к единице. Поэтому, если вопреки принципу Мандельштама обходить, например, любое множество точек $\{a_{k1}, a_{n2}\}$ ($\{a_{-k1}, a_{-n2}\}$) при $k \leqslant S_1$, $n \leqslant S_2$ справа (слева), а оставшиеся после этого на мнимой оси полюса и нули — слева (справа), то и тогда условия обобщенной теоремы Лиувилля, определяющие единственность и неединственность, не изменяются, по-прежнему $\sigma^+_1(p) \sim p^{-3/2}$ при $p \to \infty$. Отсюда, в частности, следует, что принцип Зоммерфельда тоже порождает единственное решение в форме (1.12), (1.17), и если среди распространяющихся волн имеются обратные (несущие энергию из бесконечности), то величины соответствующих источников на бесконечности не произвольны, а определяются единственным образом функциями $f_r(x)$ и величинами P_r.

Вместе с тем необходимо отметить, что контур L не обязательно определяет единственное решение, как это имеет место в краевых задачах эластостатики. Представление (1.10), (1.11) позволяет, путем замены контурных интегралов рядами вычетов в полюсах a_{k1}, a_{k2}, легко установить, при каком выборе контура L можно получить неединственное решение, сколько в нем произвольных постоянных, какова соответствующая картина волнового процесса. Если, например, контур L, выбранный по принципу Мандельштама, сместить так, чтобы он обходил справа какие-нибудь симметричные точки $p = a_{k2}$ и $p = -a_{k2}$, $k = 1, 2, \ldots, S$, $S < S_2$, а в остальном сохранял свое прежнее положение, то в знаменатель выражения (1.10) добавятся S множителей $p - a_{k2}$ (набор гамма-функций в (1.10) не связан с обходом нулей и полюсов на мнимой оси, поэтому он всегда однозначен). Отсюда следует, что $\sigma_1^+(p) \sim p^{-3/2-S}$ при $p \to \infty$ и, значит, по обобщенной теореме Лиувилля в решение войдут $S + 2$ произвольные постоянные. Их можно определить, задавшись амплитудами S стоячих волн вида $u_k(y) \cos(|a_{k2}|x) \times \times \cos \omega t$, которые, согласно (1.12), возникают при $x \to \infty$ после указанного смещения контура. Такой анализ легко сделать при произвольном обходе точек a_{kr} на мнимой оси

2. Построим систему кусочно-однородных решений (КОР) динамической задачи (1.2) — (1.4). Общая форма ее kr-х элементов $u_{ks}^r(x, y)$, объединяющихся в две различные подсистемы ($r = 1, 2$), будет такой же, как в статике. Следуя [2], получим

$$u^r_{ks}(x, y) = C_{kr} U_s(b_{kr}, y) e^{b_{kr}x} + \frac{C_{kr}}{2\pi i} \int\limits_L \left[\frac{E_{3-r}(b_{kr})}{(-1)^r(p - b_{kr})} + \Pi_{kr}\right] \times \tag{2.1}$$
$$\times \frac{U_s(p, y)\, dp}{E_r(p) e^{-px}}$$

$k = 1, 2, \ldots; \Pi_{kr} = A_{kr}p + B_{kr}$,

где A_{kr}, B_{kr}, C_{kr} — произвольные комплексные числа. Аналогично разложению (1.19) имеем (δ_{rj} — символ Кронекера)

$$u^r_{ks}(\lambda_j, y) = C_{kr}\, [\delta_{rj} U_s(b_{kr}, y) e^{b_{kr}\lambda_j} - (-1)^j \sum_{n=1}^{\infty} \times \tag{2.2}$$
$$\times T^{rj}_{kn} U_s(-b_{nj}, y) e^{-b_{nj}\lambda_j}]$$
$$T_{kn}^{rj} = [(-1)^r (b_{kr} + b_{nj})^{-1} E_{3-r}(b_{kr}) + A_{kr} b_{nj} -$$
$$- B_{kr}] E^*_j(-b_{nj})$$

Постоянные A_{kr}, B_{kr} вычисляются из условий $\partial^m u_{k2}{}^r(x, y) / \partial x^m = 0$, $x = 0$, $y = 1$, которые после почленного дифференцирования ряда (2.2) при $s = j = 2$ и перехода к пределу при $x = 0$ дают для каждой пары A_{kr}, B_{kr} систему двух уравнений

$$(r-1) DU_2(a_{k2}, 1)\, a_{k2}^m + \sum_{n=-1}^{-\infty} T_{kn}^{r2} d_{n2}^{-1} a_{n2}^m N_1(a_{n2}) = 0 \tag{2.3}$$
$$(m = 2, 3;\ r = 1,2;\ k = 1, 2, \ldots)$$

Ряды сходятся по n, как внешние ряды (1.20).

Под краем балки напряжения, порождаемые kr-м КОР, имеют вид

$$u_{k5}{}^r(x, 1) = A_{kr}(\pi x)^{-1/2} + O(\sqrt{x}), \quad x \to +0$$

Следуя [10], можно показать, что функции $U_s(a_{kr}, y)$ — однородные решения, по которым в (2.2) при $x = \mathrm{const}$ разложены элементы системы КОР,— удовлетворяют соотношению обобщенной ортогональности с нагрузкой

$$\int_0^1 [U_1(a_{kr}, y) U_4(a_{nr}, y) - U_3(a_{kr}, y) U_2(a_{nr}, y)]\, dy + \tag{2.4}$$
$$+ 2(r-1) Da_{kr}(a_{nr}^2 + a_{kr}^2) U_2(a_{kr}, 1) U_2(a_{nr}, 1) = \delta_{kn} T_{kr}$$

Это соотношение имеет место также при замене a_{kr} на b_{kr}, при $r = 1$ оно получено в [10].

При помощи системы КОР (2.1) можно решать разнообразные контактные задачи о вынужденных стационарных колебаниях произвольного числа конечных балок, сцепленных с упругой полосой, полуполосой, прямоугольником. При этом, как показывают аналитические оценки и результаты расчета статических деформаций балок и стрингеров совместно с упругим основанием [2–9,20], решение оказывается эффективным и в тех случаях, когда полоса или прямоугольник составлены из однородных подкрепленных прямоугольников и полуполос с различными упругими характеристиками, т. е. когда основание имеет вертикально-слоистую структуру, а жесткости подкрепляющих элементов кусочно-постоянны. Для решения задач вязкоупругости достаточно в (1.10) положить $S_r = 0$ и заменить вещественные модули G и E_0 комплексными.

Метод КОР нетрудно перенести на задачи изгибных вибраций пластин, на смешанные задачи о стационарных колебаниях цилиндрических тел [1,3, 4,7], на родственные задачи дифракции акустических и электромагнитных волн. К динамическим краевым задачам для клиновидных и конических областей этот метод неприменим.

Полагая $D = \infty$, при помощи (2.1) можно сводить к нормальным системам Пуанкаре — Коха задачи о вибрации штампов, а также двойственные им задачи о продольных щелях в полуполосе и прямоугольнике, в частности, периодические и двоякопериодические задачи о стационарных колебаниях неоднородной полосы, полуплоскости и плоскости, ослабленных продольными и поперечными щелями.

3. Перейдем к примерам. Рассмотрим две задачи а) и б) для прямоугольника $\lambda_1 \leqslant x \leqslant \lambda_2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Пусть на его торцах поставлены «перекрестные» условия

$$u_s(\lambda_j,\ y) = g_{sj}(y),\quad \psi_m(\lambda_2) = F_m,\quad j = 1,\ 2 \tag{3.1}$$

в которых а) $s = 1,3$, $m = 1,3$, б) $s = 2,4$, $m = 0,2$. На продольных сторонах сохраняются условия (1.2) — 1.4), где $f_1(x) \equiv 0$, $f_2(x) = Q_2\delta(x - c)$; все нагрузки синфазны.

Решение обеих задач будем искать в рядах по КОР

$$u_s(x, y) = u_s^{\delta}(x, y) + \sum_{r=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty} u_{ks}^{r}(x, y) \tag{3.2}$$

сразу удовлетворив условиям (1.2) — (1.4). Для выполнения условий (3.1) подставим в их левые части ряды (3.2), а затем разложения (1.18) и (2.2). В образовавшихся двойных рядах изменим порядок суммирования по k и n. Умножим обе части условий (3.1 последовательно а) на $U_4(b_{nj}, y)$, $-U_2(b_{nj}, y)$, $2b_{n2}^2U_2(b_{n2}, 1)$, $2U_2(b_{n2}, 1)$, б) на $U_1(b_{nj}, y)$, $-U_3(b_{nj}, y)$, $2b_{n2}U_2(b_{n2}, 1)$, $2b_{n2}^3U_2(b_{n2}, 1)$. Преобразованные таким путем четыре равенства сложим и проинтегрируем по y от нуля до единицы. Вводя новые неизвестные $X_{kr} = C_{kr}e^{b_{kr}\lambda_r}$, в силу соотношений четности $U_s(-b_{kr}, y) = (-1)^s U_s(b_{kr}, y)$ и ортогональности (2.4) из суммарного равенства получим нормальную систему Пуанкаре — Коха [23]

$$X_{kj}(-1)^{j+l} - \sum_{r=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty} X_{nr}T_{nk}^{rj}\exp(-b_{kj}\lambda_j - b_{nr}\lambda_r) = t_{kj}^{\ l} - Q_2t_j(b_{kj})\,e^{-b_{kj}\lambda_j} \tag{3.3}$$

$$t_{kj}^{\ 1} = \frac{1}{T_{kj}}\Big\{(-1)^{j+1}\int_0^1[g_{1j}(y)\,U_4(b_{kj}, y) - g_{3j}(y)\,U_2(b_{kj}, y)]\,dy +$$

$$+ 2(j-1)(F_1a_{k2}^2 + F_3)\,U_2(b_{k2}, 1)\Big\}$$

$$t_{kj}^{\ 2} = \frac{1}{T_{kj}}\Big\{(-1)^{j}\int_0^1[g_{4j}(y)\,U_1(b_{kj}, y) - g_{2j}(y)\,U_3(b_{kj}, y)]\,dy +$$

$$+ 2(j-1)(F_0a_{k2}^2 + F_2)\,a_{k2}U_2(a_{k2}, 1)\Big\}$$

Здесь $j = 1,2$; $k = 1,2, \ldots$; в задаче а) $l = 1$, в задаче б) $l = 2$.

Построенное решение при частных значениях заданных функций и геометрических параметров становится также решением некоторых важных контактных задач для упругой полосы. Если $g_{sj}(y) \equiv 0$ и $F_m = 0$, то условия (3.1) определяют задачу о периодической с периодом $2(\lambda_2 - \lambda_1)$ системе балок длиной $2\lambda_2$, сцепленных с полосой $0 \leqslant y \leqslant 1$. К каждой балке приложены а) симметричные или б) кососимметричные усилия, сумма решений задач а) и б) соответствует произвольной нагрузке. В отличие от периодических задач статики, где, например, можно регулировать продольные деформации полосы на бесконечности, здесь все динамические параметры на бесконечности однозначны: волны не распространяются через торцы прямоугольников, поток энергии на торцах равен нулю. Отсюда видны ограничения, налагаемые в динамике на принцип Сен-Венана. Например, при достаточно больших ω, после возникновения распространяющихся волн, решение периодической задачи ни при каких x не приближается к решению задачи о вибрации сколь угодно большого, но конечного числа периодически расположенных на полосе одинаковых балок, находящихся под одинаковой нагрузкой.

Если в решении (3.2), (2.1), (3.3) при $g_{sj}(y) \equiv 0$, $F_m = 0$ положить $A_{k1} = 0$, $\lambda_1 = -\infty$, то оно превратится в функцию Грина задачи о стационарных колебаниях одной балки длиной $2\lambda_2$, лежащей на полосе $0 \leqslant y \leqslant 1$. Полагая $A_{k2} = 0$, $\lambda_2 = \infty$, получим решение задачи о вибрации двух полубесконечных балок, расстояние между концами которых равно $2\lambda_1$. Условия на бесконечности в этих задачах соответствуют принципу Мандельштама. При других условиях излучения единственность и неединственность решения, как и в п. 1, определяется выбором контура L.

Поступила 15 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нуллер Б. М.* Контактные задачи для упругого полубесконечного цилиндра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
2. *Нуллер Б. М.* О сжатии упругого слоя балочными плитами. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
3. *Литовченко С. И., Нуллер Б. М.* Об изгибе упругого цилиндра жесткими обоймами. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
4. *Глаговский В. Б., Нуллер Б. М.* Осесимметричные контактные задачи для упругого цилиндра, подкрепленного цилиндрическими оболочками. Вестн. ЛГУ, 1973, № 13, вып. 3.
5. *Глаговский В. Б., Нахмейн Е. Л.* Расчет балочных плит, сцепленных с упругим слоем. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники, 1975, т. 108.
6. *Нуллер Б. М.* Контактные задачи для полос и прямоугольных пластинок, усиленных стержнями. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
7. *Литовченко С. И., Нуллер Б. М.* Кручение упругих цилиндров, ослабленных цилиндрическими щелями. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3.
8. *Кремер М. И., Нуллер Б. М.* Контактные задачи для неоднородной упругой полосы. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники, 1975, т. 109.
9. *Нуллер Б. М.* О новых обобщениях метода кусочно-однородных решений. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники, 1978, т. 124.
10. *Зильберглейт А. С., Нуллер Б. М.* Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости. Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 2.
11. *Зильберглейт А. С., Златина И. Н.* О некоторых общих представлениях решения динамических уравнений теории упругости. Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 1.
12. *Бабешко В. А.* О единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 6.
13. *Нуллер Б. М.* Контактная задача для упругого бесконечного конуса. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
14. *Зоммерфельд А.* Механика деформируемых сред. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
15. *Мандельштам Л. И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М., «Наука», 1972.
16. *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids. Amsterdam. North-Holland, 1973.
17. *Нуллер Б. М.* Контактная задача для упругого клина, подкрепленного стержнем равного сопротивления. Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 3.
18. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
19. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решений дифференциальных уравнений в частных производных. Изд-во иностр. лит., М., 1962.
20. *Глаговский В. Б., Нуллер Б. М., Шифрин Г. М.* О статическом расчете балок переменной жесткости на вертикально-слоистой упругой полосе, полуполосе или прямоугольнике. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники, 1979, т. 129.
21. *Бабешко В. А.* Об условиях излучения для упругого слоя. Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 3.
22. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* К проблеме динамических контактных задач в произвольных областях. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3.
23. *Каган В. Ф.* Основания теории определителей. Одесса, Госиздат, 1922.