Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.383

О ВАРИАЦИОННОМ ПОДХОДЕ В ТЕОРИИ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ СЛОИСТЫХ ТЕЛ

В. И. Кузьменко

(Днепропетровск)

Предлагается и обосновывается вариационная постановка контактных задач для системы деформируемых тел при нелинейной связи между напряжениями и деформациями. Предполагается, что при малых деформациях тела могут отставать по части начальной контактной поверхности, однако увеличение площадки контакта исключено. Таким свойством обладают, в частности, слоистые основания и слоистые цилиндры, поэтому рассматриваемую систему тел удобно назвать слоистым телом.

Задача формулируется как задача минимизации функционала полной энергии на выпуклом замкнутом множестве функционального пространства С. Л. Соболева. Определяются условия существования и единственности решения вариационной задачи. Предлагается также эквивалентная постановка в форме вариационного неравенства.

Задача об отставании упругого тела от жесткого полупространства (задача Синьорини) была исследована на основе вариационного подхода в [1]. Вариационная теория контакта жесткого штампа и нелинейно-упругого тела дана в [2]. В работе [3] исследована вариационная постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел с учетом начального зазора между телами. Известные подходы к исследованию слоистых тел [4-7] предполагают линейную связь напряжений и деформаций и существенно зависят от формы слоев.

Вариационный подход к исследованию слоистых тел практически не зависит от предположений о линейности, однородности и изотропности и не связан с определенными формами слоев. Кроме того, не требуется предварительной информации о фактических площадках контакта. На основе вариационного подхода могут быть эффективно реализованы численные методы, например метод конечных элементов [8], и проведено их обоснование.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему N тел, занимающих области $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$ трехмерного пространства E, ограниченные гладкими поверхностями $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_N$. Обозначим через Γ_{mn} общую границу тел Ω_m и Ω_n в исходном недеформируемом состоянии; считаем, что для каждого m множество Γ_{mn} непусто, хотя бы для одного n. Предполагается, что при малых деформациях поверхности фактического контакта между телами (слоями) не увеличиваются по сравнению с исходными поверхностями контакта.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$, $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ — вектор малых перемещений; $\varepsilon_{ij}(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ — тензор малых деформаций и тензор напряжений.

Сформулируем принимаемые условия контакта слоев Ω_m и Ω_n на границе Γ_{mn}. Обозначим через $\nu(x)$ единичный вектор нормали к Γ_{mn}, внешней по отношению к Ω_n. Введем нормальные и касательные составляющие вектора перемещений и вектора напряжений на поверхности Γ_{mn}

$$u_\nu = u_i\nu_i, \quad (u_\tau)_i = u_i - u_\nu\nu_i, \quad \sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_i\nu_j, \quad (\sigma_\tau)_i = \sigma_{ij}\nu_j - \sigma_\nu\nu_i$$

Верхним индексам будем указывать номер слоя, к которому относится данная величина.

В точках поверхности Γ_{mn} должны быть выполнены условия

$$\sigma_\nu^{(n)}(x) = -\sigma_\nu^{(m)}(x) = \sigma_\nu(x) \tag{1.1}$$
$$\sigma_\tau^{(n)}(x) = -\sigma_\tau^{(m)}(x) = \sigma_\tau(x), \quad \forall x \in \Gamma_{mn}$$

Рассматриваются три типа взаимодействия слоев Ω_m и Ω_n на поверхности Γ_{mn}:

слои сцеплены

$$u^{(m)}(x) = u^{(n)}(x), \quad \forall x \in \Gamma_{mn} \tag{1.2}$$

допускается отставание, однако взаимное скольжение слоев исключено

$$u_\nu^{(m)}(x) \geqslant u_\nu^{(n)}(x), \quad u_\tau^{(m)}(x) = u_\tau^{(n)}(x) \tag{1.3}$$
$$\sigma_\nu(x) \leqslant 0, \quad \sigma_\nu(x)\,[u_\nu^{(m)}(x) - u_\nu^{(n)}(x)] = 0, \quad \forall x \in \Gamma_{mn}$$

допускается отставание и взаимное скольжение слоев

$$u_\nu^{(m)}(x) \geqslant u_\nu^{(n)}(x), \quad \sigma_\tau(x) = 0 \tag{1.4}$$
$$\sigma_\nu(x) \leqslant 0, \quad \sigma_\nu(x)\,[u_\nu^{(m)}(x) - u_\nu^{(n)}(x)] = 0, \quad \forall x \in \Gamma_{mn}$$

Условия вида $u_\nu^{(m)}(x) \geqslant u_\nu^{(n)}(x)$ выражают требование взаимного непроникания тел; условия (1.3) и (1.4) учитывают также, что $\sigma_\nu(x) = 0$, если в точке $x \in \Gamma_{mn}$ происходит отставание, и $\sigma_\nu(x) \leqslant 0$ — в противном случае.

Предполагается, что поверхность

$$\Gamma_k - \bigcup_m \Gamma_{km} \quad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

может состоять из трех частей Γ_k^u, Γ_k^X, Γ_k^c. На части Γ_k^u заданы перемещения, на Γ_k^X — напряжения

$$u(x) = U^{(k)}(x), \quad \forall x \in \Gamma_k^u \tag{1.5}$$

$$\sigma_{ij}(x)\,\nu_j(x) = X_i^{(k)}(x), \quad \forall x \in \Gamma_k^X \tag{1.6}$$

На части Γ_k^c слой Ω_k подвергается действию штампа, граница которого описывается уравнением $\Psi_k(x) = 0$, причем вне штампа $\Psi_k(x) > 0$. Принимаются следующие условия [2] на поверхности Γ_k^c:

$$\Psi_k(x) + u(x)\operatorname{grad}\Psi_k(x) \geqslant 0, \quad \sigma_\tau(x) = 0 \tag{1.7}$$
$$\sigma_\nu(x) \leqslant 0, \quad \sigma_\nu(x)\,[\Psi_k(x) + u(x)\operatorname{grad}\Psi_k(x)] = 0, \quad \forall x \in \Gamma_k^c$$

Условия (1.7) определяют нормальный (без трения) контакт деформируемого и жесткого тел.

Кроме того, каждый слой находится под действием массовых сил $\rho_i^{(k)}(x)$, $x \in \Omega_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Принимается нелинейная связь между напряжениями и деформациями в форме [9]

$$\sigma_{ij} = \lambda_k(x)\,\vartheta\delta_{ij} + 2\mu_k(x)\,\varepsilon_{ij} - 2\mu_k(x)\,\omega_k(x, e_u)\,e_{ij} \tag{1.8}$$
$$\vartheta = \varepsilon_{ii}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - {}^1/_3\,\vartheta\delta_{ij}, \quad e_u = ({}^2/_3\,e_{ij}e_{ij})^{1/2}$$
$$\Lambda \geqslant \lambda_k(x) \geqslant \lambda > 0, \quad M \geqslant \mu_k(x) \geqslant \mu > 0$$

Введем функцию плотности энергии деформации

$$W_k(x, \varepsilon_{ij}) = \int \sigma_{ij}(x, \varepsilon_{ij})\, d\varepsilon_{ij} = \tag{1.9}$$

$$= \frac{1}{2}\lambda_k(x)\vartheta^2 + \mu_k(x)\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - 3\mu_k(x)\int\limits_0^{e_u} s\omega_k(x, s)\, ds$$

Предполагается, что функция $\omega_k(x, s)$ выбрана таким образом, что выполнены условия:

1) $W_k(x, \varepsilon_{ij})$ — непрерывно дифференцируемая по ε_{ij} выпуклая функция для любого $x \in \Omega_k$, следовательно, выполнено неравенство [10]

$$W_k(x, \varepsilon_{ij}') - W_k(x, \varepsilon_{ij}) \geqslant \frac{\partial W_k(x, \varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}(\varepsilon_{ij}' - \varepsilon_{ij}) = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}' - \varepsilon_{ij}) \tag{1.10}$$

2) существует такое $\alpha_k > 0$, что

$$(1 - \alpha_k)\left[\frac{1}{2}\lambda_k(x)\vartheta^2 + \mu_k(x)\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\right] \geqslant 3\mu_k(x)\int\limits_0^{e_u} s\omega_k(x, s)\, ds \tag{1.11}$$

Указанные требования, в частности, будут выполнены, если функция $\omega_k(x, s)$ удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant \omega_k(x, s) \leqslant \partial(s\omega_k(x, s)) / \partial s \leqslant \alpha_k < 1$$
$$\partial\omega_k(x, s) / \partial s \geqslant 0, \quad \forall x \in \Omega_k$$

Задача состоит в определении вектора перемещений u_i, тензоров деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij}, удовлетворяющих уравнениям равновесия, соотношениям Коши, нелинейным зависимостям (1.8) и условиям на напряжения и перемещения (1.1) — (1.7).

2. **Вариационная постановка задачи.** Для каждого слоя Ω_k введем пространство С. Л. Соболева $H^1(\Omega_k)$ вектор-функций $u^{(k)}(x) = (u_1^{(k)}(x), u_2^{(k)}(x), u_3^{(k)}(x))$, обладающих обобщенными первыми производными, суммируемыми с квадратом. Определим в $H^1(\Omega_k)$ скалярное произведение

$$(u^{(k)}, v^{(k)})_{H^1(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k} (u_i^{(k)}v_i^{(k)} + u_{i,j}^{(k)}v_{i,j}^{(k)})\, d\Omega$$

Рассмотрим основное пространство $H^1(\Omega)$, состоящее из вектор-функций $u(x)$, определенных на $\Omega = \bigcup\limits_k \Omega_k$ следующим образом: если $x \in \Omega_k$, то $u(x) = u^{(k)}(x)$. В качестве скалярного произведения в $H^1(\Omega)$ принимается

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{N} (u^{(k)}, v^{(k)})_{H^1(\Omega_k)} \tag{2.1}$$

Для сокращения записи наряду с $H^1(\Omega)$ будем пользоваться также обозначением H.

Наложим на разрывы перемещений вдоль Γ_{mn} ограничения, соответствующие кинематическим условиям из (1.2) — (1.4), и выделим следующие подмножества функций:

$$V_1^{(mn)} = \{v \mid v \in H,\ v^{(m)}(x) = v^{(n)}(x),\ \ \forall x \in \Gamma_{mn}\}$$
$$V_2^{(mn)} = \{v \mid v \in H,\ v_\nu^{(m)}(x) \geqslant v_\nu^{(n)}(x),\ v_\tau^{(m)}(x) = v_\tau^{(n)}(x),\ \forall x \in \Gamma_{mn}\}$$
$$V_3^{(mn)} = \{v \mid v \in H,\ v_\nu^{(m)}(x) \geqslant v_\nu^{(n)}(x),\ \ \forall x \in \Gamma_{mn}\}$$

Выделим также подмножества функций $v \in H$, удовлетворяющих кинематическим условиям на Γ_k^c и заданным на Γ_k^u условиям

$$V_c^{(k)} = \{v \mid v \in H,\ \Psi_k(x) + v(x)\operatorname{grad}\Psi_k(x) \geqslant 0,\ \forall x \in \Gamma_k^c\}$$
$$V_u^{(k)} = \{v \mid v \in H,\ v(x) = U^{(k)}(x),\ \forall x \in \Gamma_k^u\}$$

Каждое из введенных множеств выпуклое и замкнутое. Построим, наконец, множество V вектор-функций, удовлетворяющих всем условиям, налагаемым на перемещения

$$V = \bigcap_{m,n} V^{(mn)} \bigcap_k V_c^{(k)} \bigcap_k V_u^{(k)}$$

где $V^{(mn)}$ — одно из множеств $V_1^{(mn)}, V_2^{(mn)}, V_3^{(mn)}$. Множество V — выпуклое и замкнутое как пересечение конечного числа выпуклых и замкнутых множеств.

Дадим формальный вывод вариационного принципа в перемещениях для теории слоистых тел, считая, что необходимые требования регулярности функций выполнены. Пусть $u(x) \in V$ — действительные перемещения точек тела Ω, $\varepsilon_{ij}(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ — действительные значения тензоров деформаций и напряжений. Введем также допустимые перемещения $v(x) \in V$ и соответствующие деформации $\varepsilon_{ij}'(x) = {}^1/_2\,(v_{i,j}(x) + v_{j,i}(x))$. Рассмотрим равновесие слоя Ω_k, заменяя воздействие остальных слоев соответствующими силами на поверхностях Γ_{kn} $(n = 1, 2, \ldots, N)$. Применяя к интегралу

$$\int\limits_{\Omega_k} \frac{\partial}{\partial x_j}\,[\sigma_{ij}(v_i - u_i)]\,d\Omega$$

формулу Остроградского — Гаусса и учитывая, что для действительных напряжений выполнены уравнения равновесия, получаем

$$\int\limits_{\Omega_k} \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}' - \varepsilon_{ij})\,d\Omega - \int\limits_{\Gamma_k^X} X_i^{(k)}(v_i - u_i)\,d\Gamma - \int\limits_{\Omega_k} \rho_i^{(k)}(v_i - u_i)\,d\Omega -$$
$$- \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\Gamma_{kn}} [\sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) + \sigma_\tau(v_\tau - u_\tau)]\,d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_k^c} \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu)\,d\Gamma = 0 \tag{2.2}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, N)$$

Для каждого из трех типов взаимодействия на поверхностях Γ_{mn} $(m, n = 1, 2, \ldots, N)$ выполняются соотношения

$$\sigma_\nu(x)\,[v_\nu^{(n)}(x) - u_\nu^{(n)}(x) - v_\nu^{(m)}(x) + u_\nu^{(m)}(x)] \geqslant 0 \tag{2.3}$$
$$\sigma_\tau(x)\,[v_\tau^{(n)}(x) - u_\tau^{(n)}(x) - v_\tau^{(m)}(x) + u_\tau^{(m)}(x)] = 0,\quad \forall x \in \Gamma_{mn}$$

В точках поверхностей Γ_k^c имеют место соотношения

$$\sigma_\nu(x)\,[v_\nu(x) - u_\nu(x)] \geqslant 0,\qquad \forall x \in \Gamma_k^c\ (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{2.4}$$

Складывая (2.2) для $k = 1, 2, \ldots, N$ и учитывая (1.10), (2.3), (2.4), получаем

$$\sum_{k=1}^{N}\left[\int\limits_{\Omega_k} W_k(x, \varepsilon_{ij})\,d\Omega - \int\limits_{\Gamma_k^X} X_i^{(k)}u_i d\Gamma - \int\limits_{\Omega_k} \rho_i^{(k)}u_i d\Omega\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N}\left[\int\limits_{\Omega_k} W_k(x, \varepsilon_{ij}')\,d\Omega - \int\limits_{\Gamma_k^X} X_i^{(k)}v_i d\Gamma - \int\limits_{\Omega_k} \rho_i^{(k)}v_i d\Omega\right], \quad \forall v \in V$$

Таким образом, показан следующий вариационный принцип: среди всех перемещений $v \in V$ действительным перемещениям соответствует минимум функционала

$$J(v) = {}^1/_2\, B(v, v) - \Pi(v) - F(v) \tag{2.5}$$

$$B(u, v) = \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\Omega_k}[\lambda_k(x)\vartheta\vartheta' + 2\mu_k(x)\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}']\,d\Omega$$

$$\Pi(v) = \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\Omega_k} 3\mu_k(x)\int\limits_0^{e_u(v)} s\omega_k(x, s)\,ds\,d\Omega$$

$$F(v) = \sum_{k=1}^{N}\left[\int\limits_{\Omega_k}\rho_i^{(k)}v_i d\Omega + \int\limits_{\Gamma_k^X} X_i^{(k)}v_i d\Gamma\right]$$

Исходя из доказанного принципа, сформулируем вариационную задачу

$$\inf_{v\in V} J(v) \tag{2.6}$$

Задача (2.6) может быть сформулирована и как эквивалентная задача решения вариационного неравенства [11]

$$X(W(u), v - u) \geqslant F(v - u), \quad \forall v \in V \tag{2.7}$$

$$X(W(u), v - u) = \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\Omega_k}\frac{\partial W_k(x, \varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}(\varepsilon_{ij}' - \varepsilon_{ij})\,d\Omega$$

Выясним условия, при которых вариационная задача (2.6) имеет смысл. Будем считать, что $\Psi_k \in C^1$, $U_i^{(k)} \in H^{1/2}(\Gamma_k^u)$, $X_i^{(k)} \in H^{-1/2}(\Gamma_k^X)$, $\rho_i^{(k)} \in L^2(\Omega_k)$. В частности, функции $X_i^{(k)}$, $\rho_i^{(k)}$ могут быть кусочно-непрерывными, а функции $U_i^{(k)}$ — кусочно-дифференцируемыми в соответствующих областях. Тогда, используя теорему о следах [12] и учитывая сделанные ранее предположения о функциях $W_k(x, \varepsilon_{ij})$, можно показать, что интегралы, входящие в (2.5), существуют для всех $v \in H$, а множество V непусто.

Проведенные ранее рассуждения справедливы, если поверхности каждого слоя гладкие. Однако вариационная задача может быть поставлена во всех случаях, когда функционал $J(v)$ определен на H и множество V непусто. Вопросы существования решения изучаются в п. 3 при достаточно общих допущениях о регулярности поверхностей, введенных в [13].

3. Существование и единственность решения вариационной задачи. Рассмотрим подпространство R жестких перемещений, элементами которого будут такие перемещения $v \in H$, при которых каждый слой движется как жесткое тело

$$R = \{v \mid v \in H,\ B(v, v) = 0\}$$

Поскольку перемещения тела как жесткого целого определяются не более чем шестью параметрами, то подпространство R будет конечномерным. Выделим в R подпространство R^* нейтральных жестких перемещений

$$R^* = \{v \mid v \in R,\ F(v) = 0\}$$

Подпространство R представим в виде прямой суммы R^* и ортогонального дополнения R_1

$$R = R^* \oplus R_1$$

Пусть Q, Q', Q_1 — операторы ортогонального проектирования H на R, R^* и R_1 соответственно. Введем также операторы $P = I - Q$, $P' = I - Q'$, где I — тождественный оператор.

Допустимое множество V, вообще говоря, не содержит нулевого элемента, поэтому прямое использование теоремы Лионса — Стампаккья [11], как это сделано в [3], здесь невозможно. При формулировке условий существования решения используется вспомогательное множество V_0, которое вводится следующим образом:

$$V_0 = \bigcap_{m,n} V^{(mn)} \bigcap_k V_{c_0}^{(k)} \bigcap_k V_{u_0}^{(k)}$$

$$V_{c_0}^{(k)} = \{v \mid v \in H,\ v(x) \operatorname{grad} \Psi_k(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \Gamma_k{}^c\}$$

$$V_{u_0}^{(k)} = \{v \mid v \in H,\ v(x) = 0, \quad \forall x \in \Gamma_k{}^u\}$$

Пусть $u_0 \in V$ удовлетворяет условиям

$$u_0^{(m)}(x) = u_0^{(n)}(x), \qquad \forall x \in \Gamma_{mn}$$

$$\Psi_k(x) + u_0(x) \operatorname{grad} \Psi_k(x) = 0,\ \forall x \in \Gamma_k{}^c$$

$$u_0(x) = U^{(k)}(x), \quad \forall x \in \Gamma_k{}^u \quad (k, m, n = 1, 2, \ldots, N)$$

Можно проверить, что для любого $u \in V$ элемент $u - u_0$ принадлежит V_0 и, наоборот, для любого $w \in V_0$ элемент $w + u_0$ принадлежит V. Отметим, что V_0 содержит нулевой элемент.

Множество V_0 может быть получено из V в результате сдвига на фиксированный элемент u_0, поэтому оно также выпукло и замкнуто.

Лемма 1. Функционал $B(v, v)$ полукоэрцитивный, т. е.

$$B(v, v) \geqslant c \| Pv \|^2, \quad \forall v \in H \tag{3.1}$$

где c — некоторая постоянная, не зависящая от v.

Доказательство полукоэрцитивности $B(v, v)$ в случае одного тела выполнено в [13] и непосредственно обобщается для системы тел.

Лемма 2. Если $\{u_n\}$ — минимизирующая последовательность для функционала $J(v)$ и $F(Qu_n) \leqslant 0$, то последовательность $\{\Pi(u_n)\}$ ограничена.

Доказательство. Представим $J(u_n)$ в виде

$$J(u_n) = {}^1/_2 B(u_n, u_n) - \Pi(u_n) - F(Qu_n) - F(Pu_n)$$

Используя (1.11) и учитывая условия леммы, получаем

$$J(u_n) \geqslant {}^1/_2\, \alpha B(u_n, u_n) - F(Pu_n)$$

Согласно лемме 1, существует $\beta > 0$, такое, что

$$J(u_n) \geqslant \beta \| Pu_n \| - \| F \| \| Pu_n \| \tag{3.2}$$

Пусть последовательность $\{\Pi(u_n)\}$ является неограниченной. Тогда из $\{u_n\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, что $\Pi(u_{n_k}) \to +\infty$ при $n \to \infty$. Поскольку можно указать такое $\gamma > 0$, что

$$\Pi(v) \leqslant {}^1/_2 B(v, v) \leqslant \gamma \| Pv \|^2, \quad \forall v \in H$$

то $\| Pu_{n_k} \| \to +\infty$, и из (3.2) следует, что $J(u_{n_k}) \to +\infty$, т. е. последовательность $\{u_n\}$ не является минимизирующей.

Лемма 3. **Функционал $^1/_2 B(v, v) - \Pi(v)$ слабо полунепрерывный снизу на H.**

Доказательство основано на теореме В. И. Казимирова о слабой полунепрерывности интегральных функционалов [14, 15].

Лемма 4. **Если для всякого $r \in V_0 \cap R^*$ существует $-r \in V_0 \cap R^*$, то множество $P'[V_0]$ слабо замкнуто.**

Доказательство. Пусть $r \in V_0 \cap R^*$. Можно проверить, что если $u \in V_0$, то $u + r \in V_0$. Но по условию леммы $-r \in V_0 \cap R^*$, поэтому $u + (-r) \in V_0$. Любой элемент $v \in P'[V_0]$ имеет вид $v = u + (-r)$, где $r \in V_0 \cap R^*$. Отсюда получаем, что $P'[V_0] \subset V_0$, и, следовательно, $P'[V_0]$ замкнуто. Заметим, что множество $P'[V_0]$ выпуклое. Из выпуклости и замкнутости $P'[V_0]$ следует его слабая замкнутость [16].

Теорема 1. Если $F(r) \leqslant 0$ для всех $r \in V_0 \cap R$, причем $F(r) = 0$ только тогда, когда $-r \in V_0 \cap R$, то решение вариационной задачи (2.6) существует.

Доказательство. Используется схема линейных односторонних задач Фикера [13].

Пусть $J_0 = \inf_{v \in V} J(v)$ и $\{u_n\}$ — минимизирующая последовательность. Введем последовательность $\{z_n\}$ следующим образом: $z_n = u_n - u_0$, $z_n \in V_0$. Доказательство состоит из двух этапов. Сначала доказывается, что из последовательности $\{P'z_n\}$ можно выделить ограниченную последовательность, а затем устанавливается слабая сходимость некоторой подпоследовательности из $\{u_n\}$ к элементу $u \in V$, для которого $J(u) = J_0$.

Представим $B(z_n, z_n)$ в виде

$$B(z_n, z_n) = 2J(u_n) - 2J(u_0) + 2F(z_n) - 2B(u_0, z_n) + 2\Pi(u_n) - 2\Pi(u_0) \tag{3.3}$$

Используя полукоэрцитивность $B(v, v)$ (лемма 1) и ограниченность $\Pi(u_n)$ (лемма 2), из (3.3) получаем неравенство

$$c \| Pz_n \|^2 \leqslant c_1 + 2F(z_n) - 2B(u_0, z_n) \tag{3.4}$$

Пусть $\{P'z_n\}$ не содержит ограниченной подпоследовательности. Тогда можно построить последовательность $t_n = \|P'z_n\|$, такую, что $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$. Введем последовательность $w_n = z_n / t_n$. Из (3.4) следует, что $\lim_{n\to\infty} \| Pw_n \| = 0$. Учитывая, что $\| P''w_n \| = 1$ и Q_1 — оператор проектирования, ортогональный к P, получаем

$$\| Pw_n \|^2 + \| Q_1 w_n \|^2 = \| P'w_n \|^2 = 1$$

Поскольку $\{Q_1 w_n\}$ принадлежит конечномерному подпространству R, то из $\{w_n\}$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{w_{n_k}\}$, что $\{Q_1 w_{n_k}\}$ будет сходиться в норме H к некоторому $r \in R_1$, причем $\| r \| = 1$. Из условий теоремы, следуя [13], можно показать, что $F(Q_1 w_n) < 0$ для достаточно больших n. Из (3.4) получаем

$$ct_n \| Pw_n \|^2 \leqslant c_1 / t_n + 2F(Pw_n) + 2F(Q_1 w_n) - 2B(u_0, Pw_n) \tag{3.5}$$

Получаем противоречие, вызванное предположением о том, что $\{P'z_n\}$ не содержит ограниченной подпоследовательности. Левая часть (3.5) неотрицательна, правая, начиная с некоторого n, строго меньше нуля.

Поскольку $\{P'z_n\}$ содержит ограниченную подпоследовательность, то можно выделить из $\{z_n\}$ такую подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$, что $\{P'z_{n_k}\}$ слабо сходится к некоторому элементу $P'z$. При этом $P'z \in P'[V_0]$, так как $P'[V_0]$, согласно лемме 4, слабо замкнуто. Учитывая слабую полунепрерывность снизу функционала $^1/_2 B(v, v) - \Pi(v)$ (лемма 3), получаем

$$J_0 = \lim J(z_{n_k} + u_0) = \lim J(P'z_{n_k} + u_0) \geqslant$$
$$\geqslant \underline{\lim}\, J(P'z_{n_k} + u_0) \geqslant J(P'z + u_0) = J(u) \geqslant J_0, \quad n \to \infty$$

Отсюда заключаем, что существует элемент $u \in V$, такой, что $J(u) = \inf_{v \in V} J(v)$.

Теорема 2. Если функции $W_k(x, \varepsilon_{ij})$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ строго выпуклые по ε_{ij}, то решение вариационной задачи (2.6) определено с точностью до нейтральных жестких перемещений: если u — решение задачи (2.6), то любое другое решение w может быть представлено в виде $w = u + r$, $r \in R^*$.

Доказательство. Пусть существуют два решения u и v вариационной задачи. Каждое из них удовлетворяет вариационному неравенству (2.7), поэтому

$$X(W(u), v - u) \geqslant F(v - u), \quad X(W(v), u - v) \geqslant F(u - v)$$

Складывая неравенства, получаем

$$X(W(u) - W(v), v - u) \geqslant 0$$

Предположим, что почти всюду $\varepsilon_{ij}' \neq \varepsilon_{ij}$. Из строгой выпуклости $W_k(x, \varepsilon_{ij})$ следует, что

$$\int_{\Omega_k} [W_k(x, \varepsilon_{ij}') - W_k(x, \varepsilon_{ij})]\, d\Omega > \int_{\Omega_k} \frac{\partial W_k(x, \varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon_{ij}' - \varepsilon_{ij})\, d\Omega$$
$$\int_{\Omega_k} [W_k(x, \varepsilon_{ij}) - W_k(x, \varepsilon_{ij}')]\, d\Omega > \int_{\Omega_k} \frac{\partial W_k(x, \varepsilon_{ij}')}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}')\, d\Omega$$

и поэтому

$$X(W(u) - W(v), v - u) < 0$$

Получаем противоречие, связанное с допущением $\varepsilon'_{ij} \neq \varepsilon_{ij}$.

Решение $u \in V$ вариационной задачи (2.6) удовлетворяет заданным кинетическим условиям на поверхностях Γ_{mn}, Γ_k^u, Γ_k^c. Используя методы вариационных неравенств [11], при дополнительных предположениях о су-

ществовании вторых производных решения можно показать, что решение удовлетворяет также уравнениям равновесия и статическим условиям на поверхностях Γ_{mn}, Γ_k^X, Γ_k^c, иначе говоря, решение вариационной задачи дает обобщенное решение задачи, поставленной в п. 1.

На основе вариационной постановки предлагаются численные методы решения контактных задач для слоистых тел. С помощью метода конечных элементов [17] вариационная задача (2.6) приводится к задаче минимизации функции многих переменных на выпуклом и замкнутом подмножестве конечномерного пространства. На такую задачу нелинейного программирования непосредственно переносятся теоремы о существовании и единственности решения, доказанные в п. 3. Использование вариационного неравенства (2.7) позволяет свести вопрос о сходимости метода конечных элементов в задачах с отставанием к изученным вопросам сходимости для классических задач [17].

Для решения двумерных и трехмерных контактных задач определения напряженно-деформированного состояния многослойных оснований разработаны пакеты программ на языке ФОРТРАН. Решение задачи нелинейного программирования производится с помощью предложенного в [8] варианта метода возможных направлений [16]. Для оценки погрешности приближенного решения использованы известные решения некоторых задач для линейно-упругих оснований. Сравнение основных характеристик (контактное давление, размеры площадок контакта) показывает хорошее совпадение, в том числе и для решений с особенностями.

Поступила 9 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fichera G.* Problemi elastostatici con vincoli unilateral: il problema di Signorini con ambigue condiziono al contorno. Mem. Acc. Naz. Lincei, 1964, Ser. 8, vol. 7, No. 5.
2. *Кравчук А. С.* К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
3. *Кравчук А. С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования. ПММ, 1978, т. 42, вып. 3.
4. *Johns T. G., Leissa A. W.* The normal contact of arbitrary shaped multilayered elastic bodies. In Mech. Contact Deform. Bodies, Delft, 1975.
5. *Шевляков Ю. А., Приварников А. К.* К расчету слоистых оснований. Прикл. механ., 1962, т. 8, вып. 2.
6. *Приварников А. К.* Пространственная деформация многослойного основания. В сб.: Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск, 1973.
7. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* Задачи теории упругости для многослойных сред. М., «Наука», 1973.
8. *Власенко Ю. Е., Кузьменко В. И., Фень Г. А.* Контактная задача для упругопластического многослойного пакета с учетом отставания слоев. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5.
9. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
10. *Карманов В. Г.* Математическое программирование. М., «Наука», 1975.
11. *Lions J.-L., Stampacchia G.* Variational inequalities. Communs Pure and Appl. Math., 1967, vol. 20, No. 3.
12. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., «Мир», 1971.
13. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М., «Мир», 1974.
14. *Казимиров В. И.* О полунепрерывности интегралов вариационного исчисления. Успехи матем. наук, 1956, т. 11, вып. 3.
15. *Михлин С. Г.* Численная реализация вариационных методов. М., «Наука», 1966.
16. *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М., «Мир», 1973.
17. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М., «Мир», 1977.