Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.3 : 534.1

О ВОЗБУЖДЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВОЛН В БЕСКОНЕЧНОЙ СЛОИСТОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЕ

П. Е. Краснушкин

(Москва)

Рассмотрены вынужденные гармонические колебания в бесконечной слоистой упругой полосе. Они представлены суммой нормальных и присоединенных волн, распространяющихся вдоль полосы, т. е. вдоль слоев. Изучены свойства этих волн, включающие дисперсионные характеристики.

Разложение вынужденных колебаний упругой слоистой полосы по нормальным и присоединенным волнам, бегущим вдоль полосы, производится здесь методом нормальных волн [1], развитым в работах [1–3]. Для его применения левая часть неоднородной краевой задачи для амплитуд колебаний представляется в виде суммы двух дифференциальных операторов; один зависит только от поперечной координаты, полосы y, другой — от координаты x вдоль полосы. «Продольный» оператор должен иметь первый порядок. Исходная краевая задача для амплитуд смещений приводится к указанному выше каноническому виду удвоением размерности вектор-функции, на которую действуют операторы. Искомое представление получено разложением решения в ряд по собственным и присоединенным функциям поперечного оператора. Его собственные значения являются волновыми числами нормальных волн. Указанный оператор несамосопряженный даже в полосе без потерь, поэтому кроме незатухающих нормальных волн в решение входят волны с комплексными волновыми числами и волны, присоединенные к нормальным.

Заметим, что еще в 1904 г. Лэмб [4] методом преобразования контурного интеграла получил решение для однородной полосы в виде суммы волн, бегущих по оси x с постоянными фазовыми скоростями и неизменными формами распределения амплитуд смещений по оси y. В [2, 3] показано, что эти волны совпадают с нормальными. Присоединенные волны были впервые введены в работе [3] в задаче распространения электромагнитных волн в слоистой среде.

Широко распространен также подстановочный метод (см., например [5]), в котором выражение для волны, сохраняющей форму колебаний по оси y и фазовую скорость по оси x, подставляется в исходную краевую задачу для амплитуд смещений упругой полосы. Он приводит к спектральной задаче для квадратичного пучка [6–8], эквивалентной спектральной задаче поперечного оператора (см. п. 3) и определяющей волновые числа и укороченные формы нормальных волн, но не амплитуды.

1. Исходная краевая задача и ее приведение к каноническому виду. Обозначив через D частные производные по координатам, указанным в нижнем индексе, получим для вектор-функции $\mathbf{u} = \mathrm{col}\,(u_x, u_y)$, где u_x и u_y — амплитуды смещений колебаний в полосе $(-\infty < x < \infty$

---

[1] *Краснушкин П. Е.* Метод нормальных волн в применении к волноводам и их алгебраическим прообразам. Докт. дисс., МГУ, 1945.

$0 \leqslant y \leqslant d$), вызванных силой $\mathbf{f}(x, y) \exp i\omega t$, краевую задачу

$$
\begin{aligned}
&[E_0 D_{xx} + E_1 D_{yy} + E_2 D_{xy} + E_3 D_y + E_4 D_x + \rho\omega^2]\mathbf{u} = \mathbf{f} \\
(1.1)\qquad & y = 0, \quad y = d, \quad [E_1 D_y + E D_x]\mathbf{u} = 0 \\
& |x| \to \infty, \quad |\mathbf{u}(x, y)| \to 0 \\
& E_0 = \begin{Vmatrix} \nu_* & 0 \\ 0 & \mu_* \end{Vmatrix}, \quad E_1 = \begin{Vmatrix} \mu_* & 0 \\ 0 & \nu_* \end{Vmatrix}, \quad E_2 = \begin{Vmatrix} 0 & \nu_* - \mu_* \\ \nu_* - \mu_* & 0 \end{Vmatrix}, \\
& E = \begin{Vmatrix} 0 & \mu_* \\ \lambda_* & 0 \end{Vmatrix} \\
& E_3 = D_y E_1, \quad E_4 = D_y E \\
& \nu_* = \lambda_* + 2\mu_*, \quad \lambda_* = \lambda + i\omega(\eta - 2\zeta / 3), \quad \mu_* = \mu + i\omega\zeta
\end{aligned}
$$

Здесь коэффициенты Ламэ λ, μ и плотность полосы ρ — непрерывные функции y, η и ζ — коэффициенты вязкости, обращающиеся в нуль, когда параметр диссипации $\varepsilon \to 0$. Краевые условия при $y = 0$ и $y = d$ в (1.1) относятся к свободной полосе. Для полосы, закрепленной по краям, они заменяются условиями $\mathbf{u} = 0$. Функция $\mathbf{f}(x, y) = \operatorname{col}(f_x, f_y)$ отлична от нуля лишь на интервале (x_1, x_2). При $\varepsilon \neq 0$ краевая задача (1.1) имеет единственное решение. Решение для полосы без потерь ($\eta = \zeta = 0$) получим из него при $\varepsilon \to 0$.

Для приведения краевой задачи (1.1) к каноническому виду введем вектор-функцию $\mathbf{v} = \operatorname{col}(v_x, v_y)$ с помощью соотношения (1.2)

$$
(1.2)\qquad \mathbf{v} = [i\alpha D_x + \beta D_y]\mathbf{u}; \quad \alpha = \|\alpha_{mn}\|, \quad \beta = \|\beta_{mn}\|; \quad m, \quad n = 1, 2.
$$

Здесь α_{mn}, β_{mn} — произвольные комплексные числа, подчиняющиеся условию $\det \alpha \neq 0$. Для четырехкомпонентной вектор-функции $\mathbf{w} = \operatorname{col}(u_x, u_y, v_x, v_y)$ получим из (1.1) краевую задачу в используемой в работах [1-3] канонической форме

$$
\begin{aligned}
(1.3)\qquad & \mathbf{L}_x\mathbf{w} + \mathbf{L}_y\mathbf{w} = \mathbf{F}(x, y) = \operatorname{col}(0, \mathbf{f}^0) \\
& \mathbf{0} = \operatorname{col}(0, 0), \quad \mathbf{f}^0 = \operatorname{col}(f_x^0, f_y^0) = -\alpha E_0 \operatorname{col}(f_x, f_y)
\end{aligned}
$$

Здесь $\mathbf{L}_x$ — дифференциальный оператор первого порядка, порожденный дифференциальным выражением $l_x = i\mathbf{E}\partial / \partial x$ ($\mathbf{E}$ — единичная матрица размерности 4×4) и краевыми условиями $|\mathbf{w}| \to 0$ при $|x| \to \infty$, $\mathbf{L}_y$ — дифференциальный оператор («поперечный»), порожденный блочной матрицей дифференциальных выражений

$$
\begin{aligned}
(1.4)\qquad & l_y = \| l_{ij} \|; \; i, j = 1, 2; \; l_{11} = BD_y, \; l_{12} = -\alpha^{-1}, \; B = \alpha^{-1}\beta \\
& l_{21} = \alpha(B^2 - iE_2'B - E_1')D_{yy} - \alpha(E_3' + iE_4'B)D_y - \\
& - \rho\omega^2\alpha E_0^{-1} \\
& l_{22} = (i\alpha E_2' - \beta)\alpha^{-1}D_y + i\alpha E_4'\alpha^{-1}; \quad E_k' = E_0^{-1}E_k, \\
& k = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

и краевыми условиями

$$
(1.5)\qquad y = 0, \; y = d, \quad [E_1 + iEB]D_y\text{и} - iE\alpha^{-1}\mathbf{v} = 0
$$

Оператор L_y, по собственным элементам которого производится разложение решения задачи (1.3), получим из оператора $\mathbf{L}_y$ заменой $\partial / \partial y$ на d / dy. Оператор L_y действует на вектор-функцию $\mathbf{W}(y) = \operatorname{col}(U_x, U_y, V_x, V_y) = \mathbf{w}$, где x считается фиксированным параметром. $\mathbf{W}(y)$ является элементом векторного функционального пространства со скалярным произведением (W, W′) из L_2.

Спектральные свойства L_y не зависят от выбора α и β (см. ниже п. 3). Для того, чтобы придать физический смысл скалярному произведению, выберем в качестве L_y конкретный оператор L_y^1, $\alpha_{11} = \lambda_* + 2\mu_*$, $\alpha_{22} = -\mu_*$, $\beta_{12} = i\lambda_*$, $\beta_{21} = -i\mu_*$ (остальные α_{mn} и β_{mn} равны нулю). Тогда вектор-функция $\mathrm{W}(x, y) = \mathrm{col}\,(u_x, u_y, i\sigma_{xx}, -i\sigma_{xy})$, где σ_{xx}, σ_{xy} — компоненты тензора напряжений σ. Осредненный по времени и по сечению $x = \mathrm{const}$ поток колебательной мощности P через данное сечение выражается через скалярное произведение

$$P = (\mathbf{J}w, w) = \int_0^d [(u_x\sigma_{xx}^* - u_y\sigma_{xy}^*) + (u_x{}^*\sigma_{xx} - u_y{}^*\sigma_{xy})]\,dy, \tag{1.6}$$

$$J = i\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{E} \\ \mathrm{E}, & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь E — единичная матрица размерности 2×2. J — иот-оператор, звездочкой отмечены комплексно-сопряженные величины.

Дифференцируя (1.6) и принимая во внимание (1.3), получим в интервалах оси x, где силы отсутствуют, соотношение

$$D_yP = i\,(JL_y{}^1\mathrm{w}, \mathrm{w}) - i\,(\mathrm{w}, JL_y{}^1\mathrm{w}) \tag{1.7}$$

В силу краевого условия при $|\,x\,| \to \infty$ в случае $\varepsilon \neq 0$ $D_xP < 0$ для $x > x_2$ и $D_xP > 0$ для $x < x_1$. При $\varepsilon = 0$ из закона сохранения энергии следует, что $D_xP = 0$ и $(JL_y{}^1\mathrm{w}, \mathrm{w}) = (\mathrm{w}, JL_y{}^1\mathrm{w})$, т. е. оператор $L_y{}^1$ является иот-самосопряженным.

2. Разложение решения краевой задачи по нормальным и присоединенным волнам, бегущим вдоль полосы. Ниже показано (см. п. 3), что спектр оператора $L_y{}^1$ — дискретный с единственной точкой сгущения в бесконечности. Кроме того, оператор $L_y{}^1$ регулярен по Тамаркину [9][1]. Поэтому, предполагая функции F достаточно гладкими по y, представим решение (1.3) в виде

$$\mathrm{w}(x, y) = \sum_j \sum_{k=1}^{\tau_j} \Psi_j{}^k(x)\,\mathrm{W}_j{}^k(y) \tag{2.1}$$

Здесь $\mathrm{W}_j{}^k$ $(k = 1, 2, \ldots, \tau_j)$ — собственные $(k = 1)$ и присоединенные $(k > 1)$ функции оператора $L_y{}^1$, определяемые из уравнений

$$(L_y{}^1 - \gamma_j\mathrm{E})\mathrm{W}_j{}^k + \mathrm{W}_j{}^{k-1} = 0, \quad \mathrm{W}_j{}^0 = 0 \tag{2.2}$$

Здесь γ_j — собственные значения оператора $L_y{}^1$. Функции $\mathrm{W}_j{}^k$ подчинены условиям биортогональности

$$(\mathrm{W}_j{}^k, \mathrm{G}_{j'}{}^{k'}) = 0, \ j \neq j' \text{ или } k \neq k'; \ (\mathrm{W}_j{}^k, \mathrm{G}_j{}^k) = N_j{}^k \tag{2.3}$$

Здесь $\mathrm{G}_j{}^k$ — собственные и присоединенные функции оператора, сопряженного $L_y{}^1$. Функции $G_j{}^k$ определяются из цепочки уравнений, аналогичной (2.2) [3]. Вследствие иот-самосопряженности $L_y{}^1$ скалярные произведения в (2.3) выражаются через интегралы потока мощности P

---

[1] На этот факт обратил внимание автора А. Г. Костюченко.

(1.6). Это не имеет место для произвольных α и β. Так, например, в случае [10], который следует из (1.2) при $\alpha_{11} = \beta_{12} = \lambda_* + 2\mu_*$, $\alpha_{22} = \beta_{21} = -\mu_*$ (остальные α_{mn} и β_{mn} равны нулю), возникает так называемая нагруженная ортогональность (интегралы дополняются суммами от краевых условий).

Подставляя (2.1) в (1.3) и приняв во внимание (2.3), получим для $\Psi_j{}^k (k = 1, 2, \ldots, \tau_j)$ цепочку уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}(2.4)\qquad & id\Psi_j{}^k/dx + \gamma_j\Psi_j{}^k + \Psi_j^{k+1} = (\mathbf{F}, \mathbf{G}_j{}^k)/N_j{}^k, \quad \Psi_j^{|\tau_j+1} \equiv 0,\\ & |x| \to \infty, \ |\Psi_j{}^k| \to 0\end{aligned}$$

Для сосредоточенной силы $F(x, y)\delta(x - x')$ ищем решение (2.4) с помощью функций Грина. В результате разложение (2.1) примет вид

$$\begin{aligned}(2.5)\qquad & \mathbf{w}(x, x'; y) = \sum_{j\pm} \sum_{l=1}^{\tau_{j\pm}} \mathbf{F}_{j\pm}^l(x')\, \mathbf{Q}_{j\pm}^l(x, x'; \gamma_{j\pm}\\ & \mathbf{Q}_{j\pm}^l(x, x'; \gamma_{j\pm}) = \exp[i\gamma_{j\pm}(x - x')]\Big[\mathbf{W}_{j\pm}^l + i(x - x')\mathbf{W}_{j\pm}^{l-1} + \ldots\\ & \ldots + \frac{i^{l-1}(x - x')^{l-1}}{(l-1)!}\mathbf{W}_{j\pm}^1\Big]\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{F}_j{}^l(x')$ — правые части (2.4), знаками плюс и минус отмечены γ_j, находящиеся в верхней и нижней полуплоскости γ (при $\varepsilon \neq 0$ вещественных γ_j нет); $\mathbf{w}(x, x'; y)$ равна правой части (2.5) со знаком плюс для $x > x'$ и со знаком минус для $x < x'$.

По определению член суммы (2.5) номера j $(l = 1)$ называется нормальной волной номера j. Каждому простому собственному значению γ_j соответствует одна нормальная волна, отличная от нуля справа $(x > x')$ для γ_{j+} и слева $(x < x')$ для γ_{j-} от сечения $x = x'$. Четырехкомпонентная вектор-функция $\mathbf{W}_j{}^1(y)$ называется формой нормальной волны номера j. Из (1.2) следует, что

$$(2.6)\qquad \mathbf{W}_j{}^1(y) = \begin{Vmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{Z}_j\end{Vmatrix}\mathbf{U}_j{}^1(y); \quad \mathbf{Z}_j = i\gamma_j\begin{Vmatrix}\lambda_*+2\mu_* & 0\\ 0 & -\mu_*\end{Vmatrix} + i\begin{Vmatrix}0 & \lambda_*\\ -\mu_* & 0\end{Vmatrix}D_y$$

Здесь $\mathbf{Z}_j$ — оператор волнового сопротивления нормальной волны номера j, устанавливающий связь между компонентами тензора напряжений и смещений в вектор-функции формы нормальной волны. По заданной форме $\mathbf{W}_j{}^1$ в некотором сечении полосы $x' = \text{const}$ нормальная волна может быть восстановлена во всем интервале (x', ∞) или $(-\infty, x')$, что позволяет рассматривать нормальную волну как эволюционный процесс, развертывающийся по оси x.

Члены суммы (2.5) с номерами j, $l\,(l > 1)$ называются, согласно [2, 3], присоединенными волнами. Для них характерно нарастание амплитуды по степенному закону с увеличением $|x - x'|$, которое подавляется экспоненциальным затуханием, всегда существующим при $\varepsilon \neq 0$, что обеспечивает выполнение условий (1.1) при $|x| \to \infty$.

Интегрируя (2.5), получим решение задачи (1.3) для произвольной внешней силы $\mathbf{F}\,(x,\, y)$ в виде

$$(2.7)\qquad \mathbf{w}\,(x,\, y) = \sum_{j+} \sum_{l=1}^{\tau_{j+}} \int_{-\infty}^{x} \mathbf{F}^l_{j+}(x')\, \mathbf{Q}^l_{j+}\, dx' + \sum_{j-} \sum_{l=1}^{\tau_{j-}} \int_{x}^{\infty} \mathbf{F}^l_{j-}(x')\, \mathbf{Q}^l_{j-}\, dx'$$

3. Основные свойства нормальных волн. Исключая $\mathbf{V}_j{}^1$ из (2.2) при $k = 1$, получим, приняв во внимание (1.4) и (1.5), спектральную задачу для квадратичного пучка относительно параметра γ

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} &[-\gamma^2 E_0 + i\gamma\,(E_2 D_y + E_4) + (E_1 D_{yy} + E_3 + \rho\omega^2)]\mathbf{U}^1 = 0 \\ &y = 0,\ y = d,\quad [E_1 D_y + i\gamma E]\mathbf{U}^1 = 0 \end{aligned}$$

Задача (3.1) определяет волновые числа γ_j и укороченные формы $\mathbf{U}_j{}^1$ нормальных волн. Аналогично исключением $\mathbf{V}_j{}^k$ из остальных уравнений (2.2) получаем цепочку квадратичных пучков для определения $\mathbf{U}_j{}^k$. Так как α и β не входят в уравнения квадратичных пучков, то для класса представлений оператора $L_y\,[\alpha,\, \beta]$ имеет место следующее свойство.

1°. Волновые числа γ_j нормальных волн не зависят от выбора α и β в операторе L_y, а их формы различаются лишь компонентами

$$\mathbf{V}_j{}^1\,(y) = (-\gamma_j\alpha + \beta D_y)\mathbf{U}_j{}^1\,(y)$$

В работах [6-8] квадратичные пучки получают из исходных уравнений подстановкой $\mathbf{u} = \mathbf{U}\exp i\gamma x$ и для их исследования удвоением размерности $\mathbf{U}$ (а не $\mathbf{u}$) строят эквивалентный пучку оператор $L^0\,[\alpha = 1,\, \beta = 0]$. Поэтому, в силу свойства 1°, можно использовать результаты работы [8] о колебаниях упругого цилиндра. Среди них выделим следующее свойство.

2°. Спектр волновых чисел γ_j для свободной и закрепленной полосы переменной плотности $\rho\,(y)$ при $\varepsilon = 0$ дискретен с единственной точкой сгущения в бесконечности. Число вещественных γ_j конечно и равно $N\,(\varepsilon)$. Система форм $\{\mathbf{W}_j{}^k\}$ полна в $\mathbf{H}_2{}^1 \oplus \mathbf{H}_2{}^1$, а система укороченных форм $\{\mathbf{U}_j{}^k\}$ двукратно полна в $\mathbf{H}_2{}^1$, где $\mathbf{H}_2{}^1$ — пространство Соболева.

Из вида $L_y{}^0$, получаемого из (1.4), следует свойство 3°.

3°. При произвольном ε нормальные волны полосы образуют пары с волновыми числами γ_j и $-\gamma_j$.

4°. При $\varepsilon = 0$ комплексные волновые числа образуют четверки, симметричные относительно вещественной и мнимой оси плоскости γ. Для оператора L_y формы $\mathbf{W}_{j\pm}$ этих нормальных волн имеют вид $J\mathbf{G}_{j\mp}$.

Вследствие иот-самосопряженности оператора $L_y{}^1$ при $\varepsilon = 0$ его спектр образует комплексно-сопряженные пары γ_j и $\gamma_j{}^*$, что с учетом свойства 3° доказывает свойство 4°.

5°. При $\varepsilon = 0$ нормальные волны с мнимыми и комплексными волновыми числами не несут волновой энергии вдоль полосы.

Из свойства 4° следует $P_{j+} = (J\mathbf{W}_{j+},\, \mathbf{W}_{j+}) = (J\mathbf{W}_{j+},\, J\mathbf{G}_{j-}) = 0$, что и доказывает свойство 5°.

Заметим, что для волн с комплексными волновыми числами на отдельных участках сечения $x = \mathrm{const}$ имеются отличные от нуля потоки энергии противоположных направлений, компенсирующие друг друга в среднем на сечении.

Из закона сохранения энергии, примененного к отрезку полосы $(x, x + dx)$, следует, что при малом ε для нормальных волн с мнимыми и комплексными волновыми числами $P_j > 0$ для γ_{j+} и $P_j < 0$ для γ_{j-}. Для нормальных волн с вещественными γ_j при $\varepsilon = 0$ $\mathrm{W}_j^1 = J\mathrm{G}_j^1$ и $P_j = (J\mathrm{W}_j^1, \mathrm{W}_j^1) \neq 0$. Из (1.7) следует, что $P_j = P_0 \exp[-2\mathrm{Im}\gamma_j x]$. Поэтому при малом ε, в силу закона сохранения энергии для указанного выше отрезка, нормальные волны с $P_j > 0$ будут иметь волновые числа γ_{j+}, а нормальные волны с $P_j < 0$ — γ_{j-}.

Ниже нормальные волны с волновыми числами γ_{j+} $(P_j > 0)$ будем называть плюс-волнами, а нормальные волны с волновыми числами γ_{j-} $(P_j < 0)$ — минус-волнами. Будем также различать нормальные волны по знаку дисперсии, т. е. по направлению групповой скорости $v_g = d\omega/d\gamma$. Так как v_g равна скорости потока энергии, то для нормальных волн с вещественными γ_j имеет место следующее свойство.

6°. При $x > x'$ $(x < x')$ нормальные волны с положительной дисперсией имеют фазу, распространяющуюся в положительном (отрицательном) направлении оси x, т. е. по потоку P, а волны с отрицательной дисперсией имеют фазу, распространяющуюся из ∞ $(-\infty)$, т. е. против потока P.

В ряде работ по изучению свойств волн, распространяющихся вдоль полосы без искажения формы, в исходные уравнения (1.1) подставляется выражение $\mathrm{u} = \mathrm{U}(y) \exp i\gamma x$, что приводит к задаче (3.1) для определения γ_j и $\mathrm{U}_j(y)$. Так как задача (3.1) эквивалентна спектральной задаче (2.2) при $k = 1$ для оператора L_y, то все волны, полученные подстановочным методом, в частности волны Лэмба, а также волны Релея и другие поверхностные волны, являются нормальными волнами дискретного спектра оператора L_y. Восстановление полных форм W_j^1 этих волн по полученным укороченным формам U_j^1 производится по формуле (2.6) и содержит произвол в выборе α и β. Подстановочным методом в [11] изучаются волны в анизотропных полосах.

4. Дисперсионные зависимости для нормальных волн. Обозначим ω, d и коэффициенты параметризованных функций $\rho(y)$, $\lambda(y)$ и $\mu(y)$ через $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_R$ или сокращенно $\mathrm{p} = \{p_i\}$. Будем считать их комплексными величинами, а p — точкой параметрического пространства C^R комплексных переменных размерности R. Зависимости $\gamma_i(\mathrm{p})$, получаемые из (2.2) при $k = 1$, где $L_y = L_y(\mathrm{p})$, в случае, когда точка $\mathrm{p} \in \mathrm{C}^R$ совершает в C^R некоторый путь Λ, назовем дисперсионными. Так же, как в [12, 13], будем считать их ветвями аналитической функции R комплексных переменных, описывающей преобразования волн в окрестностях точек ветвления, являющихся точками кратности γ_j.

Вводя нормированный базис $\{\mathrm{W}_r^0(y)\}$, $(\mathrm{W}_r^0, \mathrm{W}_s^0) = \delta_{rs}$ (δ_{rs} — символ Кронекера) и разлагая по нему функцию w, перейдем от уравнений (1.3) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (C_r — коэффициенты разложения)

$$[i\mathrm{E}d/dx + \mathrm{A}]C_r = F_r, \quad \mathrm{A} = \|a_{rs}\|, \quad a_{rs} = (L_y\mathrm{W}_r^0, \mathrm{W}_s^0) \tag{4.1}$$

описывающей совокупность взаимодействующих парциальных систем [14], получаемых из (4.1) при $a_{rs} = 0$, $r \neq s$ и характеризуемых парциальными волнами с волновыми числами a_{rr}. В совокупности таких систем при $a_{rs} \neq 0$ возможны нормальные волны, волновые числа которых являются собственными значениями матрицы **A**. Эти волны являются представлениями рассмотренных выше нормальных волн в базисе $\{\mathbf{W}_r^0\}$. Коэффициенты a_{rs}, согласно (4.1), зависят от $\{p_i\}$ и для изучения дисперсионных зависимостей нормальных волн в представлении базиса $\{\mathbf{W}_r^0\}$ введем параметры $\{a_i\}$, образованные с помощью алгебраических операций над элементами матрицы **A** и находящиеся во взаимооднозначном соответствии с параметрами $\{p_i\}$ оператора L_r. Для изучения окрестности двойной кратности γ_1, γ_2 достаточно рассмотреть параметрическое пространство $\mathbf{C}^2(p_1, p_2)$. Заменим его пространством $\mathbf{C}^2(a_1, a_2)$, выбирая $\mathbf{W}_r^0$, $r = 1, 2$ так, чтобы при всех $(p_1, p_2) \in \mathbf{C}^2$ в окрестности точек двойной кратности γ_1, γ_2 влияние других парциальных систем на системы $r = 1, 2$ было несущественно, т. е. коэффициенты волновой связанности $K_{rs} = \sqrt{a_{rs}a_{sr}} / (a_{rs} - a_{sr}) \ll 1$ при $r = 1, 2$ и любом $r \neq s$. Положим $a_1 = a_{11} - a_{22} = C\Delta\omega$, где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, $a_2 = Cl$, где $l = \sqrt{a_{12}, a_{21}}$, C — постоянная. Считаем, что $p_1 = \omega$, а p_2 выбрано так, что между (p_1, p_2) и (a_1, a_2) существует взаимооднозначная зависимость. В этом случае

$$\gamma_{1,2} \sim A + B\Delta\omega \pm C\sqrt{\Delta\omega^2 + l^2} \tag{4.2}$$

и формы нормальных волн в базисе $\mathbf{W}_r^0$, $r = 1, 2$ имеют вид

$$\mathbf{W}_{1,2}^1 \sim d_{1,2}^1\mathbf{W}_1^0 + d_{1,2}^2\mathbf{W}_2^0, \quad \varkappa_{1,2} \sim [\Delta\omega \mp \sqrt{\Delta\omega^2 + l^2}] / l \tag{4.3}$$

Здесь $\varkappa = d^1 / d^2$ — коэффициент распределения форм волн [14]. $p_0 = p\,(\Delta\omega = 0,\ l = 0) \in \mathbf{C}^2$, где $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_0$, является точкой диагонализируемой кратности. Точки кордановой кратности $\tau_j = 2$ лежат на прямых $\Delta\omega = \pm il$, пересекающихся в точке $p_0 \in \mathbf{C}^2$.

Построим из (4.2) однозначную аналитическую функцию. Для этого [12, 13] введем два экземпляра пространства $\mathbf{C}^2$, $\mathbf{C}_1^2$ и $\mathbf{C}_2^2$ и соединим их по гиперповерхности разреза S_c, проходящей через прямые $\Delta\omega_{1,2} = \pm il$. На путях Λ, пересекающих S_c, происходит преобразование нормальных волн друг в друга.

Для случаев, когда ω вещественно и нормальные волны подчиняются свойствам 3° и 4°, рассмотрим семейства путей двух видов: 1) l — мнимое и частоты $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm |\,l\,|$, при которых возникают жордановы кратности, лежат на вещественной оси ω; 2) l вещественно и частоты $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm i\,|\,l\,|$ комплексно-сопряженные.

Для мнимого l (преобразования первого рода) пути Λ пересекают обе жордановы точки. Учитывая свойство 4°, из (4.2) в окрестности первой жордановой точки $\gamma_1(\omega_1)$ $(\omega_1 = \omega_0 - |\,l\,|)$ получим

$$\gamma_{1,2} \approx A + B\,(\omega - \omega_0) \pm iC\sqrt{2\,|\,l\,|\,(\omega - \omega_1)} \tag{4.4}$$

Здесь A, B и C вещественны, $|\,B\,| > |\,C\,|$. При $\omega < \omega_1$ волновые числа γ_1 и γ_2 вещественны (незатухающие нормальные волны). При переходе через $\omega = \omega_1$ незатухающие нормальные волны превращаются в волны с комплексными γ_1 и γ_2 (комплексные нормальные волны). Случай $\omega = \omega_1$ рассмотрен ниже в п. 5. При $\omega = \omega_2$ происходит обратное преобразование комплексных волн в незатухающие ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{\text{II}}$).

Частоты ω_1 и ω_2 разделяют полосы пропускания и запрета нормальных волн с номерами $j = 1, 2$. При $| l | \to 0$ полоса запрета сужается, превращаясь в точку. В точках кратности γ_{I} и γ_{II} выполняется условие $v_g = d\omega / d\gamma = 0$. В них сливаются волновые числа нормальных волн с различными знаками дисперсии.

Дисперсионные зависимости (4.4) были получены рядом авторов для волн Лэмба в однородных полосах и пластинах (см., например, [15]) и для изгибных волн в тонких полосах в работе [16].

Наиболее часто такие преобразования встречаются при $\gamma_{\text{I}} = 0$ или $\gamma_{\text{II}} = 0$, когда незатухающие волны превращаются в затухающие с мнимыми волновыми числами γ_1 и γ_2. В этом случае $A = B = \omega_0 = 0$ и $\omega_1 = \omega_2 = l$. Примеры таких преобразований можно найти на фиг. 17 работы [15]. В акустике и электродинамике они были известны еще Релею, изучавшему волноводные эффекты в полых трубах.

При вещественном l пусть Λ пересекает S_c между прямыми, на которых лежат точки жордановой кратности (см. рис. 3 работы [13]). В этом случае A, B и C вещественны, B и C одного знака и $B > C$. Таким образом, $d\omega / d\gamma$ в окрестности двойной кратности не равно нулю и нормальные волны — незатухающие с дисперсией одного знака. При приближении частоты ω к ω_0 нормальные волны с γ_1 и γ_2, согласно (4.3), теряют локализацию по парциальным системам и при переходе через $\omega = \omega_0$ обмениваются формами. Этот эффект, называемый в [12] преобразованием второго рода, был впервые описан в [14] и изучен на примере двух связанных продольной щелью волноводов в работе [17]. В однородных полосах (пластинах) такие преобразования должны наблюдаться в окрестностях пересечения дисперсионных кривых парциальных систем (см., например, фиг. 17 работы [15], где на пересечении указанных кривых происходит преобразование волн поперечной и продольной поляризации). Другой пример преобразования второго рода рассмотрен в [18], где роль парциальных систем выполняют волна Релея и одна из волн Лэмба, локализованная в своеобразном волноводе, возникающем за счет рефракции волн в слоистой неоднородной среде.

Глобальная картина дисперсионных кривых (см., например, фиг. 17 и 18 в работе [15]) весьма сложна, хотя локально она состоит только из двух описанных выше преобразований (за исключением точки $\gamma = 0$). Заметим, что глобальная классификация нормальных волн по непрерывности кривых $\gamma_j(\omega)$ невозможна, как это показано в работе [13].

5. Общая картина вынужденных колебаний упругой полосы. Согласно (2.7), поле вынужденных колебаний зависит как от параметров полосы, включая частоту ω, так и от формы внешней силы $\mathbf{F}(x, y)$. Нормальные волны с мнимыми и комплексными волновыми числами локализуются вблизи источника внешней силы и не уносят волновой энергии от него, если ε достаточно мало. Они создают безваттную нагрузку на источник.

Таким же свойством обладают присоединенные волны с невещественными волновыми числами при $\varepsilon = 0$. Заметим, что присоединенные волны с вещественными γ_j не возникают. Чтобы показать это, вернемся к случаю, исследованному в п. 4. Рассмотрим, например, приближение ω к критической частоте ω_1, когда следует ожидать возникновения присоединенной волны, так как волновые числа γ_1 и γ_2 сближаются. Для этого нормальные волны с указанными волновыми числами должны возбуждаться по одну сторону сечения $x = x'$. Однако, одна из них является плюс-волной, а другая — минус-волной. Поэтому они возбуждаются по разные стороны сечения $x = x'$, т. е. интерференция типа пространственных биений, необходимая для возникновения присоединенной волны, исключается. Но в силу свойства 3°, кроме точки γ_I существует точка $-\gamma_I$, и при $\omega = \omega_1$ интерференция между волнами с волновыми числами γ_{1+} и γ_{2+} приводит к стоячей волне

$$\text{const} \cos (\gamma_I x) \exp (i\omega_1 t) \tag{5.1}$$

Если $\gamma_I = 0$, то период стоячей волны обращается в бесконечность и имеет место однородное по x поле, экспоненциально убывающее при $\varepsilon \neq 0$ с ростом $| x - x' |$.

Дальнее поле вынужденных колебаний, согласно формуле (2.7) и свойству 2° состоит из конечного числа незатухающих нормальных волн. Для $x > x_2$ оно имеет вид

$$\mathbf{w}(x, y) \simeq \sum_{j+}^{N} C_{j+} \begin{Vmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{Z}_{j+} \end{Vmatrix} \mathbf{U}_j^1(y) \exp \gamma_{j+} x \tag{5.2}$$

$$C_{j+} = \int_{x_1}^{x_2} F_{j+}^1(x') \exp [- i\gamma_{j+} x'] \, dx'$$

Для $x < x_1$ знак плюс в индексах следует заменить на минус. В (5.2) отсутствуют присоединенные волны. Однако при приближении ω к критическим значениям в (5.2) возникают члены, подобные (5.1). Каждый переход ω через критическое значение сопровождается возникновением или исчезновением одной из незатухающих нормальных волн, что приводит к разрыву производной $\partial \mathbf{w}/\partial\omega$ в зависимости поля $\mathbf{w}$ от частоты ω.

При прохождении частоты ω через область преобразования второго рода волновые числа пары волн в (5.2) сближаются. Если эта пара доминирует в дальнем поле, то из-за пространственных биений по мере продвижения по оси x будет наблюдаться периодическая смена поляризаций, как например, в рассмотренных выше случаях работы [15], или попеременное пропадание волны Релея и волны Лэмба, как например, в случае работы [18].

Если в интервале (x_1, x_2) $\mathbf{f} = \mathbf{F} \exp ipx$, то

$$\mathbf{w}(x, y) \approx \sum_{j}^{N} \frac{F_j{}^1}{p - \gamma_j} \begin{Vmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{Z}_j \end{Vmatrix} \mathbf{U}_j{}^1 \exp [\gamma_j x - (p - \gamma_j)(x_2 - x_1)] \tag{5.3}$$

Суммирование в (5.3) производится по $j+$ для $x > x_2$ и по $j-$ для $x < x_1$. При p, близком к $\operatorname{Re} \gamma_r$ и малом $\operatorname{Im} \gamma_r$ (r — номер одной из нормальных волн в сумме (5.3), в дальнем поле доминирует волна номера r при $x > x_2$ для положительной и при $x < x_1$ для отрицательной дисперсии. Это происходит благодаря волновому резонансу между волной внешней силы $\mathbf{f} = \mathbf{F} \exp ipx$ и нормальной волной номера r [19], вызывающему линейное нарастание амплитуды нормальной волны в интервале (x_1, x_2). Это явление используется для возбуждения отдельных типов нормальных волн [20].

Поступила 20 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Краснушкин П. Е.* Метод решения общей краевой задачи распространения длинных и сверхдлинных радиоволн вокруг Земли. Докл. АН СССР, 1966, т. 171, № 1.
2. *Краснушкин П. Е.* Представление разложений по нормальным волнам контурными интегралами. Докл. АН СССР, 1969, т. 185, № 5.
3. *Голичев И. И., Краснушкин П. Е.* Спектрально-истокообразные разложения в теории распространения волн и квантовой теории потенциального рассеяния. Теор. и матем. физ., 1972, т. 10, № 3.
4. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1904, vol. 203, No. 359, p. 1—44.
5. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М., «Наука», 1973.
6. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. Докл. АН СССР, 1951, т. 77, № 1.
7. *Крейн М. Г., Лангер Г. К.* О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов. В кн.: Приложения теории функций в механике сплошной среды. М., «Наука», 1965, стр. 283—322.
8. *Костюченко А. Г., Оразов М. Б.* О некоторых свойствах корней самосопряженного квадратичного пучка. Функциональный анализ и его приложения, 1975, т. 9, № 4.
9. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, тип. М. П. Фроловой, 1917.
10. *Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д.* Колебания упругой полосы. В сб.: Методы виброизоляции машин и присоединенных конструкций. М., «Наука», 1975.
11. *Ворович И. И.* Спектральные свойства краевых задач теории упругости для неоднородной полосы. Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 4.
12. *Краснушкин П. Е.* Преобразование нормальных волн в периодических и гладких волноводах без потерь. Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, вып. 7.
13. *Краснушкин П. Е., Федоров Е. Н.* О кратности волновых чисел нормальных волн в слоистых средах. Радиотехника и электроника, 1972, т. 17, вып. 6.
14. *Krasnushkin P. E.* The interaction of oscillating systems with distributed parameters. J. Phys. Acad. Sci. USSR, 1945, vol. 9, No. 5, p. 439—446.
15. *Микер Т., Мейтцлер А.* Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках. В сб.: Физическая акустика, т. I, М., «Мир», 1966, стр. 140—203.
16. *Бобровницкий Ю. И.* Дисперсия изгибных нормальных волн в тонкой полосе. Акуст. ж., 1977, т. 23. вып. 1.
17. *Краснушкин П. Е., Хохлов Р. В.* Пространственные биения в связанных волноводах. Ж. техн. физ., 1949, т. 19, вып. 8.
18. *Аленицын А. Г.* Волны Релея в неоднородном упругом полупространстве волноводного типа. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
19. *Краснушкин П. Е.* К общей теории волноводных систем. Вестн. МГУ, 1950, № 2.
20. *Викторов И. А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Релея и Лэмба в технике. М., «Наука», 1966.