Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

А. И. Каландия

(Тбилиси)

В основной задаче плоской теории упругости строятся интегральные уравнения Фредгольма для неизвестных нормальных напряжений на границе области и дается их исследование.

1. Постановка задачи. Будем решать основную плоскую задачу теории упругости при заданных на границе внешних усилиях, когда упругая среда заполняет конечную или бесконечную область плоскости комплексной переменной $z = x + iy$, и внешние усилия на каждом из ограничивающих область замкнутых контуров статически эквивалентны нулю.

Рассматриваем (связную) область S^+, ограниченную простыми замкнутыми непересекающимися контурами $L_0, L_1, \ldots, L_m$, из которых первый охватывает все остальные. Символ L будет обозначать совокупность всех контуров. Внешний контур L_0 может отсутствовать, и тогда область S^+ будет бесконечной (плоскость с отверстиями).

Через S^- обозначим область, дополняющую S^+ до полной плоскости, через S_k^- — область, заключенную внутри L_k ($k = 1, 2, \ldots, m$), а через S_0^+, S_0^- — области, расположенные внутри и вне L_0 соответственно. Пусть далее $\mathbf{n}$ — нормаль к линии L, проведенная в какой-либо ее точке и внешняя по отношению к S^+, а $\mathbf{T}$ — направление положительной касательной к L в той же точке. Положительным направлением на L будем для определенности считать то, которое оставляет область S^+ справа. Предполагаем, что линия L обладает всюду непрерывной кривизной.

2. О свойствах функции напряжений в многосвязной области. Представление бигармонических функций. Приведем для облегчения ссылок некоторые известные формулы плоской теории упругости и укажем свойства функции напряжений. Все необходимые формулы заимствуем из книги Н. И. Мусхелишвили [1].

Бигармоническая функция напряжений $u(x, y)$ (функция Эйри) и первые ее производные представимы формулами

$$u = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(r)], \quad \bar{z} = x - iy \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \quad \psi(z) = \chi'(z)$$

где φ, χ, ψ — аналитические функции переменной z в области, занятой упругой средой. В конечной области S^+ они имеют вид (см. [1], § 35)

$$\varphi(z) = z\sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln(z - z_k) + \varphi_*(z) \tag{2.2}$$

$$\chi(z) = z\sum_{k=1}^{m} \gamma_k' \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k'' \ln(z - z_k) + \chi_*(z)$$

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k' \ln(z - z_k) + \psi_*(z)$$

причем z_k — некоторая фиксированная точка внутри S_k^- ($k = 1, 2, \ldots, m$), A_k — произвольная действительная, γ_k, γ_k', γ_k'' — произвольные комплексные постоянные, φ_*, χ_*, ψ_* — голоморфные (однозначные аналитические) функции в S^+.

Видно, что для однозначности функции Эйри в S^+ необходимо и достаточно выполнения условий

$$\bar{\gamma}_k = \gamma_k', \quad \operatorname{Im} \gamma_k'' = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.3}$$

а это означает (см. [1], § 33,) что внешние усилия на контуре каждого из отверстий статически эквивалентны нулю.

При наличии (2.3) для однозначности упругих смещений необходимо (и достаточно)

$$A_k = 0, \quad \gamma_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

а это равносильно требованию голоморфности $\varphi(z)$ в S^+. Последние условия, выраженные через функцию $u(x, y)$, имеют вид

$$\int_{L_k} \frac{\partial \Delta u}{\partial n} ds = 0, \quad \int_{L_k} \left(x \frac{\partial \Delta u}{\partial n} - \Delta u \frac{\partial x}{\partial n} \right) ds = 0 \tag{2.4}$$

$$\int_{L_k} \left(y \frac{\partial \Delta u}{\partial n} - \Delta u \frac{\partial y}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

Таким образом, если функция напряжений $u(x, y)$ однозначна в области S^+, то для однозначности соответствующих упругих смещений необходимо и достаточно выполнения условий (2.4).

При выполнении этих условий функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ голоморфны в S^+, а функция $\chi(z)$ будет, вообще говоря, многозначной (она имеет вид второго соотношения (2.2) правой части при $\gamma_k' = 0$, $\operatorname{Im} \gamma_k'' = 0$).

Указанные выше свойства функции напряжений, по-видимому, впервые установил Гриоли [2], основываясь на работе [3].

В случае, когда контур L_0 отсутствует, S^+ представляет собой бесконечную область, расположенную вне контуров $L_1, L_2, \ldots, L_m$. В этом случае при тех же предположениях относительно внешних усилий, приложенных к L_k, и однозначности смещений характер функции напряжений, а также потенциалов φ, ψ, χ в любой конечной подобласти области S^+ остается прежним.

Однако функции φ и χ не будут, вообще говоря, голоморфными во всей области S^+. Известно, что в окрестности бесконечно удаленной точки потенциалы Колосова — Мусхелишвили допускают представления (см. [1], § 36)

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_*(z), \quad \chi(z) = \chi_0(z) + \chi_*(z) \tag{2.5}$$

$$\varphi_0(z) = \Gamma z, \quad \chi_0(z) = \Gamma' z^2, \quad \Gamma' = B' + iC'$$

$$\varphi_*(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z_2} + \cdots \tag{2.6}$$

$$\chi_*(z) = \lambda \ln z + A_0 + a_0' z + \frac{a_1'}{z} + \frac{a_2'}{z^2} + \cdots$$

Здесь Γ, B', C' — действительные постоянные, характеризующие заданное поле напряжений на бесконечности, λ — некоторая действительная постоянная. Формулы

(2.6) означают, что функции $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$ голоморфны вне окружности L_R достаточно большого радиуса R с центром в начале координат, включая бесконечно удаленную точку.

Приведем некоторые основные формулы для представлений бигармонических функций, выводимые стандартным способом, использующим соответствующие элементарные решения. Некоторое затруднение возникает лишь в случае бесконечных областей, когда приходится учитывать поведение рассматриваемой функции в бесконечно удаленных частях плоскости. Поведение это для класса функций, о котором будет идти речь впереди, полностью характеризуется формулами (2.5).

Буквы P, P_1 будут обозначать точки области S^+ или S^-, а Q, P_0 — точки на линии L, причем Q будет обычно служить переменной интегрирования. Аффиксы этих точек на плоскости комплексного переменного пусть будут z, z_1, t, t_0 соответственно, причем $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$. Дуговые абсциссы точек t, t_0 обозначаются через s и s_0 и отсчитываются на каждом контуре L_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ в направлении положительной касательной $\mathbf{T}$ к линии L. Для обозначения координат точек Q и P_0 не будем вводить новых символов, полагая $t = x + iy$, $t_0 = x_0 + iy_0$, или точнее, $t = x(s) + iy(s)$, $t_0 = x(s_0) + iy(s_0)$. Также во избежание введения новых символов для функции f точки линии L не будем иногда различать обозначения $f(t)$ и $f(Q)$ или $f(t_0)$ и $f(P_0)$.

Записывая тождество Грина для пары функций u, Δv, а затем для Δu, v, складывая полученные формулы и привлекая элементарное решение бигармонического уравнения, получим известные представления для конечной области

$$u(P) = \frac{1}{2\pi}\int_L [L^\circ(u;\ P;\ Q) + l(u;\ P;\ Q)]\,ds, \quad P \in S^+ \tag{2.7}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_L [L^\circ(u;\ P;\ Q) + l(u;\ P;\ Q)]\,ds, \quad P \in S^-$$

Здесь $(\partial/\partial n_Q$ — дифференцирование по направлению нормали к L° в точке $Q)$.

$$L^\circ(u;\ P;\ Q) = \frac{1}{4}\left[r^2 \ln\frac{1}{r}\frac{\partial \Delta u}{\partial n_Q} - \Delta u \frac{\partial}{\partial n_Q} r^2 \ln\frac{1}{r}\right]$$

$$l(u;\ P;\ Q) = \left(\ln\frac{1}{r} - 1\right)\frac{\partial u}{\partial n_Q} - u\frac{\partial}{\partial n_Q}\ln\frac{1}{r}, \quad Q \in L, \quad r = |z - t|$$

Применяя к обеим частям равенств (2.7) оператор Лапласа, получим еще

$$\Delta u(P) = \frac{1}{2\pi}\int_L l(\Delta u;\ P,\ Q)\,ds, \quad P \in S^+ \tag{2.8}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_L l(\Delta u;\ P,\ Q)\,ds, \quad P \in S^-$$

Функция Δu, очевидно, гармонична в S^+ и поэтому должна удовлетворять условию

$$\int_L \frac{\partial \Delta u}{\partial n}\,ds = 0 \tag{2.9}$$

Для функции $u(x, y)$, гармонической в S, из (2.7) следуют известные соотношения

$$u(P) = \frac{1}{2\pi}\int_L l(u;\ P,\ Q)\,ds, \quad P \in S^+ \tag{2.10}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_L l(u;\ P,\ Q)\,ds, \quad P \in S^-$$

Рассмотрим более подробно случай бесконечной области. Введем в рассмотрение область S_R, расположенную вне контуров $L_1, L_2, \ldots, L_m$ и внутри окружности L_R радиуса R с центром в начале координат; R берется настолько большим, чтобы окружность L_R охватила все контуры L_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, совокупность которых, т. е. полную границу области, вновь обозначим через L. Положим

(2.11) $$u - u_0 = u_*$$

где u_0 определяется первой формулой (2.1) и последними тремя формулами (2.5)

(2.12) $$u_0 = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi_0(z) + \chi_0(z)] = \rho^2 [\Gamma + B' \cos 2\vartheta - C' \sin 2\vartheta], \quad z = \rho e^{i\vartheta}$$

(2.13) $$\sigma_x^{(\infty)} = 2(\Gamma - B'), \quad \sigma_y^{(\infty)} = 2(\Gamma + B'), \quad \tau_{xy}^{(\infty)} = 2C'$$

(σ_x, σ_y, τ_{xy} — компоненты напряжения). Напомним, что при рассмотрении плоской задачи для областей, содержащих бесконечно удаленную точку плоскости, значения компонентов напряжения на бесконечности, т. е. величины (2.13), заданы.

Правая часть (2.12) представляет собой функцию Эйри, соответствующую однородному полю напряжений, вызванному усилиями (2.13). Она бигармонична в любой конечной части плоскости и при больших $|z|$

(2.14) $$u_0 = O(\rho^2)$$

Для функции $u - u_0$ соотношения (2.7), очевидно, справедливы в S_R. Следовательно

$$u_*(P) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L+L_R} [L^\circ(u_*;\ P,\ Q) + l(u_*;\ P,\ Q)]\, ds, \quad P \in S_R$$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L+L_R} [L^\circ(u_*;\ P,\ Q) + l(u_*;\ P,\ Q)]\, ds, \quad P \in S_k^-, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

Кроме того, аналогично (2.9)

(2.15) $$\int\limits_{L+L_R} \frac{\partial \Delta u_*}{\partial n}\, ds = 0$$

Рассмотрим функцию

(2.16) $$w_0(P) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_R} [L^\circ(u_*;\ P,\ Q) + l(u_*;\ P,\ Q)]\, ds$$
$$\Delta w_0(P) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} l(\Delta u_*;\ P,\ Q)\, ds$$

где P — произвольная точка в любой конечной части плоскости z. На основании первой формулы (2.6) при больших $|z|$ справедливы оценки

$$\Delta u = O(|z|^{-2}), \qquad \frac{\partial \Delta u_*}{\partial n} = O(|z|^{-3})$$

вследствие которых интеграл в (2.16) стремится к нулю при $R \to \infty$. Отсюда следует, что

(2.17) $$\Delta w_0 = 0 \text{ всюду на плоскости } z$$

На том же основании равенство (2.15) в пределе при $R \to \infty$ примет вид

(2.18) $$\int\limits_{L} \frac{\partial \Delta u_*}{\partial n}\, ds = \int\limits_{L} \frac{\partial \Delta u}{\partial n}\, ds = 0$$

Почти очевидно, что при выполнении условия (2.18) функция

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{L} [L^\circ(u;\ P,\ Q) + l(u;\ P,\ Q)]\, ds$$

не может на бесконечности возрастать быстрее, чем $\rho \ln \rho$. Отсюда, учитывая еще (2.14), заключаем, что при больших $|z|$

(2.19) $$w_0 = o(\rho^2)$$

На основании (2.17) и (2.19) следует теперь

$$\omega_0(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$$

где α, β, γ — произвольные вещественные постоянные. На этот трехчлен не будем обращать внимания,— он не дает ненулевых напряжений.

В конечном счете, для функции напряжения $u(x, y)$ в бесконечной области S^+ имеют место представления

(2.20)
$$u(P) = u_0(P) + \frac{1}{2\pi}\int_L [L^\circ(u;\ P,\ Q) + l(u;\ P,\ Q)]\, ds, \quad P \in S^+$$
$$u_0(P) = \frac{1}{2\pi}\int_L [L^\circ(u; P, Q) + l(u;\ P,\ Q)]\, ds, \quad P \in S_k^-, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

Соответственно

(2.21)
$$\Delta u(P) = \Delta u_0(P) + \frac{1}{2\pi}\int_L l(\Delta u;\ P,\ Q)\, ds, \quad P \in S^+$$
$$\Delta u_0(P) = \frac{1}{2\pi}\int_L l(\Delta u;\ P,\ Q)\, ds, \quad P \in S_k^-, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

К предыдущим формулам следует еще присоединить (2.18). Условия однозначности смещений (2.4), разумеется, остаются без изменения.

3. Интегральные уравнения плоской задачи. Плоская задача (задача о плоской деформации или обобщенном плоском напряженном состоянии упругого тела) при введенных условиях заключается в определении в области S^+ бигармонической функции напряжений $u(x, y)$ по граничным условиям

(3.1) $$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} = f_1(t) + if_2(t) + c(t) \text{ на } L$$

Здесь f_1, f_2 — заданные на L функции, однозначные и непрерывные на каждом из контуров L_k, составляющих L, подчиненные условиям

(3.2) $$\int_{L_k} f_1\, dx + f_2\, dy = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

а $c(t) = c_k = \alpha_k + i\beta_k$ на L_k, причем c_k — комплексные постоянные, подлежащие определению вместе с функцией u. Лишь одну из постоянных c_k можно произвольно зафиксировать; будем считать, что $c(t) = 0$ на L_0. Кроме того, от функции u требуется, чтобы она удовлетворяла следующим дополнительным условиям:

(3.3) $$\int_{L_k} \frac{\partial \Delta u}{\partial n}\, ds = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

(3.4) $$\int_{L_k} \left(x\frac{\partial \Delta u}{\partial n} - \Delta u\frac{\partial x}{\partial n}\right) ds = 0, \quad \int_{L_k} \left(y\frac{\partial \Delta u}{\partial n} - \Delta u\frac{\partial y}{\partial n}\right) ds = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m)$$

В случае бесконечной области граничные условия (3.1) задаются на совокупности $L_1, L_2, \ldots, L_m$ и в соответствии с этим одно из дополнительных условий, а именно (3.3), при $k = 0$ отпадает. К этим условиям следует еще присоединить условие на бесконечности

$$u(x, y) = u_0(x, y) + O(|z|) \tag{3.5}$$

где u_0 дается формулой (2.12), а второе слагаемое — правая часть первой формулы (2.1), если вместо φ и χ подставить соответствующие правые части равенств (2.6). (Точнее, на бесконечности следует задавать все частные производные от u второго порядка, а это равносильно заданию самой функции u в виде (3.5).) Постоянную c_k на каком-либо одном из контуров L_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) и здесь можно задавать произвольно, считать, например, равной нулю, что и будем делать. Таким образом, число неизвестных действительных постоянных, подлежащих определению в ходе решения задачи, равно $2m$ и $2m - 2$ в случае конечной и бесконечной областей соответственно.

Приступая к построению интегральных уравнений для конечной области S^+, перепишем условия (3.1) в виде

$$\begin{gathered} u = g_0(t) + \alpha_k x + \beta_k y + \lambda_k \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h_0(t) + \alpha_k \frac{\partial x}{\partial n} + \beta_k \frac{\partial y}{\partial n} \\ g_0(t) = \int_0^s f_1 dx + f_2 dy, \quad h_0(t) = f_1 \frac{\partial x}{\partial n} + f_2 \frac{\partial y}{\partial n} \text{ на } L_k (k = 0, 1, \ldots, m) \end{gathered} \tag{3.6}$$

Согласно сказанному выше, можно считать $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, а постоянными λ_k будем пренебрегать — для решения задачи они никакой роли не играют.

В правую часть первого равенства (2.7) внесем вместо u и $\partial u / \partial n$ выражения (3.6) и учтем, что функция $\alpha_k x + \beta_k y + \lambda_k$ всюду гармонична. Тогда, воспользовавшись формулами (2.10), получим для решения поставленной задачи следующее интегральное представление (в правой части равенства аддитивная постоянная λ_0 опущена):

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int L^\circ(u; P; Q)\, ds + w(P), \quad P \in S^+ \tag{3.7}$$

$$w(P) = \frac{1}{2\pi} \int \left[\left(\ln \frac{1}{r} - 1 \right) h_0(Q - g_0(Q) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right] ds \tag{3.8}$$

Функция $w(P)$ (сумма потенциалов простого и двойного слоев с известными плотностями) задана на всей плоскости. При переходе точки P через линию L она претерпевает разрыв, что не существенно для последующего изложения.

Перейдем в (3.7) к пределу при $P \to P_0$ ($P_0 \in L$) и продифференцируем предельное равенство дважды по дуге контура. (Для законности дифференцирования по дуге s необходимо, чтобы заданные функции g_0 и h_0 подчинялись определенным условиям гладкости, которые нетрудно уточнить.) Используя[1] затем граничное условие (3.6) для искомой функции

$u(P)$, находим (штрих означает дифференцирование по s)

$$\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\partial^2}{\partial s_0^2} L^\circ(u; P_0, Q)\,ds = g(t_0) + \alpha_k x_0'' + \beta_k y_0'' \text{ на } L_k \tag{3.9}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, m; \quad t_0 = x_0 + iy_0)$$

$$g(t_0) = g_0''(t_0) - \partial^2 w(P_0) / \partial s_0^2. \tag{3.10}$$

В первом равенстве (2.8) также перейдем к пределу при $P \to P_0$ и воспользуемся известной формулой для предельных значений потенциала двойного слоя. Тогда

$$\Delta u(P_0) = \frac{1}{\pi}\int_L l(\Delta u; P_0, Q)\,ds, \quad P_0 \in L \tag{3.11}$$

причем в левой части равенства фигурируют предельные значения на линии L функции Δu, а в правой части — значения интеграла в первом равенстве (2.8) на той же линии.

Совокупность равенств (3.9), (3.11) дает систему интегральных уравнений относительно неизвестных граничных значений функций Δu и $\partial\Delta u / \partial n$. После вычислений, связанных с дифференцированием оператора L° под знаком интеграла в (3.9), при использовании обозначений

$$\Delta u(Q) = \sigma(Q), \quad \frac{\partial}{\partial n_Q}\Delta u = \nu(Q) \tag{3.12}$$

систему интегральных уравнений запишем в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_L [k_{11}(t_0, t)\nu(t) + k_{12}(t_0, t)\sigma(t)]\,ds = g(t_0) + \alpha_k x_0'' + \beta_k y_0'' \tag{3.13}$$

$$\sigma(t_0) + \frac{1}{2\pi}\int [k_{21}(t_0, t)\nu(t) + k_{22}(t_0, t)\sigma(t)]\,ds = 0$$

$$-4k_{11}(t_0, t) = 2(\ln r + 1) + \cos 2\alpha(t, t_0) - r(2\ln r + 1)\times$$
$$\times k(t_0)\sin\alpha(t, t_0)$$
$$-2k_{12}(t_0, t) = r^{-1}\sin\alpha(t_0, t) - r^{-1}\sin 2\alpha(t, t_0)\cos\alpha(t_0, t) -$$
$$- k(t_0)\sin\alpha(t, t_0)\sin\alpha(t_0, t) + k(t_0)\cos[\alpha(t) - \alpha(t_0)]\times$$
$$\times(\ln r + 1/2)$$
$$k_{21}(t_0, t) = 2(\ln r + 1), \quad k_{22}(t_0, t) = 2\frac{\partial}{\partial n_Q}\ln\frac{1}{r} =$$
$$= 2r^{-1}\sin\alpha(t_0, t) \quad (r = |t - t_0|)$$

Здесь $k(t)$ — кривизна линии L в точке t, $\alpha(t)$ — угол, составляемый (положительной) касательной к L в точке t с осью Ox, а $\alpha(t_0, t)$ — также угол, составляемый той же касательной с вектором t_0t и отсчитываемый от этого последнего в положительном направлении. Обозначения $\alpha(t_0)$ и $\alpha(t, t_0)$ имеют аналогичный смысл (углы $\alpha(t_0, t)$, $\alpha(t, t_0)$ с направлениями их отсчета наглядно показаны в [4]).

К уравнениям (3.13) присоединяются дополнительные условия (3.3), (3.4), которые в новых обозначениях принимают вид

$$\int_{L_k} \nu(t)\,ds = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, m) \tag{3.14}$$

$$\int_{L_k} [x\nu(t) + y'\sigma(t)]\,ds = 0, \quad \int_{L_k} [y\nu(t) - x'\sigma(t)]\,ds = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m)$$

Укажем еще одно соотношение, которому должны удовлетворять функции ν и σ. С этой целью вычислим по формуле (3.7) нормальную производную искомой функции $u(x, y)$ и проинтегрируем ее по линии L. Учитывая гармоничность функции w в S^+, находим

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \frac{1}{4\pi} \int_L \left[a(t) \frac{\partial \Delta u}{\partial n} - b(t) \Delta u \right] ds$$

$$a(t) = \int_L |t - t_0| \left(\ln|t - t_0| + \frac{1}{2} \right) \sin \alpha(t, t_0) ds_0$$

$$b(t) = \int_L \left\{ \cos[\alpha(t) - \alpha(t_0)] \left(\ln|t - t_0| + 1 \right) + \frac{1}{2} \cos[\alpha(t_0, t) + \alpha(t, t_0)] \right\} ds_0$$

Используя здесь граничные условия (3.1) и обозначения (3.12), находим

$$(3.15) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_L [a(t) \nu(t) - b(t) \sigma(t)] ds = G, \quad G = 2 \int_L f_2 dx - f_1 dy$$

Соотношение (3.15) будем присоединять к системе (3.13), (3.14) в случае конечной области (в случае бесконечной области (3.15) не потребуется).

В случае бесконечной области S^+ оба уравнения (3.13) будут неоднородными, причем правыми их частями, соответственно f и h, без слагаемых с постоянными α_k, β_k будут

$$(3.16) \qquad f(t) = g(t) - d^2 u_0 / ds^2, \; h(t) = \Delta u_0 \; (\text{на } L)$$

Функция u_0 определяется формулой (2.12). Условия (3.14), за исключением одного, при $k = 0$, которое, очевидно, здесь отпадает, остаются без изменения.

И в случае конечной области можно, разумеется, вводить функцию, аналогичную u_0, если только плоская задача для (конечной) односвязной области $S_0{}^+$, ограниченной контуром L_0, допускает решение в замкнутой форме.

Известно, что методом интегральных уравнений плоская задача теории упругости неоднократно исследовалась разными авторами [5–9]. Преимущество приведенных выше интегральных уравнений относительно ν и σ состоит в том, что их решение дает возможность без каких-либо дальнейших вычислений определить контурные напряжения, которые представляют собой интерес в задачах для многосвязных областей.

Несколько другая система уравнений для ν и σ построена в работе [10]. Одно из уравнений этой системы в точности совпадает со вторым уравнением (3.13).

Выше, как и в [10], для построения интегральных уравнений используется представление (3.7), учитывающее через функции w граничные условия задачи и приводящее ко второму уравнению (3.13). Поэтому для получения полной системы интегральных уравнений достаточно воспользоваться лишь каким-либо одним из двух возможных условий плоской задачи. В данной работе используется условие (f_*, g_* — заданные на L функции)

$$\partial^2 u / \partial s^2 = f_* \text{ на } L;$$

а в работе [10] — условие

$$(3.17) \qquad \partial^2 u / \partial T^2 = g_* \text{ на } L$$

где $\partial / \partial T$ — дифференцирование по некоторому фиксированному направлению, совпадающему с направлением касательной в какой-либо точке границы L.

Автору этих строк не вполне ясен смысл условия (3.17): исходные условия задачи (3.1), по-видимому, не позволяют определить левую часть (3.17) по контуру L_k.

На обводах отверстий, свободных от внешних усилий (только такие отверстия и рассматривались в [10]), в условии (3.17) положено $g_* \equiv 0$. Если даже считать, что такие условия справедливы, пользоваться ими все же не совсем удобно. Они исключают из рассмотрения постоянные α_k, β_k, без которых плоская задача, вообще говоря, некорректна; хорошо известно, что лишь подходящий подбор неизвестных постоянных α, β может гарантировать необходимую однозначность упругих смещений. Отсутствие этих постоянных у авторов [10] приводит к тому, что некоторое число линейных алгебраических уравнений для дискретных значений решения интегральных уравнений оказывается излишним.

В некоторых частных случаях может, однако, случиться, что часть постоянных α, β или даже все постоянные равны нулю. Этим, по-видимому, и следует объяснить приемлемость численных результатов в рассмотренных в [10] примерах двух круговых отверстий (в задаче с одним отверстием постоянные α, β вообще не нужны).

Далее, в [10] отсутствует первое условие (3.14) при $k = 0$, а условие это, как будет видно из дальнейшего, играет существенную роль при исследовании интегральных уравнений (авторы работы [10] не занимались исследованием своих интегральных уравнений).

4. Исследование интегральных уравнений. Начнем со случая конечной области и рассмотрим однородную систему уравнений

$$\frac{1}{2\pi}\int_L [k_{11}(t_0, t)\,\nu(t) + k_{12}(t_0, t)\,\sigma(t)]\,ds = 0 \tag{4.1}$$

$$\sigma(t_0) + \frac{1}{2\pi}\int_L [k_{21}(t_0, t)\,\nu(t) + k_{22}(t_0, t)\,\sigma(t)]\,ds = 0$$

$$\int_{L_k} \nu(t)\,ds = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_L [a(t)\,\nu(t) - b(t)\,\sigma(t)]\,ds = 0$$

Введем в рассмотрение бигармоническую в S^+ функцию v, определяемую для произвольных непрерывных на L функций ν и σ интегралом

$$v(P) = \frac{1}{2\pi}\int_L \left[r^2 \ln\frac{1}{r}\,\nu(Q) - \sigma(Q)\frac{\partial}{\partial n} r^2 \ln\frac{1}{r}\right] ds \tag{4.2}$$

Назовем ее v_0 для какого-либо решения ν_0, σ_0 однородной системы и применим к ней оператор Лапласа. Получим

$$\Delta v_0(P) = \frac{1}{2\pi}\int_L \left[\left(\ln\frac{1}{r} - 1\right)\nu_0(Q) - \sigma_0(Q)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\right] ds \tag{4.3}$$

Предельные значения на L правой части (4.3), когда точка P стремится из S^- к точке P_0 на L, согласно первому уравнению (4.1), равны нулю Но правая часть (4.3) гармонична в любой из областей S_k^- ($k = 0, 1, \ldots, m$) и в силу третьего уравнения (4.1) ограничена на бесконечности. Поэтому на основании единственности гармонической функции

$$\frac{1}{2\pi}\int_L \left[\left(\ln\frac{1}{r} - 1\right)\nu_0(Q) - \sigma_0(Q)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\right] ds = 0, \quad P \in S^- \tag{4.4}$$

Из (4.3) и (4.4) после перехода к пределу при $P \to P_0$ изнутри и извне S^+ соответственно получим

$$(4.5) \qquad \Delta v_0 (P_0) = \sigma_0 (P_0) \text{ на } L$$

Зафиксируем точку P_0 на L и продифференцируем равенство (4.3) и (4.4) по направлению внешней нормали к L в точке P_0.

Переходя в полученных таким образом равенствах к пределам при $P_0 \to P$, находим еще

$$(4.6) \qquad \frac{\partial}{\partial n_0} \Delta v_0(P_0) = \nu_0 (P_0) \text{ на } L$$

и формула (4.2), левая часть которой при $\nu \to \nu$, $\sigma = \sigma_0$ равна v_0, принимает вид

$$(4.7) \qquad v_0(P) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_L L^\circ (v_0; P, Q)\, ds, \qquad P \in S^+$$

На основании формул Грина (2.7) отсюда следует

$$(4.8) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int\limits_L l(v_0; P, Q)\, ds = 0, \quad P \in S^+ \\ &\frac{1}{2\pi} \int\limits_L [L^\circ (v_0; P, Q) + l(v_0; P, Q)]\, ds = 0, \quad P \in S^- \end{aligned}$$

Заметим теперь, что бигармоническая в S^+ функция, равная правой части равенства (4.7), непрерывна вплоть до границы L. Ее предельные значения имеют производную второго порядка по дуге контура, равную, в силу первого уравнения (4.1), нулю на L тождественно. Это означает, что указанная функция должна принимать на L постоянные значения, второе равенство (4.8) дает

$$(4.9) \qquad \frac{1}{2\pi} \int\limits_L l(v_0; P, Q)\, ds = -\lambda_k, \quad P \in L_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m$$

В левой части равенства (4.9) фигурируют предельные значения на L соответствующего интеграла из S^-, λ_k — некоторые, вполне определенные действительные постоянные.

Из первого равенства (4.8) и (4.9) на основании известных свойств потенциала двойного слоя следует $v_0 = \lambda_k$ на L_k ($k = 0, 1, \ldots, m$). Функция, выражаемая вторым интегралом в левой части второго равенства (4.8), гармонична в каждой из областей S_k^-, составляющих S^-, и в силу последнего уравнения (4.1) ограничена на бесконечности. Поэтому равенства (4.9) означают

$$(4.10) \qquad \frac{1}{2\pi} \int\limits_L l(v_0; P, Q)\, ds = -\lambda_k, \qquad P \in S_k^-, \qquad k = 0, 1, \ldots, m$$

Используя предельные свойства потенциала простого слоя, так же, как при выводе (4.6), из первого равенства (4.8) и (4.10) находим

$$\partial v_0 / \partial n = 0 \text{ на } L_k \quad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

Воспользуемся теперь тождеством Грина для функций Δv_0, v_0, где v_0 задается в S^+ равенством (4.7). Имеем

$$\iint_{S^+} (\Delta v_0)^2 ds = \int_L \left(\Delta v_0 \frac{\partial v_0}{\partial n} - v_0 \frac{\partial \Delta v_0}{\partial n}\right) ds \tag{4.11}$$

В силу установленных выше равенств для предельных значений функции v_0 и ее нормальной производной, а также соотношений, записанных третьим равенством (4.1) при $v = v_0$, правая часть предыдущей формулы равна нулю. Следовательно, $\Delta v_0 = 0$ в S^+ и, на основании (4.5) и (4.6), $v_0(Q) = \sigma_0(Q) = 0$ на L. Единственность решения системы (4.1) доказана.

Переходя к случаю бесконечной области, выясним, прежде всего, поведение функции (4.2) при больших $|z|$. После элементарных вычислений получаем асимптотическую формулу (A и B — действительная и комплексная постоянные)

$$\begin{aligned} 8\pi v(P) = A\,|z^2|\ln|z| + (B\bar{z} + \bar{B}z)(\ln|z| + {}^1/_2) + \\ + O(\ln|z|) \quad (|z| \to \infty) \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$-A = \int_L \nu(t)\,ds, \qquad B = \int_L [t\nu(t) - it'\sigma(t)]\,ds \tag{4.13}$$

В случае бесконечной области однородная система будет состоять из первых двух уравнений (4.1), получаемых из неоднородных при $f_1 = f_2 = \alpha_k = \beta_k = 0$ на L_k $(k = 1, \ldots, m)$, $\Gamma = B' = C' = 0$ и следующих дополнительных уравнений общим числом $m + 2$:

$$\begin{gathered} \int_{L_k} \nu(t)\,ds = 0 \quad (k = 1, \ldots, m) \\ \int_L [x\nu(t) + y'\sigma(t)]\,ds = \int_L [y\nu(t) - x'\sigma(t)]\,ds = 0 \end{gathered} \tag{4.14}$$

(L — на этот раз совокупность контуров $L_1, L_2, \ldots, L_m$).

Аналогично предыдущему вводится в рассмотрение функция v_0, определяемая через решение v_0, σ_0 однородной системы равенством (4.2), и на основании формул Грина (2.21) при $u_0 \equiv 0$, второго уравнения (4.1) и первого уравнения (4.14) устанавливаются предельные соотношения (4.5) и (4.6). Используя формулы (2.20) при $u_0 \equiv 0$ и первое уравнение (4.1), как и в случае конечной области, находим

$$v_0 = -\lambda_k, \quad \partial v_0 / \partial n = 0 \quad \text{на } L_k \ (k = 1, 2, \ldots, m)$$

где λ_k — некоторые действительные постоянные.

Формула (4.11) остается для бесконечной области.

Чтобы доказать это, надлежит исследовать нри больших $|z|$ интеграл

$$\int_{L_k} \left(\Delta v_0 \frac{\partial v_0}{dn} - v_0 \frac{\partial \Delta v_0}{\partial n}\right) ds \tag{4.15}$$

Согласно соотношениям (4.14), коэффициенты A и B из (4.13), соответствующие функции v_0, равны нулю и формула (4.12) дает для v_0 оценку

$$v_0 = O(\ln|z|) \tag{4.16}$$

Она показывает, что функция v_0 представима вне L_k формулой (2.1), где φ и χ представляют собой ряды (2.6) без коэффициентов a_0 и a_0'. На основании сказанного оценка (4.16) допускает следующее усиление:

$$v_0 = O(1), \quad \frac{\partial v_0}{\partial n} = O(|z|^{-1}), \quad \Delta v_0 = O(|z|^{-2}), \quad \frac{\partial \Delta v_0}{\partial n} = O(|z|^{-3})$$

При наличии предыдущих формул интеграл (4.15) стремится к нулю при $R \to \infty$, а это и доказывает справедливость формулы (4.11) в рассматриваемом случае. Из нее по-прежнему следует $\Delta v_0 = 0$ в S^+ и, значит, $\nu_0(Q) = \sigma_0(Q) = 0$ на L.

Обратимся к неоднородным интегральным уравнениям и ввиду полной аналогии ограничимся рассмотрением случая конечной области.

Заметим прежде всего, что первое уравнение (3.14) можно записать в виде

$$\frac{d^2}{ds_0^2}\Omega(P_0) = 0 \tag{4.17}$$

$$\Omega(P_0) = \frac{1}{8\pi}\int_L \left[r^2 \ln\frac{1}{r}\nu(Q) - \sigma(Q)\frac{\partial}{\partial n}r^2 \ln\frac{1}{r}\right] ds + w(P_0) - \tag{4.18}$$
$$- g_0(P_0) - \alpha_k x_0 - \beta_k y_0 \text{ на } L_k \quad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

В предыдущем равенстве всюду фигурируют предельные значения соответствующих функций из области S^+.

Функция Ω, определяемая (4.18), однозначна и непрерывна на каждом из контуров L_k при любых ν и σ. Поэтому уравнение, получаемое из (4.17) дифференцированием по дуге s_0, а именно, уравнение

$$d^3 / ds_0^3\Omega(P_0) = 0 \tag{4.19}$$

равносильно исходному. (Для законности дифференцирования равенства (4.17) по дуге s_0 необходимо прежде всего повысить гладкость линии L, потребовать, например, чтобы координаты ее точек x, y имели непрерывные производные по s до третьего порядка.) Поэтому, если в рассматриваемой системе интегральных уравнений заменить первое уравнение (3.13) уравнением (4.19), то получим систему, вполне эквивалентную первоначальной.

С другой стороны, система из уравнения (4.19) и второго уравнения (3.13), как можно убедиться на основании формул (3.13) для ядер k_{ij}, будет представлять собой систему сингулярных интегральных уравнений нормального типа с нулевым индексом (см. [4], гл. VI). Для такой системы, как известно, справедлива теория Фредгольма, которой и воспользуемся.

Наличие решения системы из уравнения (4.19) и второго уравнения (3.13) гарантируется теоремой существования решения основной бигармонической задачи для многосвязных областей [5, 9]. (Во избежание исследования союзной однородной системы уравнений здесь предпочитаем не прибегать к соответствующей теореме Фредгольма.) Конечное число произвольных постоянных, входящих в решение через нетривиальные решения соответствующей однородной системы интегральных уравнений, на основании доказанной выше единственности решения системы из уравнений (3.13), первого уравнения (3.14) и (3.15) определяются единственным образом. Поэтому упомянутое решение v, σ будет зависеть исключительно от g, α_k, β_k и линейно содержать неизвестные постоянные $\alpha_k\beta_k$.

Если это решение подставить в последние два условия (3.14), то для определения α_k, β_k получим систему линейных уравнений, которая в обозначениях

$$\alpha_j = d_j, \quad \beta_j = \alpha_{m+j} \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

примет вид

$$\sum_{k=1}^{2m} a_{ik}\alpha_k = F_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2m) \tag{4.20}$$

Здесь F_i — известные постоянные, зависящие от задаваемых на L функций f_1, f_2 и обращающиеся в нуль при $f_1(t) = f_2(t) = 0$ на L, а a_{ik} — также определенные постоянные, зависящие лишь от геометрии области S^+ (фактически решать интегральные уравнения в системе (4.20) нет необходимости).

Система (4.20) однозначно определяет постоянные α_k $(k = 1, 2, \ldots, 2m)$.

В самом деле, пусть система имеет решение α_k° при $F_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, 2m)$. Тогда система интегральных уравнений (3.13), (3.14) будет иметь решение при $g(t) = 0$ на L, и $\alpha_k = \alpha_k^\circ$, $\beta_k = \overset{\circ}{\alpha}_{m+k}$. Подставляя это решение ν_0, σ_0 в правую часть (4.2), построим бигармоническую в S^+ функцию $v_0(P)$, удовлетворяющую на L граничным условиям

$$\frac{\partial v_0}{\partial x} + i\frac{\partial v_0}{\partial y} = \alpha_k^\circ + i\overset{\circ}{\alpha}_{m+k} \text{ на } L_k \, (k = 0, 1, \ldots, m)$$

и условиям однозначности упругих смещений. Тогда, на основании единственности решения плоской задачи, $v_0 = \text{const}$ в S^+, и все $\alpha_k^\circ = 0$.

Таким образом, система интегральных уравнений (3.13) — (3.15) разрешима при любых (достаточно гладких) граничных заданиях f_1, f_2, подчиненных указанным выше ограничениям, и однозначно определяет функции v, σ и неизвестные заранее постоянные α_k, β_k.

Интегральные уравнения (3.13) имеют ядра с логарифмическими особенностями и, как следует из изложенного, эквивалентны в смысле существования решения регулярным уравнениям второго рода. Численную реализацию решений можно осуществить известными, хорошо разработанными методами.

Поступила 20 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. *Grioli G.* Struttura della funzione di Airy nei sistemi molteplicement connessi. G. Matem. di Battaglini, 1947, vol. 77, p. 119.
3. *Michell J. H.* On the direct determination of stress in an elastic solid, with applications to the theory of plates. Proc. London Math. Soc., 1930, vol. 31, p. 100.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
5. *Michlin S. B.* Le problème biharmonique fondamental à deux dimensions. C. R. Acad. Sci. 1933, t. 197, No. 12, p. 608—610.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Новый общий способ решения основных контурных задач плоской теории упругости. Докл. АН СССР, 1934, т. 3, № 1.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Исследование новых интегральных уравнений плоской теории упругости. Докл. АН СССР, 1934, т. 3, № 2.
8. *Шерман Д. И.* К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах. Докл. АН СССР, 1940, т. 28, № 1.
9. *Шерман Д. И.* Статические плоские задачи теории упругости. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1937, т. 11.
10. *Christiansen S., Hansen E.* A direct integral equation method for computing the hoop stress at holes in plane isotropic sheet. J. Elast., 1975, vol. 5, No. 1, p. 1—14.