Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.38

О ДВОЙСТВЕННОСТИ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ

А. С. Кравчук

(Москва)

Работа посвящена построению двойственных постановок контактных задач, рассмотренных ранее в [1, 2], с использованием преобразования Юнга — Фенхеля — Моро в возмущениях исходных формулировок.

1. Основные определения и теоремы [3]. Рассматривается задача (задача P): найти

$$\inf_{v\in V} J(v), \quad J: V\to R$$

где V — банахово (ниже — гильбертово) пространство, R — множество действительных чисел. Заметим, что задача P содержит в себе полученные в [1,2] постановки задач о соприкосновении упругих тел, если положить

$$J(v) = \begin{cases} J(v), & v\in K \\ +\infty, & v \overline{\in} K \end{cases}$$

где K — подмножество в V (определение и свойства K см. в [1, 2]).

Схема построения двойственных постановок следующая [3]. Вводится пространство V^*, двойственное к V относительно билинейной формы $\langle,\rangle_V$, и пара пространств Y и Y^*, приведенных в двойственность посредством билинейной формы $\langle,\rangle_Y$: элементы Y и Y^* будем обозначать через p и p^*. Строится функционал $\Phi(v, p)$, $\Phi: V\times Y\to R$, такой, что $\Phi(v, 0) = J(v)$, и рассматривается задача (задача P_p): найти

$$\inf_{v\in V} \Phi(v, p)$$

Она называется возмущением задачи P (функционал Φ будем называть возмущением J).

К функционалу Φ применяется пребразование Юнга

$$\Phi^*(v^*, p^*) = \sup_{v\in V,\, p\in Y} \{\langle v^*, v\rangle_V + \langle p^*, p\rangle_Y - \Phi(v, p)\} \tag{1.1}$$

Задача P^*: найти

$$\sup_{p^*\in Y^*} \{-\Phi^*(0, p^*)\}$$

называется двойственной задаче P.

Теорема 1. Пусть V — рефлексивное банахово пространство, $\Phi \not\equiv +\infty$, существует $u_0\in V$, такое, что $p\to\Phi(u_0, p)$ конечно и непрерывно в нуле ($p\in Y$), $\lim J(v) = +\infty$ при $\|v\|\to+\infty$. Тогда каждая из задач P

и P^* имеет по крайней мере одно решение и

$$\inf_{v\in V} J(v) = \sup_{p^*\in Y^*} \{-\Phi^*(0,\ p^*)\}$$
$$\Phi(\bar u,\ 0) + \Phi^*(0,\ \bar p^*) = 0$$

где $\bar u$ — решение задачи P, $\bar p^*$ — решение задачи P^*.

Лагранжианом L° задачи P относительно введенного возмущения Φ называется функционал

$$L^\circ(v,\ p^*) = -\sup_{p\in Y} \{\langle p^*,\ p\rangle_Y - \Phi(v,\ p)\} \tag{1.2}$$

Теорема 2. При выполнении предположений теоремы 1 следующие утверждения эквивалентны:

а) $\bar u$, $\bar p^*$ — решения задач P и P^*,

б) пара $(\bar u,\ \bar p^*)$ — седловая точка лагранжиана L° на $V \times Y$, т. е.

$$L^\circ(\bar u,\ p^*) \leqslant L^\circ(\bar u,\ \bar p^*) \leqslant L^\circ(v,\ \bar p^*),\ \forall v,\ p^*$$

2. Задача о соприкосновении линейно-упругого тела с абсолютно жестким штампом. В этой задаче [1]

$$\begin{aligned} &V = \{v \mid v(x) \in H^1(\Omega);\ v(x) = 0,\ x \in S_u\} \\ &K = \{v \mid \Psi(x) + v(x)\cdot\nabla\Psi(x) \geqslant 0,\ \forall x \in S_c\} \\ &J(v) = {}^1/_2\, a(v,\ v) - L(v),\quad a(v,\ v) = \\ &= \int_\Omega a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(v)\,\varepsilon_{ij}(v)\,d\Omega,\quad L(v) = \int_\Omega \rho F v\, d\Omega + \int_{S_\sigma} P v\, dS \end{aligned} \tag{2.1}$$

Воспользовавшись результатами работы [2], перепишем определение K следующим образом:

$$\begin{aligned} &K = \{v \mid \delta(x) - v_N(x) \geqslant 0,\ \forall x \in S_c\} \\ &\delta(x) = \Psi(x) \,/\, |\nabla\Psi(x)|,\ v_N = v\cdot\nabla\Psi \,/\, |\nabla\Psi| \end{aligned}$$

Ниже предполагаем, что $\rho F \in L_2(\Omega)$, $P \in L_2(S_\sigma)$ и что граница S области Ω регулярна (определение регулярности см. в гл. V работы [4]). Гипотеза

$$a_{ijkh}\varepsilon_{kh}\varepsilon_{ij} \geqslant c\,\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij},\quad c = \text{const} > 0$$

позволяет, в совокупности с предположением о том, что $\operatorname{mes} S_u > 0$, обеспечить существование и единственность решения (анализ задачи при $S_u = \varnothing$ имеется в работе [2]).

Рассмотрим здесь три типа возмущений, которые приводят к новым, удобным для численного решения задачам.

1) *Возмущение типа Эрроу — Гурвица*

$$\Phi_1(v,\ p) = J(v) + \chi_\varepsilon(v,\ p) \tag{2.2}$$

где χ_ε — функция-индикатриса множества

$$\begin{aligned} &\varepsilon = \{(v,\ p) \in V \times Y \mid p \in Y,\ v_N(x) - p(x) \leqslant \delta(x),\ x \in S_c\} \\ &Y = \{p \mid p = p(x),\ x \in S_c,\ p \in L_2(S_c)\} \end{aligned}$$

Форма $\langle,\rangle_Y$ представляет собой скалярное произведение в $L_2(S_c)$.

Проведя все вычисления по формулам п. 1 (используя в качестве $\langle,\rangle_V$ скалярное произведение в $L_2(\Omega)$), придем к следующей двойственной задаче P_1^*: найти

$$\sup_{p^*\leqslant 0}\inf_{v\in V}[J(v)+\int_{S_c}(\delta-v_N)p^*dS]$$

Заметим, что «старых» переменных здесь исключить не удается, поэтому получилась задача разыскания седловой точки, к которой придем и в том случае, когда применим теорему 2. Заметим также, что сопряженная (двойственная) переменная p^* здесь имеет смысл распределенного контактного давления.

2) *Возмущение типа Кастильяно.* Здесь полагаем

$$\Phi_2(v, p)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}a_{ijkh}[\varepsilon_{kh}(v)-p_{kh}][\varepsilon_{ij}(v)-p_{ij}]d\Omega-L(v) \tag{2.3}$$

если $v\in K$ и $\Phi_2(v, p)=+\infty$ при $v\overline{\in} K$; таким образом, p — тензорная величина, и

$$Y=\{p \mid p_{ij}=p_{ji},\ p_{ij}=p_{ij}(x),\ x\in\Omega\}$$

Y^* определяется относительно билинейной формы

$$\int_{\Omega}p_{ij}^*p_{ij}d\Omega$$

следовательно, сопряженные переменные здесь — компоненты тензора напряжений.

Проведя вычисления по формулам п. 1, придем к следующей двойственной задаче P_2^*: найти

$$\sup_{\sigma\in M}\left\{-\frac{1}{2}\int_{\Omega}A_{ijkh}\sigma_{kh}\sigma_{ij}d\Omega+\int_{S_c}\sigma_N\delta dS\right\}$$

$$M=\{\sigma \mid \operatorname{div}\sigma+\rho F=0;\quad \sigma\cdot\nu|_{S_\sigma}=P;\quad \sigma_N|_{S_c}\leqslant 0,\quad \sigma_T|_{S_c}=0\}$$

Двойственные переменные обозначены обычным образом: σ — тензор напряжений, σ_{ij} — его компоненты в декартовой системе отсчета; A_{ijkh} — тензор модулей податливости, т. е. $\varepsilon_{ij}=A_{ijkh}\sigma_{kh}$, $\sigma_N=(\sigma\cdot\nu)\cdot\nu$, $\sigma_T=(\sigma\cdot\nu)-\sigma_N\nu$, ν — нормаль к S.

3) Скомбинируем теперь возмущения типа 1) и 2) следующим образом:

$$\Phi_3(v, p)=\Phi_2(v, p_1)+\chi_\varepsilon(v, p_2) \tag{2.4}$$

причем здесь Φ_2 определяется по формуле (2.3) всюду, а не только на K (ограничение $v\in K$ учитывается при помощи функции χ_ε). Положим

$$p=\{p_1, p_2\}\in Y_1\times Y_2 \tag{2.5}$$

$$\langle p^*, p\rangle=\langle p_1^*, p_1\rangle+\langle p_2^*, p_2\rangle \tag{2.6}$$

Проведя необходимые вычисления и заменив, как и в случае 2), p_1^* на σ, p_2^* на σ_N, получим следующую двойственную постановку (задача P_3^*): найти

$$\sup_{\sigma\in M}\inf_{v\in V}\left\{-\frac{1}{2}\int_{\Omega}A_{ijkh}\sigma_{kh}\sigma_{ij}d\Omega+\int_{S_c}(\delta-v_N)\sigma_N dS\right\}$$

Замечание 1. Задачи $P_2{}^*$ и $P_3{}^*$ трудны в том отношении, что при их приближенном решении (например по методу конечных элементов) возникает необходимость удовлетворить уравнениям равновесия внутри области Ω, поэтому имеет смысл перейти к формулировкам с применением лагранжианов. Используя определение (1.6), найдем, что

$$L_2{}^\circ(v, p^*) = -\int\limits_\Omega \left[\frac{1}{2} A_{ijkh}\sigma_{kh}\sigma_{ij} - \sigma_{ij}e_{ij}(v)\right] d\Omega - L(v) \tag{2.7}$$

$$L_3{}^\circ(v, p^*) = L_2{}^{\circ\circ}(v, p^*) + \int\limits_{S_c} (-\delta + v_N)\sigma_N dS \tag{2.8}$$

($L_2{}^{\circ\circ}$ определяется по формуле (2.7) всюду, а не только для $v \in K$; если $v \overline{\in} K$, то $L_2{}^\circ = +\infty$; постановка задачи с $L_1{}^\circ$, получающимся из (1.2) при $\Phi = \Phi_1$, не дает ничего нового).

На основании теоремы 2 получаем следующие задачи разыскания седловой точки лагранжиана:

$$P_{iL}^*: \sup_{p^* \in Y^*} \inf_{v \in V} L_i{}^\circ(v, p^*)$$

$$P_{iL}: \inf_{v \in V} \sup_{p^* \in Y^*} L_i{}^\circ(v, p^*), \quad i = 2, 3$$

Замечание 2. Если вместо условия $v(x) = 0$ на S_u задано условие $u(x) = g(x)$, то в некоторых очевидных случаях в выражении для Φ^* возникает дополнительное слагаемое вида

$$\int\limits_{S_u} g \cdot \sigma \cdot \nu dS$$

3. Обобщение на случай деформационной теории пластичности без разгрузок. Задаче о соприкосновении тела с абсолютно жестким гладким неподвижным штампом соответствует следующий функционал:

$$J_g(v) = J(v) - j(v) \tag{3.1}$$

$$j(v) = 3\mu \int\limits_0^{e_u(v)} \left[\int\limits_\Omega \omega(s)\, s d\Omega\right] ds \tag{3.2}$$

где $J(v)$ определяется по формуле (2.1).

Возмущение 1) п. 2 приводит к задаче $P_1{}^*$ с заменой $J(v)$ на $J_g(v)$; при использовании возмущения типа Кастильяно в выражении для $\Phi_2{}^*(0, p^*)$ возникает дополнительное слагаемое

$$\frac{2}{3E} \int\limits_0^{\sigma_u(\sigma)} \left[\int\limits_\Omega \omega^\circ(\zeta)\,\zeta d\Omega\right] d\zeta \tag{3.3}$$

$$\omega^\circ = \omega^\circ(\sigma_u) = 3E\varphi^{-1}(\sigma_u) / (2\sigma_u) - (1 + n)$$

где E — модуль Юнга, $\sigma_u(\sigma)$ — интенсивность напряжений, n — коэффициент Пуассона, оператор φ^{-1} определяет зависимость интенсивности деформаций от интенсивности напряжений.

Добавочное слагаемое возникает также в выражениях для $\Phi_3{}^*(0, p^*)$ и лагранжианов $L_2{}^\circ$ и $L_3{}^\circ$.

Результаты, установленные в работе [1], позволяют сделать вывод о том, что к рассмотренным в п. 2 и 3 задачам применимы теоремы 1 и 2, и, кроме того, имеет место единственность.

4. **Задача о соприкосновении нескольких упругих тел.** Как установлено в работе [2], здесь необходимо минимизировать функционал

$$J(v) = \sum_{\alpha} J^{\alpha}(v) \tag{4.1}$$

при ограничениях

$$v_N^{\alpha} + v_N^{\beta} \leqslant \delta \tag{4.2}$$

где $J^{\alpha}(v^{\alpha})$ — функционалы вида (2.1) или (3.1), α и β — номера соприкасающихся тел, δ — начальный зазор между телами Ω^{α} и Ω^{β} (более точные определения см. в [2]). Возмущения типа 1) — 3) дают здесь следующие двойственные задачи соответственно:

$$P_1^*: \sup_{p_{\alpha}^* \leqslant 0} \inf_{v \in V} \left[J(v) + \sum_{\alpha} \int_{S_c^{\alpha}} (\delta - v_N^{\alpha} - v_N^{\beta}) p_{\alpha}^* dS \right]$$

$$P_2^*: \sup_{\sigma^{\alpha} \in M^{\alpha}} \left\{ \sum_{\alpha} \left[-\frac{1}{2} \int_{\Omega^{\alpha}} A_{ijkh} \sigma_{kh} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{S_c^{\alpha}} \sigma_N \delta dS \right] \right\}$$

$$P_3^*: \sup_{\sigma^{\alpha} \in M^{\alpha}} \inf_{v \in V} \left\{ \sum_{\alpha} \left[-\frac{1}{2} \int_{\Omega^{\alpha}} A_{ijkh} \sigma_{kh} \sigma_{ij} d\Omega + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{S_c^{\alpha}} (\delta - v_N^{\alpha} - v_N^{\beta}) \sigma_N dS \right] \right\}$$

Выражения для лагранжианов и соответствующие постановки также получаются без труда на основании формул (2.7) и (2.8) путем суммирования по всем телам системы.

Результаты работы [2] позволяют и здесь применить теоремы 1 и 2, из которых, в частности, следует вывод о существовании и единственности решения.

Отметим, что рассмотренная здесь задача как частный случай содержит важную для практики задачу о соприкосновении упругого тела с абсолютно жестким штампом в случае, когда штамп подвижен и задан главный вектор и главный момент усилий, действующих на штамп. Поле перемещений штампа определяется двумя постоянными векторами — жесткого смещения и поворота, и в двойственных постановках эти векторы войдут в интегралы по S_c.

5. **Замечание о контактной задаче в теории идеальной пластичности Хенки.** В данной теории определяющее уравнение представляет собой связь между тензором полных деформаций ε_{ij}, пластических деформаций λ_{ij} и тензором напряжений σ_{ij} (5.1), причем поле напряжений должно подчиняться условию пластичности (5.2), а пластическая деформация удовлетворяет неравенству (5.3) [5]:

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkh}\sigma_{kh} + \lambda_{ij} \tag{5.1}$$

$$F(\sigma_{ij}) \leqslant 0 \tag{5.2}$$

$$\lambda_{ij}(\tau_{ij} - \sigma_{ij}) \leqslant 0, \quad \forall\, \tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad F(\tau_{ij}) \leqslant 0 \tag{5.3}$$

Как известно [5], задача об определении поля напряжений при стесненном пластическом течении сводится к минимизации функционала Кастильяно при ограничении (5.2), следовательно, в контактных задачах при отсутствии течения тела в целом приходим к задаче типа P_3^* при дополнительном ограничении (5.2).

Это утверждение можно установить и непосредственно.

В самом деле, проинтегрируем неравенство (5.3) по области Ω и подставим вместо λ_{ij} величину $\varepsilon_{ij} - A_{ijkh}\sigma_{kh}$; воспользовавшись формулой Грина, уравнениями равновесия и граничными условиями для величин σ и τ, найдем, что

$$\int\limits_{\Omega} A_{ijkh}\sigma_{kh}(\tau_{ij} - \sigma_{ij})\, d\Omega \geqslant \int\limits_{S_c} (\tau_{ij} - \sigma_{ij})\, u_i \nu_j\, dS \tag{5.4}$$

Для простоты принимается, что $u|_{S_u} = 0$, $\operatorname{mes} S_u > 0$.

Запишем условие непроникания в виде $u_N \leqslant \delta$ и заметим, что

$$(\tau_N - \sigma_N)\, u_N \geqslant (\tau_N - \sigma_N)\, \delta \tag{5.5}$$

(в точках соприкосновения имеет место строгое равенство, на свободной поверхности $(\tau_N - \sigma_N)\, u_N \geqslant \tau_N \delta$). Использовав представление $(\tau_{ij} - \sigma_{ij})\, u_i \nu_j = (\tau_T - \sigma_T)\, u_T + (\tau_N - \sigma_N)\, u_N$, условие отсутствия трения и оценку (5.5), приходим к выводу, что рассматриваемая задача эквивалентна задаче $P_3{}^*$ при дополнительном ограничении (5.2).

Поступила 19 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кравчук А. С.* К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров. Докл. АН СССР, 1976, т. 230, № 2.
2. *Кравчук А. С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования. ПММ, 1978, т. 42, вып. 3.
3. *Ekeland I., Temam R.* Analyse convexe et problemes variationnels. Paris, Dunod, 1974.
4. *Вольперт А. И., Худяев С. И.* Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М., «Наука», 1975.
5. *Duvant G., Lions J.-L.* Les inequations en mecanique et en physique. Paris, Dunod 1972.