

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ДЕКАРТОВЫХ
КООРДИНАТАХ С АВТОМАТИЗИРОВАННЫМ ПОИСКОМ
ПАРАМЕТРОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

А. Д. Шамровский

(Запорожье)

На примерах статических уравнений теории упругости для ортотропной и изотропной сред рассматривается формальный метод поиска параметров асимптотического интегрирования, позволяющий проводить полную классификацию всех возможных вариантов упрощенных уравнений, исходя из критерия минимального упрощения. Метод допускает реализацию на ЭЦВМ, что дает возможность оперировать большим числом параметров. В случае пространственных уравнений теории упругости для изотропной среды применение метода позволяет получить как все известные (найденные ранее в работе [1]) варианты, так и ряд новых.

Одним из эффективных современных методов построения двумерных уравнений теории пластин и оболочек на основе трехмерных уравнений теории упругости является метод асимптотического интегрирования, развитый в работах А. Л. Гольденвейзера. Подобный подход к построению упрощенных уравнений путем отбрасывания в исходных уравнениях второстепенных членов может применяться и во многих других задачах. Однако широкое его применение наталкивается на трудности поиска параметров асимптотического интегрирования. Обычно значения этих параметров задают на основе интуитивных соображений о характере искомого решения. Представляет интерес формальный поиск параметров, пригодный в случаях минимальной предварительной информации о решении. Возможность такого поиска была показана [2] на примере динамической задачи теории упругости для тонкой пластинки.

1. Проиллюстрируем метод вначале на простейшем примере. Рассмотрим дифференциальные уравнения плоской задачи теории упругости для ортотропной среды [3]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (B_1 \mu_2 + G) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= 0 \\ B_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (B_2 \mu_1 + G) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь u, v — компоненты вектора перемещений, B_1, B_2 — жесткости на растяжение—сжатие, G — жесткость на сдвиг. Предположим, что выполняются соотношения $B_1 > B_2 \sim G$. Введем малый параметр $\epsilon = B_2 / B_1$ и выполним преобразования

$$(1.2) \quad x^* = \epsilon^\alpha x, \quad y^* = y; \quad u^* = \epsilon^\beta u, \quad v^* = v$$

так, чтобы были справедливы соотношения

$$(1.3) \quad \partial / \partial x^* \sim \partial / \partial y^*, \quad u^* \sim v^*$$

Подставляя (1.2) в (1.1), получим уравнения

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \varepsilon^{2\alpha-\beta} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \varepsilon^{1-\beta} \frac{G}{B_2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \varepsilon^{1+\alpha} \left(\mu_1 + \frac{G}{B_2} \right) \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial y^*} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \varepsilon^{2\alpha} \frac{G}{B_2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \varepsilon^{\alpha-\beta} \left(\mu_1 + \frac{G}{B_2} \right) \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^* \partial y^*} &= 0 \end{aligned}$$

в которых, в соответствии с (1.3), вклад каждого члена полностью оценивается той степенью ε , которую этот член содержит. Представим искомые функции в виде асимптотических рядов

$$(1.5) \quad u^* = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^* \varepsilon^{i-1}, \quad v^* = \sum_{i=1}^{\infty} v_i^* \varepsilon^{i-1}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $u^* \rightarrow u_1^*$, $v^* \rightarrow v_1^*$. Уравнения для u_1^* и v_1^* получаются после подстановки (1.5) в (1.4) и удержания членов, содержащих ε в минимальной степени, поскольку именно такие члены сохраняются при $\varepsilon \rightarrow 0$. Выбор этих членов существенно зависит от значений параметров α и β . Обычно значения подобных параметров подбирают, исходя из интуитивных соображений о характере искомого решения исходных уравнений. Например, предполагая в данном случае, что скорость изменения искомых функций по координате x выше, чем по y , выбираем $\alpha < 0$, в противном случае $\alpha > 0$; при одинаковых скоростях $\alpha = 0$. Параметр β характеризует сравнительные величины перемещений u и v . Значения $\beta < 0$ соответствуют преобладанию v по сравнению с u , $\beta > 0$ — наоборот; $\beta = 0$ — перемещениям одного порядка.

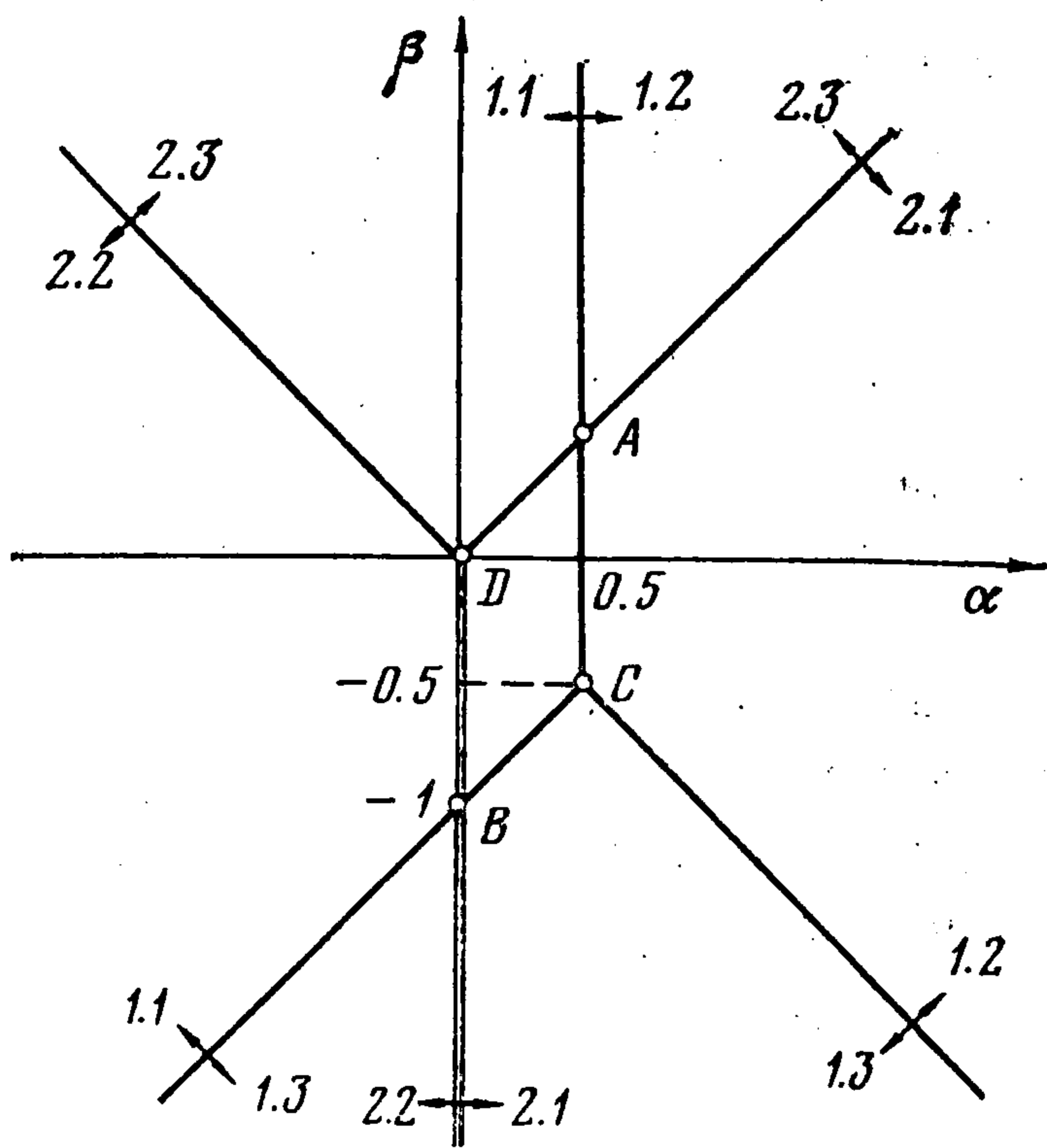
Такой подход требует значительных предварительных сведений об искомом решении. Трудности его реализации резко возрастают с увеличением числа параметров. Задача еще усложняется тем, что в разных случаях характер решения и, следовательно, значения параметров могут меняться, что приводит к различным упрощенным уравнениям, соответствующим одной исходной системе. Нахождение всех таких вариантов упрощения весьма желательно, так как различные упрощенные уравнения обычно взаимно дополняют одно другое, позволяя в своей совокупности описать (приближенно) тот же круг задач, который описывает исходная система уравнений.

Поставим задачу рассмотрения всех возможных значений α и β . Выпишем таблицу показателей степени ε всех членов первого и второго уравнений (1.4)

$$(1.6) \quad \begin{array}{ccc} 2\alpha - \beta, & 1 - \beta, & 1 + \alpha \\ 0, & 2\alpha, & \alpha - \beta \end{array}$$

Рассмотрим плоскость $\alpha\beta$ и построим на ней отдельно для каждого уравнения зоны, соответствующие наименьшим значениям показателей (см. фигуру). Показатель $2\alpha - \beta$ будет наименьшим в первой строке (1.6) при выборе значений α и β в зоне 1.1. Показатель $1 - \beta$ наименьший в зоне 1.2 и показатель $1 + \alpha$ — в зоне 1.3. Аналогично показатель нуль во второй строке наименьший в зоне 2.1, показатель 2α наименьший в зоне 2.2 и показатель $\alpha - \beta$ — в зоне 2.3.

Рассмотрим вначале такой выбор параметров, при котором изображающая точка на плоскости $\alpha\beta$ находится одновременно и внутри некоторой зоны, соответствующей первому уравнению, и внутри одной из зон, соответствующих второму уравнению. Тогда в таблице (1.6) будет один наименьший показатель в первой строке и один во второй. При этом уравнения для u_1^* и v_1^* будут содержать только по одному члену, т. е. исходная система уравнений будет упрощена максимально возможным образом. Такое чрезмерное упрощение на первом этапе исследования нецелесообразно. Упрощение будет меньшим, если выбирать изображающую точку на границе раздела двух зон, соответствующих одному из уравнений. В этом уравнении будет оставаться в первом приближении уже два члена. Наконец, упрощение будет минимальным, если выбрать в качестве изображающей точку пересечения двух границ. Из фигуры видно, что таких точек четыре. Наибольший интерес представляют точки A и B , в которых пересекаются границы раздела зон, соответствующих разным уравнениям.



Точка A ($\alpha = 0.5, \beta = 0.5$). Уравнения первого приближения в исходных переменных имеют вид

$$(1.7) \quad B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad B_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + (B_2 \mu_1 + G) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} = 0$$

Точка B ($\alpha = 0, \beta = -1$). Уравнения первого приближения будут

$$(1.8) \quad B_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 0, \quad B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + (B_1 \mu_2 + G) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} = 0$$

Уравнения (1.7), (1.8) использовались для решения контактных задач теории упругости в работе [4] и ряде других работ. При этом при рассмотрении областей с границами $x = \text{const}$ уравнения (1.7) описывали медленно изменяющееся по x основное состояние, а уравнения (1.8) — пограничный слой.

Меньший интерес представляют точки C и D , задающие такие значения α, β , при которых в одном из уравнений остаются все члены, а в другом — только один.

Рассмотрим выводы, которые можно сделать на основании полученных в простейшем примере результатов.

Естественным образом сформулировался критерий выбора конкретных значений параметров асимптотического интегрирования из бесконечного множества вариантов. На первом этапе исследования выбираются такие значения параметров, которые приводят к минимальному упроще-

нию исходной системы уравнений. В случае двух параметров поиск этих значений может быть проведен графически, как изложено выше. Большое количество параметров требует аналитического способа их поиска. Покажем сущность такого способа на том же двумерном примере. Выпишем вначале уравнения границ раздела зон, изображенных на фигуре, приравнявая попарно показатели, входящие либо в первую, либо во вторую строку таблицы (1.6) и одновременно требуя, чтобы два равных показателя не превосходили третьего в той же строке. Получаем в итоге шесть уравнений, сопровождаемых неравенствами (три, соответствующих первой строке (1.6), и три, соответствующих второй строке)

$$(1.9) \quad \begin{array}{l} \alpha = 0.5, \quad \beta \geq -0.5; \quad \alpha = 0, \quad \beta \leq 0 \\ \alpha - \beta = 1, \quad \beta \leq -0.5; \quad \alpha - \beta = 0, \quad \beta \geq 0 \\ \alpha + \beta = 0, \quad \beta \leq -0.5; \quad \alpha + \beta = 0, \quad \beta \geq 0 \end{array}$$

Для нахождения точек пересечения границ решаем уравнения (1.9) попарно, перебирая все возможные комбинации. Таких комбинаций в данном случае будет пятнадцать, однако часть из выбираемых пар уравнений оказывается несовместимой в силу сопровождающих уравнения неравенств; встречаются также случаи, когда одинаковые значения α и β будут находиться при решении различных пар уравнений (например решения, соответствующие точкам C и D на фигуре, будут встречаться по три раза). В итоге получаем только четыре различные пары значений α и β , соответствующие точкам A, B, C, D на фигуре.

Описанный аналитический способ легко допускает обобщение на произвольное количество параметров. Соответствующий пример изложен ниже.

2. Отсутствие какого-либо естественного малого параметра в исходных дифференциальных уравнениях не является препятствием для применения методов асимптотического анализа. Главную роль при анализе играют преобразования переменных вида (1.2), (1.3), но такие преобразования можно выполнять, используя в качестве основания любой формально введенный параметр $\varepsilon < 1$.

Рассмотрим в качестве примера использования формального малого параметра задачу об асимптотическом интегрировании статических уравнений теории упругости в декартовых координатах, исследованную в [1]. Указанные уравнения имеют вид

$$(2.1) \quad \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad E \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad E \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \quad E \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{xy}, \quad G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \tau_{xz}, \quad G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{yz} \end{array}$$

Уравнения (2.1) не содержат какого-либо естественного малого параметра; поскольку целью работы [1] было исследование напряженно-деформированного состояния пластин, в качестве малого параметра была

взята полутолщина пластины. Однако, если не ставить конкретной цели применения результатов асимптотического интегрирования уравнений (2.1) к исследованию напряженно-деформированного состояния пластин, то размерный параметр нельзя считать малым, так как он может принимать любые (в том числе как угодно большие) значения при изменениях масштаба. Будем поэтому использовать безразмерный, формально введенный малый параметр $\varepsilon < 1$.

Выполним преобразования

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x^* &= \varepsilon^{\alpha_1} x, & y^* &= \varepsilon^{\alpha_2} y, & z^* &= z; & u^* &= \varepsilon^{\alpha_3} u, & v^* &= \varepsilon^{\alpha_4} v, \\ w^* &= \varepsilon^{\alpha_5} w, & \sigma_x^* &= \varepsilon^{\alpha_6} \sigma_x, & \sigma_y^* &= \varepsilon^{\alpha_7} \sigma_y, & \sigma_z^* &= \varepsilon^{\alpha_8} \sigma_z \\ \tau_{xy}^* &= \varepsilon^{\alpha_9} \tau_{xy}, & \tau_{xz}^* &= \varepsilon^{\alpha_{10}} \tau_{xz}, & \tau_{yz}^* &= \tau_{yz} \end{aligned}$$

и предположим, что

$$(2.3) \quad \begin{aligned} a \frac{\partial}{\partial x^*} &\sim a \frac{\partial}{\partial y^*} \sim a \frac{\partial}{\partial z^*} \sim 1 \\ \frac{u^*}{a} &\sim \frac{v^*}{a} \sim \frac{w^*}{a} \sim \frac{\sigma_x^*}{E} \sim \frac{\sigma_y^*}{E} \sim \frac{\sigma_z^*}{E} \sim \frac{\tau_{xy}^*}{G} \sim \frac{\tau_{xz}^*}{G} \sim \frac{\tau_{yz}^*}{G} \end{aligned}$$

Здесь a — любая постоянная, имеющая размерность длины и необходимая для возможности сравнения между собой величин разных размерностей в (2.3).

Представим искомые функции в виде рядов

$$(2.4) \quad u^* = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^* \varepsilon^{i-1}, \dots, \tau_{yz}^* = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_{yzi}^* \varepsilon^{i-1}$$

Для поиска параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$, определяющих уравнения первого приближения и процедуру последовательных приближений, поступим так же, как в предыдущем примере. Подставляя (2.2) в (2.1) и учитывая (2.3), будем оценивать вклад каждого члена преобразованных уравнений по той степени ε , которую он приобретает множителем. Не записывая самих преобразованных уравнений, выпишем для них показатели степеней ε в виде таблицы, подобной (1.6)

$$(2.5) \quad \begin{array}{ccccccc} \alpha_1 - \alpha_6, & \alpha_2 - \alpha_9, & -\alpha_{10}; & \alpha_1 - \alpha_3, & -\alpha_8, & -\alpha_7, & -\alpha_8 \\ \alpha_1 - \alpha_9, & \alpha_2 - \alpha_7, & 0; & \alpha_2 - \alpha_4, & -\alpha_7, & -\alpha_6, & -\alpha_8 \\ \alpha_1 - \alpha_{10}, & \alpha_2, & -\alpha_8; & -\alpha_5, & -\alpha_8, & -\alpha_6, & -\alpha_7 \\ \alpha_2 - \alpha_3, & \alpha_1 - \alpha_4, & -\alpha_9; & -\alpha_3, & \alpha_1 - \alpha_5, & -\alpha_{10}; & \\ -\alpha_4, & \alpha_2 - \alpha_5, & 0 & & & & \end{array}$$

Приравнивая попарно всеми возможными способами показатели, соответствующие каждому исходному дифференциальному уравнению, получим для параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$ тридцать шесть алгебраических уравнений. Каждое из них дополним неравенствами, вытекающими из требования, чтобы два выбранных равными показателя не превосходили остальных показателей, соответствующих тому же дифференциальному уравнению. Выпишем для примера только результаты, соответствующие первой строке (2.5), т. е. двум первым уравнениям (2.1)

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_8 + \alpha_9 &= 0, & \alpha_2 - \alpha_9 + \alpha_{10} &\leq 0 \\ \alpha_1 - \alpha_6 + \alpha_{10} &= 0, & -\alpha_2 + \alpha_9 - \alpha_{10} &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
\alpha_2 - \alpha_9 + \alpha_{10} = 0, \quad -\alpha_1 + \alpha_6 - \alpha_{10} \leq 0 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_6 = 0, \quad -\alpha_6 + \alpha_7 \leq 0, \quad -\alpha_6 + \alpha_8 \leq 0 \\
\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_7 = 0, \quad \alpha_6 - \alpha_7 \leq 0, \quad -\alpha_7 + \alpha_8 \leq 0 \\
\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_8 = 0, \quad \alpha_6 - \alpha_8 \leq 0, \quad \alpha_7 - \alpha_8 \leq 0 \\
\alpha_6 - \alpha_7 = 0 \quad -\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_7 \leq 0, \quad -\alpha_7 + \alpha_8 \leq 0 \\
\alpha_6 - \alpha_8 = 0, \quad -\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_8 \leq 0, \quad \alpha_7 - \alpha_8 \leq 0 \\
\alpha_7 - \alpha_8 = 0, \quad -\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_8 \leq 0, \quad \alpha_6 - \alpha_8 \leq 0 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}$$

Вследствие того, что используемый малый параметр введен формально, все уравнения (2.6) однородные. Поэтому для нахождения десяти неизвестных $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$ в соответствии с критерием минимального упрощения необходимо выбирать не по десять, а по девять из этих уравнений; при этом результаты получаются с точностью до общего множителя. Знак этого множителя выбирается так, чтобы удовлетворялись неравенства, сопровождающие уравнения; получаемые решения задают в итоге уравнения лучей, выходящих из начала координат в десятимерном пространстве параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$.

Задача отыскания всех вариантов минимального упрощения системы уравнений (2.1) сводится к задаче нахождения всех различных решений всевозможных девяток уравнений, извлекаемых из тридцати шести уравнений (2.6). Решение подобной задачи методом перебора было реализовано на ЭЦВМ. Алгоритмом перебора было предусмотрено отсеивание девяток, содержащих линейно-зависимые уравнения, и девяток, приводящих к уже найденным ранее решениям (так как одинаковые решения могут получаться из различных девяток уравнений). Отсеивались также девятки, несовместимые в силу сопровождающих их неравенств.

В итоге было получено 192 варианта решений, нуждающихся в дальнейшем анализе. Этот анализ в первую очередь сводился к дополнительному отсеиванию наборов параметров, приводящих к уравнениям первого приближения, в которых число искомых функций не совпадает с числом уравнений. Таких наборов оказалось 108. Среди оставшихся 84 наборов отброшены 15 таких, для которых ненулевые значения некоторых из искомых функций получаются не в первом приближении, в то время как существуют наборы, приводящие к тем же значениям уже в первом приближении. Оставшиеся окончательно 69 наборов объединяются в 16 групп по три или шесть наборов, приводящих к уравнениям первого приближения, переходящим одно в другое при произвольных перестановках x, y, z .

В таблице приведены по одному представителю из каждой такой группы. В случае, если приведенный представитель приводит к уравнениям первого приближения, инвариантным относительно перестановки x и y , он порождает еще только два набора, в противном случае — пять.

№	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}
1	-0.5	-0.5	0	0	-0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0
2	-0.5	-0.5	-1	-1	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	0
3	0.5	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0
4	0.5	0.5	1	0	0.5	0.5	0.5	-0.5	0.5	0
5	0.5	0.5	1	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0
6	0.5	0.5	1	1	0.5	0.5	0.5	-0.5	0.5	0
7	0.5	0.5	1	1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0
8	0.5	0.5	1	1	1.5	0.5	0.5	-0.5	0.5	0
9	0.5	0.5	1	1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1
10	0.5	0.5	1	1	1.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1
11	0.5	0.5	0	0	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	0
12	0.5	0.5	0	0	0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	0
13	0.5	0.5	1	1	1.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0
14	0.5	1	0.5	0	1	0	0	-1	-0.5	-0.5
15	0.5	1	0.5	0	0	0	0	-1	-0.5	-0.5
16	0.5	1	0.5	0	1	0	0	0	0.5	-0.5

Как уже указывалось выше, значения параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$ находятся с точностью до общего множителя. В таблице приведены наименьшие по модулю значения параметров, позволяющие производить расщепление по целым степеням ε уравнений (2.1) после подстановки в них (2.2) и (2.4).

Рассмотрим полученные результаты. Варианты 1 и 2 приводят к уравнениям соответственно плоской и антиплоской деформации в плоскости x, y . Для них характерно медленное по сравнению с x, y изменение напряженно-деформированного состояния по z . Во всех остальных случаях изменяемость по z выше, чем по x и y .

Варианты 3—13 соответствуют напряженно-деформированным состояниям с одинаковой изменяемостью по x и y . Из них пять вариантов 3 — 7 соответствуют преобладанию напряженно-деформированных состояний, симметричных относительно плоскости $z = 0$. Варианту 3 соответствует состояние с преобладанием σ_z над остальными искомыми функциями, варианту 4 — с преобладанием u , вариант 5 описывает состояние с одинаковым вкладом u и σ_z , вариант 6 — с одновременным преобладанием u и v , наконец, вариант 7 — состояние с одновременным преобладанием u, v, σ_z .

Вариант 6 приводит к хорошо известным уравнениям обобщенного плоского напряженного состояния. Рассмотрим остальные варианты.

Вариант 3. Уравнения первого приближения имеют вид

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad & \frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy1}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial z} = 0, \quad 0 = \sigma_{x1} - \nu(\sigma_{y1} + \sigma_{z1}) \\
 & \frac{\partial \tau_{xy1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y1}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz1}}{\partial z} = 0, \quad 0 = \sigma_{y1} - \nu(\sigma_{x1} + \sigma_{z1}) \\
 & \frac{\partial \sigma_{z1}}{\partial z} = 0, \quad E \frac{\partial w_1}{\partial z} = \sigma_{z1} - \nu(\sigma_{x1} + \sigma_{y1}) \\
 & \tau_{xy1} = 0, \quad G \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) = \tau_{xz1}, \quad G \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) = \tau_{yz1}
 \end{aligned}$$

Эти уравнения описывают напряженно-деформированное состояние, возникающее при сжатии слоя с лицевыми поверхностями $z = \pm h$ плавно изменяющейся (или постоянной) по x и y нагрузкой $\sigma_z = q$.

Вариант 7. Уравнения первого приближения будут

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xz1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy1}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial z} &= 0, & E \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \sigma_{xz1} - \nu(\sigma_{y1} + \sigma_{z1}) \\ \frac{\partial \tau_{xy1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y1}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz1}}{\partial z} &= 0, & E \frac{\partial v_1}{\partial y} &= \sigma_{y1} - \nu(\sigma_{x1} + \sigma_{z1}) \\ \frac{\partial \sigma_{z1}}{\partial z} &= 0, & E \frac{\partial w_1}{\partial z} &= \sigma_{z1} - \nu(\sigma_{x1} + \sigma_{y1}) \\ G \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) &= \tau_{xy1}, & \frac{\partial u_1}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial v_1}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Интегрируя по z и удовлетворяя при $z = h$ граничным условиям $\sigma_z = q$, $\tau_{xz} = \tau_x$, $\tau_{yz} = \tau_y$ и симметричным условиям при $z = -h$, имеем для функций u_1 и v_1 уравнения

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} &= -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{\tau_x}{h} - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} &= -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{\tau_y}{h} - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \frac{\partial q}{\partial y} \end{aligned}$$

Здесь объединены обобщенное плоское напряженное состояние и сжатие. Задавая на лицевых поверхностях вместо $\sigma_z = q - w = W$, получаем из (2.9) другой вариант двумерных уравнений

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} &= -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \frac{\tau_x}{h} - \\ &- \frac{\nu}{(1-\nu)h} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} &= -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \frac{\tau_y}{h} - \\ &- \frac{\nu}{(1-\nu)h} \frac{\partial W}{\partial y} \end{aligned}$$

При $\tau_x = \tau_y = 0$ и $W = 0$ уравнения (2.10) превращаются в уравнения плоской деформации, т. е. такие же, как уравнения для u_1 и v_1 в варианте 1.

Не рассматривая подробно варианты 4 и 5, отметим только, что первый из них приводит к уравнениям упрощенного обобщенного плоского напряженного состояния; при этом уравнение для u_1 в случае заданных на лицевой поверхности $z = h$ условий $\sigma_z = q$, $\tau_{xz} = \tau_x$, $\nu = V$ (и симметричных условий при $z = -h$) имеет вид

$$(2.11) \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{\tau_x}{h}$$

Вариант 5 соответствует упрощенному обобщенному плоскому напряженному состоянию со сжатием.

Варианты 8—12 соответствуют преобладанию напряженно-деформированных состояний, антисимметричных относительно плоскости $z = 0$. Варианту 8 соответствует состояние с преобладанием w над остальными искомыми функциями; варианту 9 — с преобладанием τ_{xz} , вариант 10

описывает состояние с одинаковым вкладом w и τ_{xz} , вариант 11 — с одновременным преобладанием τ_{xz} , τ_{yz} , вариант 12 — состояние с одновременным преобладанием w , τ_{xz} , τ_{yz} .

Вариант 8 исследован в работе [1]; он приводит к классическим уравнениям изгиба пластин. Остановимся на остальных вариантах.

Вариант 11. Уравнения первого приближения имеют вид

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial z} &= 0, & E \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \sigma_{x1} - \nu(\sigma_{y1} + \sigma_{z1}) \\ \frac{\partial \tau_{yz1}}{\partial z} &= 0, & E \frac{\partial v_1}{\partial y} &= \sigma_{y1} - \nu(\sigma_{x1} + \sigma_{z1}) \\ \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz1}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z1}}{\partial z} &= 0, & E \frac{\partial w_1}{\partial z} &= \sigma_{z1} - \nu(\sigma_{x1} + \sigma_{y1}) \\ G \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) &= \tau_{xy1}, & G \frac{\partial u_1}{\partial z} &= \tau_{xz1}, & G \frac{\partial v_1}{\partial z} &= \tau_{yz1} \end{aligned}$$

Эти уравнения описывают напряженно-деформированное состояние, возникающее при нагружении слоя $z = \pm h$ плавно изменяющимися (или постоянными) касательными нагрузками $\tau_{xz} = \tau_x$, $\tau_{yz} = \tau_y$, т. е. при сдвиге.

Вариант 12. Уравнения первого приближения будут

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial z} &= 0, & E \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \sigma_{x1} - \nu(\sigma_{y1} + \sigma_{z1}) \\ \frac{\partial \tau_{yz1}}{\partial z} &= 0, & E \frac{\partial v_1}{\partial y} &= \sigma_{y1} - \nu(\sigma_{x1} + \sigma_{z1}) \\ \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz1}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z1}}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0 \\ G \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) &= \tau_{xy1}, & G \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) &= \tau_{xz1}, & G \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) &= \\ &= \tau_{yz1} \end{aligned}$$

Это комбинация напряженно-деформированных состояний изгиба и сдвига. Если ограничиться первым приближением, то нетривиальные результаты получаются при задании на плоскости $z = h$ условий $\sigma_z = q$, $u = U$, $v = V$ (и антисимметричных условий при $z = -h$). Для w_1 получаем при этом (после интегрирования по z) уравнение

$$(2.14) \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = -\frac{q}{Gh} - \frac{1}{h} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)$$

При $q = 0$ и $U = V = 0$ получаем из (2.14) уравнение, совпадающее с уравнением для w_1 из варианта 2, т. е. уравнение антиплоской деформации.

Не рассматривая подробно варианты 9 и 10, отметим только, что вариант 9 соответствует упрощенному сдвигу, а вариант 10 — упрощенному изгибу со сдвигом. Кроме того, в варианте 9 указанное антисимметричное напряженно-деформированное состояние комбинируется с симметричным состоянием того же порядка, соответствующим варианту 7.

Вариант 13 является комбинацией вариантов 7 и 8.

Последние три варианта 14—16 соответствуют напряженно-деформированным состояниям с изменяемостью по x , большей чем по y , что характерно для погранслоев. Сравнивая с уже описанными выше вариан-

тами, можно сказать, что вариант 14 соответствует преобладанию напряженно-деформированного состояния цилиндрического изгиба, вариант 15 — комбинации одномерного обобщенного плоского напряженного состояния и цилиндрического изгиба со сдвигом, вариант 16 — комбинации одномерного обобщенного плоского напряженного состояния со сжатием и цилиндрического изгиба.

Остановимся на варианте 14. Уравнения первого приближения будут

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial z} &= 0, & E \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \sigma_{x1} - \nu \sigma_{y1} \\ \frac{\partial \tau_{yz1}}{\partial z} &= 0, & 0 &= \sigma_{y1} - \nu \sigma_{x1} \\ \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz1}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z1}}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0 \\ G \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) &= \tau_{xy1}, & \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x} &= 0, & G \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) &= \tau_{yz1} \end{aligned}$$

Интегрируя по z и удовлетворяя при $z = h$ граничным условиям $\sigma_z = q$, $\tau_{xz} = \tau_x$, $\tau_{yz} = \tau_y$ (и антисимметричным при $z = -h$), получаем уравнение для w_1

$$(2.16) \quad \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} = q + h \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right)$$

Если при $z = h$ вместо $\tau_{yz} = \tau_y$ задано $\nu = V$, имеем

$$(2.17) \quad \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} - Gh \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = q + h \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + G \frac{\partial V}{\partial y}$$

Это уравнение описывает комбинацию классического изгиба вдоль оси x и изгиба со сдвигом вдоль оси y .

Рассмотренные примеры показывают, что автоматизированный поиск параметров асимптотического интегрирования позволяет находить достаточно полный набор упрощенных уравнений, взаимно дополняющих одно другое.

Отметим в заключение, что задача построения полного набора упрощенных уравнений не может быть до конца формализована, так как многое зависит от выбора формы записи исходных уравнений и указания возможных малых параметров. Однако после проведения такой предварительной работы дальнейший поиск упрощенных уравнений может быть автоматизирован при помощи изложенного метода. Подобная комбинация содержательного и формального подходов позволяет анализировать весьма сложные системы уравнений, причем основной объем работы выполняется при помощи ЭЦВМ.

Поступила 13 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. Гусейн-Заде М. И. Асимптотический анализ граничных и начальных условий в динамике тонких пластинок. ПММ, 1978, т. 42, вып. 5.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1947.
4. Маневич Л. И., Павленко А. В., Шамровский А. Д. Приближенное решение контактных задач теории упругости для ортотропной полосы, подкрепленной ребрами жесткости. В сб.: Гидроаэромеханика и теория упругости, вып. 13. Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1971.