

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ С ВНУТРЕННИМ МОМЕНТОМ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

В. В. К и р ю ш и н

(Москва)

Исследуются нелинейные механические, магнитные и тепловые явления в намагничивающихся средах с внутренним моментом количества движения во вращающемся магнитном поле. Найдены момент сил, действующих со стороны намагничивающейся жидкости на неподвижный сосуд сферической формы, амплитуда и сдвиг фазы электродвижущей силы, индуцируемой в катушке, расположенной внутри намагничивающейся жидкости, количество энергии, диссипируемой в единице объема жидкости в единицу времени. Показано, что в сильном магнитном поле должно наблюдаться явление гистерезиса всех указанных физических величин. Явление гистерезиса, например момента сил, действующего на сосуд со стороны намагничивающейся жидкости, заключается в том, что при медленном (квазистатическом) увеличении угловой скорости вращения поля до некоторого критического значения безразмерный момент сил монотонно уменьшается, а при критическом значении скорости вращения поля резко, скачком падает. При дальнейшем увеличении скорости вращения поля безразмерный момент сил снова монотонно уменьшается. Такой резкий спонтанный скачок наблюдается и при медленном уменьшении скорости вращения поля от достаточно большой величины. При этом критическое значение угловой скорости вращения поля будет другим. Установлено, что для величин сдвига фазы эдс и количества диссипируемой энергии явление гистерезиса имеет различные варианты в зависимости от проницаемости жидкости.

Математические модели, описывающие намагничивающиеся среды, построены в работах [1-4]. В рамках этих моделей в ряде работ исследовалось поведение намагничивающихся жидкостей во вращающемся магнитном поле как при предположении о малой величине скорости вращения поля, когда описывающие среду уравнения становятся линейными [5-7], так и без такого предположения [8-10]. В работах [8-10] обнаружено явление гистерезиса ряда физических величин намагничивающейся жидкости, таких, как намагниченность, угол запаздывания вектора намагниченности от вектора магнитного поля, внутреннего момента количества движения, макроскопической угловой скорости. Это явление объясняется [8] срывом вращения ферромагнитных частиц суспензии, когда вектор магнитного момента частицы отстает от вектора магнитного поля на угол в 90° .

1. Рассмотрим момент сил m , действующий со стороны намагничивающейся жидкости на неподвижный сосуд сферической формы во внешнем однородном вращающемся в некоторой плоскости с постоянной угловой скоростью Ω , магнитном поле H_0 . Предполагаем отсутствие потока внутреннего момента количества движения в жидкости (частицы суспензии не взаимодействуют друг с другом). При таком предположении, как показано в работе [7], жидкость останется в покое. Величина момента сил m

определяется формулой

$$(1.1) \quad m^i = \int_{\Sigma} \varepsilon^{ijs} r_j (p_{sm} - \tau_{sm}) n^m d\sigma$$

Здесь Σ — поверхность сферы радиуса R ; r_j , n^m , ε^{ijs} — радиус-вектор точки поверхности, единичный вектор внутренней нормали к поверхности сферы, псевдотензор Леви-Чивиты соответственно. Тензор максвелловских натяжений электромагнитного поля снаружи поверхности сферы τ_{ij} и тензор напряжений p_{ij} в неподвижной жидкости в приближении магнитостатики определяются формулами [4]

$$(1.2) \quad \tau_{ij} = \frac{H_i B_j}{4\pi} - \frac{H^k B_k}{8\pi} \delta_{ij}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$$

$$p_{ij} = - \left(p + \frac{H^k B_k}{8\pi} \right) \delta_{ij} + \frac{H_i B_j}{4\pi} + \frac{\varepsilon_{ijs} K^s}{2\tau_s}$$

Здесь K , M , H , p — внутренний момент количества движения единицы объема, намагниченность, магнитное поле, давление соответственно; τ_s — постоянный феноменологический коэффициент. Приближение магнитостатики означает, что выполняется критерий $R^2 \Omega_f^2 / c^2 \ll 1$, где c — скорость света в вакууме.

Уравнения работы [4], описывающие поведение такой макроскопически неподвижной среды, в случае, когда феноменологические коэффициенты не зависят от магнитного поля, без учета перекрестных эффектов и при отсутствии потока внутреннего момента количества движения в приближении магнитостатики имеют вид

$$(1.3) \quad \frac{\partial K}{\partial t} = - \frac{K}{\tau_s} + [\mathbf{M}, \mathbf{H}], \quad \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{1}{I} [\mathbf{K}, \mathbf{M}] - \frac{M - \kappa H}{\tau}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$$

Здесь τ , I , κ — феноменологические коэффициенты, которые будем считать постоянными. Уравнение энергии отщепляется от системы (1.3); оно будет рассмотрено ниже.

Будем искать установившееся решение системы (1.3), предполагая, что величины M и K однородны, т. е. не зависят от координат. Очевидно, вектор M лежит в плоскости вращения поля, а вектор K ортогонален этой плоскости.

Из предположения, что намагниченность однородна, следует, что магнитное поле внутри намагничивающейся жидкости также однородно и связано с внешним магнитным полем H_0 соотношением [11]

$$(1.4) \quad \mathbf{H} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{M} = \mathbf{H}_0$$

Из соотношений (1.1), (1.2) с учетом однородности внутреннего момента получаем, что вектор момента сил m направлен вдоль вектора K , а их безразмерные абсолютные величины совпадают, т. е.

$$(1.5) \quad m^* = \frac{3m\tau_s}{4\pi R^3 I \Omega_f} = \frac{K}{I \Omega_f} = K^*$$

Установившееся решение системы (1.3) имеет вид [5-10]

$$(1.6) \quad M_{\parallel} = \frac{\kappa H}{1 + \beta^2(1 - K^*)^2}, \quad M_{\perp} = \beta(1 - K^*)M_{\parallel}, \quad \beta = \Omega_f \tau$$

Здесь M_{\parallel} , M_{\perp} — проекции вектора M на направление магнитного поля H и на направление, перпендикулярное H . Величина K^* находится из алгебраического уравнения

$$(1.7) \quad K^* - \frac{F(1 - K^*)}{1 + \beta^2(1 - K^*)^2} = 0, \quad F = \frac{\kappa H^2 \tau \tau_s}{I}$$

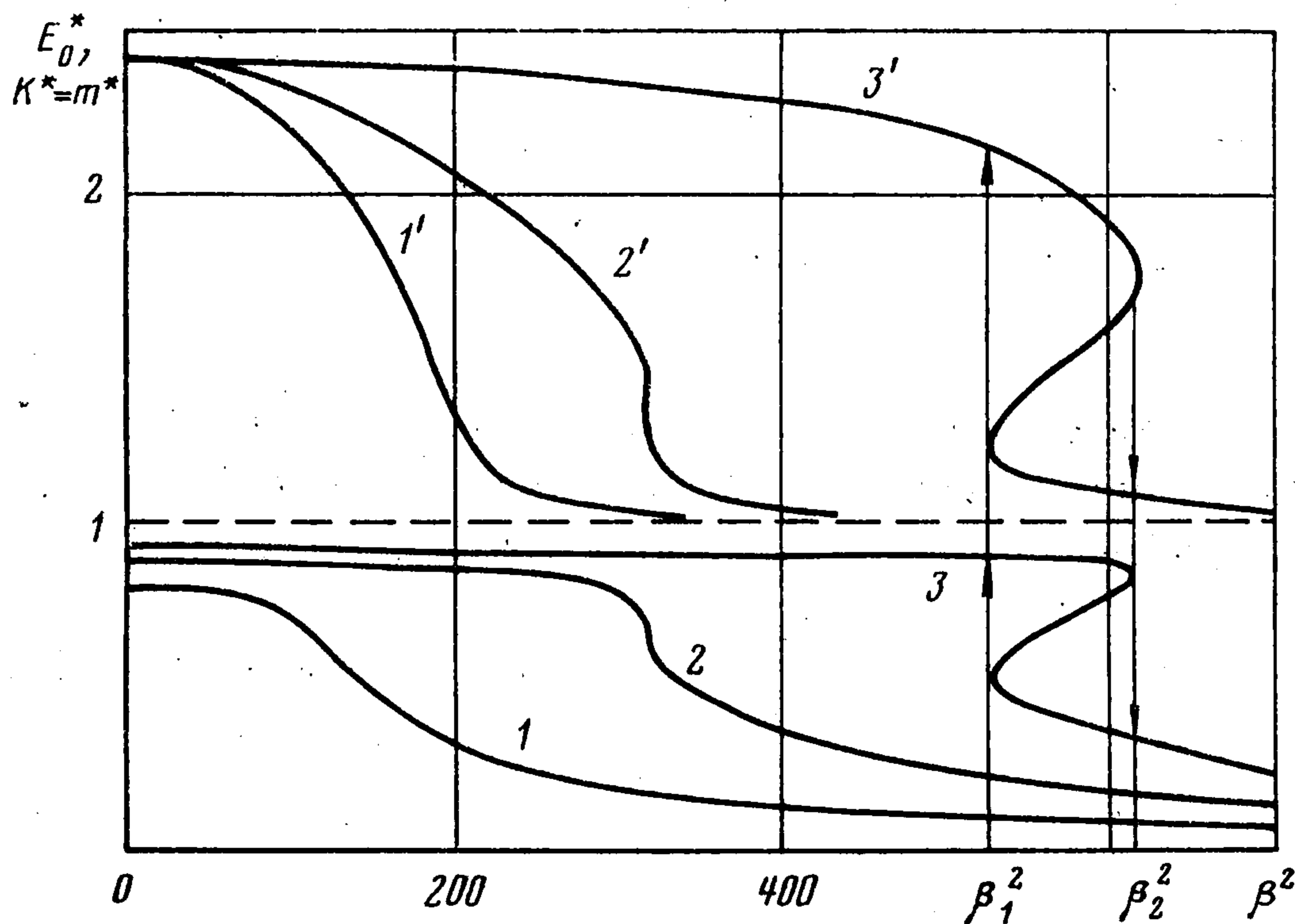
а магнитное поле H определяется как неявная функция из уравнений (1.6), (1.7) и соотношения, вытекающего из (1.4)

$$(1.8) \quad H^2 \left[\left(1 + \frac{4\pi M_{\parallel}}{3H} \right)^2 + \frac{16\pi^2 M_{\perp}^2}{9H^2} \right] = H_0^2$$

Исключая H из уравнения (1.7), получим алгебраическое уравнение для K^*

$$(1.9) \quad K^* + \frac{\varepsilon(3 + 4\pi\kappa)^2(K^* - 1)}{(3 + 4\pi\kappa)^2 + 9\beta^2(1 - K^*)^2} = 0, \quad \varepsilon = \frac{\kappa H_0^2 \tau \tau_s}{I(3 + 4\pi\kappa)^2}$$

Зависимость K^* или равной величины m^* от β^2 определяется параметрами ε и κ , но качественное поведение функции $K^*(\beta^2)$ определяется



Фиг. 1

только ε . На фиг. 1 эта зависимость изображена при $\kappa = 0.6$ и $\varepsilon < 8$ (кривая 1, $\varepsilon = 4$), $\varepsilon = 8$ (кривая 2), $\varepsilon > 8$ (кривая 3, $\varepsilon = 12$). При $\varepsilon > 8$ на интервале (β_1^2, β_2^2) внутренний момент K^* имеет три значения; два из них устойчивы, а среднее значение неустойчиво. Критические значения β_1, β_2 и соответствующие им критические значения безразмерного момента K_1^*, K_2^* определяются из уравнения $d\beta^2 / dK^* = 0$, которое имеет решения

$$(1.10) \quad K_{1,2}^* = \frac{3\varepsilon \mp \sqrt{\varepsilon(\varepsilon - 8)}}{4(\varepsilon + 1)}$$

Из полученных результатов следует, что при $\varepsilon > 8$ возникает гистерезис внутреннего момента, а критические значения β_1, β_2 — точки перехода с одной ветви кривой \mathcal{Z} на другую. Направление перехода обозначено на фигуре стрелками. Подобный результат для внутреннего момента был получен в работе [8], где, однако, пренебрегалось изменением внешнего магнитного поля в намагничивающейся жидкости.

2. Рассмотрим явление индукции электродвижущей силы в цилиндрической катушке, расположенной в намагничивающейся жидкости. Ось катушки лежит в плоскости вращения поля. Величина эдс на один виток катушки E определяется законом индукции Фарадея

$$(2.1) \quad E = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S (H_n + 4\pi M_n) d\sigma$$

Здесь S — поверхность, натянутая на виток катушки, H_n, M_n — проекции векторов намагниченности и магнитного поля на нормаль к поверхности.

Из соотношений (2.1), (1.4), (1.6), (1.8) следует, что эдс в катушке E изменяется по гармоническому закону с частотой Ω_f , а амплитуда E_0 и сдвиг фазы φ определяются формулами

$$(2.2) \quad E_0 = \frac{\Omega_f S}{c} (1 + \zeta^2)^{1/2}, \quad \zeta = \frac{4\pi M_{\perp}}{H + 4\pi M_{\parallel}}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{4\pi M_{\perp}}{3H_0} - \operatorname{arctg} \zeta$$

Здесь S — площадь витка катушки. Сдвиг фазы φ определен так, что в отсутствие намагничивающейся жидкости $\varphi = 0$ (например, по отношению к эдс, возникающей в такой же катушке, также ориентированной, но расположенной вне сосуда с жидкостью).

При малой скорости вращения поля $\Omega_f^2 \tau^2 \ll 1$ формулы (2.2) принимают вид

$$(2.3) \quad E_0 = \frac{\Omega_f S H_0}{3c} (3 + 4\pi\kappa), \quad \varphi = \frac{4\pi\kappa\beta}{\varepsilon + 1} \left(\frac{1}{3 + 4\pi\kappa} - \frac{1}{1 + 4\pi\kappa} \right)$$

Параметром, определяющим качественное поведение зависимости безразмерной эдс $E_0^* = cE_0 / \Omega_f S H_0$ от β^2 , служит величина ε . На фиг. 1 изображен график этой зависимости при разных ε (кривые $1' - 3'$, $\kappa = 0.6$, $\varepsilon = 4, 8, 12$). Эти кривые аналогичны кривым $1-3$ для внутреннего момента. Точки возврата кривой \mathcal{Z} β_1 и β_2 те же, что и для внутреннего момента, и определяются решениями (1.10) совместно с соотношением (1.9). Таким образом, при $\varepsilon > 8$ должно наблюдаться явление гистерезиса для эдс катушки.

На фиг. 2 изображена зависимость сдвига фаз φ от β^2 при разных ε и κ . При $\varepsilon < 8$ (кривая 1, $\varepsilon = 4$, $\kappa = 0.1$) зависимость φ (β^2) однозначна,

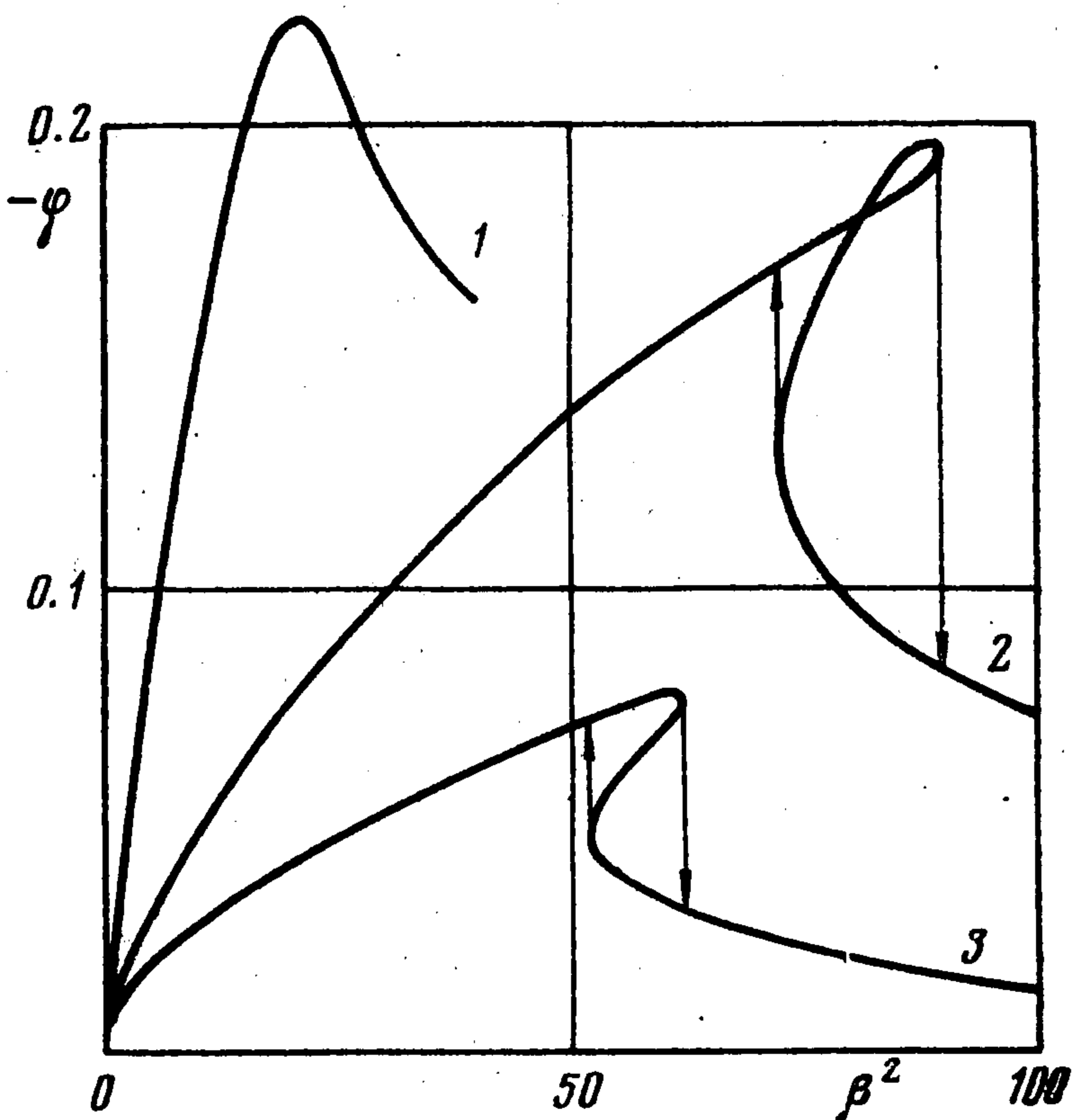
единственный максимум функции достигается в точке β_0^2 , определяемой из условия, что соответствующий внутренний момент K_0^* равен

$$(2.4) \quad K_0^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2\lambda}, \quad \lambda(\kappa) = 1 + \frac{4\pi\kappa}{3 + 4\pi\kappa}$$

При $\varepsilon > 8$ зависимость $\varphi(\beta^2)$ на интервале (β_1^2, β_2^2) неоднозначна, а форма кривой существенно зависит от параметра κ , имея петлеобразный вид с точкой самопересечения при $\lambda(\kappa) > \lambda_c$ (кривая 2, $\varepsilon = 12$, $\kappa = 0.07$) или без точки самопересечения при $\lambda(\kappa) < \lambda_c$ (кривая 3, $\varepsilon = 12$, $\kappa = 0.02$). Критический параметр λ_c определяется по формуле

$$(2.5) \quad \lambda_c = (\varepsilon - \sqrt{\varepsilon(\varepsilon - 8)})/4$$

Из полученных результатов следует, что явление гистерезиса должно осуществляться для величины φ при $\varepsilon > 8$, но по-разному при $\lambda < \lambda_c$ или $\lambda > \lambda_c$. На графиках стрелками изображены переходы с одной ветви кривой на другую при медленном (квазистатическом) изменении скорости вращения поля.



Фиг. 2

3. Рассмотрим диссипацию энергии в намагничивающейся жидкости во вращающемся магнитном поле. За единицу времени в единице объема диссипирует энергия Q , равная в приближении магнитостатики [4]

$$(3.1) \quad Q = \left(\mathbf{H} - \frac{\mathbf{M}}{\kappa} \right) \left(\frac{d\mathbf{M}}{dt} - \frac{1}{I} [\mathbf{K}, \mathbf{M}] \right) + \frac{1}{I} p^{ij} \varepsilon_{ijm} K^m$$

Из соотношений (3.1), (1.2) и решений (1.7) получим

$$Q^* = \frac{\tau Q}{H_0^2} = \frac{H^2}{H_0^2} \left[\left(1 + \frac{M_{\parallel}}{\kappa H} \right)^2 + \frac{M_{\perp}^2}{\kappa^2 H^2} \right] + \frac{\kappa \beta^2 K^{*2}}{F_0}$$

Это выражение при малой скорости вращения поля $\beta^2 \ll 1$ преобразуется к виду

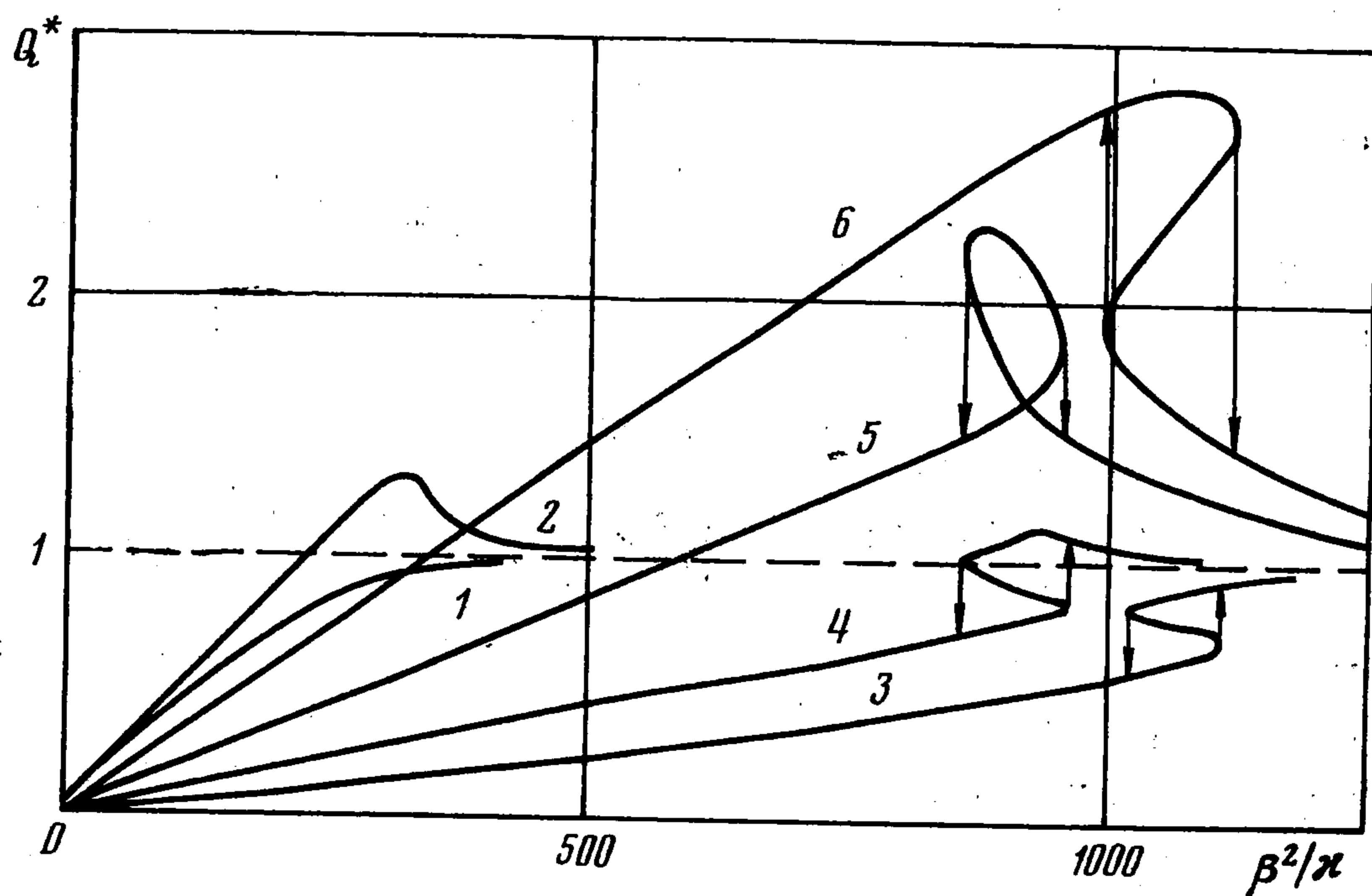
$$Q^* = \frac{9\beta^2(1 + \varepsilon\kappa)}{(\varepsilon + 1)^2(3 + 4\pi\kappa)^2}$$

При $\beta^2 \rightarrow \infty$ имеем асимптотически $Q^* \rightarrow 1$.

На фиг. 3 изображена зависимость Q^* от β^2 при разных ε на κ . При $\varepsilon < 8$ зависимость $Q^*(\beta^2)$ однозначна и монотонна, если $\varepsilon\kappa < 1$ (кривая 1, $\varepsilon = 4$, $\kappa = 0.1$), или имеет единственный максимум в точке β_{00} , если $\varepsilon\kappa > 1$ (кривая 2, $\varepsilon = 4$, $\kappa = 0.5$). Величина β_{00} определяется из условия, что соответствующий внутренний момент

$$K_{00}^* = (\varepsilon\kappa - 1)/(\varepsilon\kappa + 2\kappa - 1)$$

При $\varepsilon > 8$ существует участок неоднозначности (β_1^2, β_2^2) , где одному значению величины Q^* соответствуют три значения величины β^2 . Критические значения β_1, β_2 определяются соотношениями (1.9), (1.10). Верхние и нижние ветви кривой $Q^*(\beta^2)$ являются устойчивыми решениями, среднее решение неустойчиво. В этом случае при медленном уменьшении или медленном увеличении скорости вращения поля должен наблюдаться эффект гистерезиса величины Q^* , который в зависимости от величины κ возможен четырех различных типов, соответствующих разному расположению величины K_{00}^* относительно интервала (K_1^*, K_2^*) : $K_{00}^* < 0$ (кривая 3, $\varepsilon = 12, \kappa = 0.08$), $K_1^* > K_{00}^* > 0$ (кривая 4, $\varepsilon = 12, \kappa = 0.12$), $K_2^* > K_{00}^* > K_1^*$ (кривая 5, $\varepsilon = 12, \kappa = 0.6$), $K_{00}^* > K_2^*$ (кривая 6, $\varepsilon = 12, \kappa = 0.71$).



Фиг. 3

Изменение энергии среды и поля, рассчитанных на единицу объема среды U , при отсутствии внешних притоков тепла к среде описывается уравнением

$$(3.2) \quad dU / dt = Q$$

Предположим, что энергия U в отсутствие поля и внутреннего вращения равна $U_0 = c_v T$, где T — температура среды, c_v — ее теплоемкость. Тогда полная энергия U равна [4]

$$U = U_0 + \frac{M^2}{2\kappa} + \frac{K^2}{2I} + \frac{H^2}{8\pi}$$

С учетом этого уравнения (3.2) принимает вид

$$dT / dt = Q / c_v$$

Видно, что температура линейно увеличивается с течением времени.

Полученные результаты легко проверить экспериментально в отличие от описанных в работах [8-10]. Однородное вращающееся магнитное поле несложно создать внут-

ри пары ортогональных катушек; переменный ток, протекающий по этим катушкам, должен иметь одинаковую частоту и быть сдвинутым по фазе на 90° . Частота в области гистерезисных явлений должна быть величиной порядка $10 / \tau$ (по оценке работы [8] $\tau \sim 10^{-5}$ с). Сравнение экспериментальных и теоретических результатов позволит определить феноменологические коэффициенты τ , τ_s , I .

Автор благодарит В. В. Гогосова и В. А. Налетову за интерес к работе и полезное обсуждение.

Поступила 11 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1976.
2. Гогосов В. В., Васильева Н. Л., Тактаров Н. Г., Шапошникова Г. А. Уравнения гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся многокомпонентных и многофазных сред. Разрывные решения. Исследование разрывных решений со скачком магнитной проницаемости. Изд-во МГУ, 1975.
3. Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А. Гидродинамика дисперсных сред, взаимодействующих с электромагнитным полем. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3.
4. Суязов В. М. О несимметричной модели вязкой электромагнитной жидкости. ПМТФ, 1970, № 2.
5. Кирюшин В. В., Налетова В. А., Чеканов В. В. Движение намагничивающейся жидкости в однородном вращающемся магнитном поле. ПММ, 1978, т. 42, вып. 4.
6. Суязов В. М. Движение намагничиваемой жидкости под действием вращающегося магнитного поля. ПМТФ, 1970, № 4.
7. Цеберс А. О. Феррогидродинамика как гидродинамика системы с внутренними степенями свободы. В сб.: Физические свойства и гидродинамика дисперсных ферромагнетиков. Свердловск, Изд-во Уральск. научн. центра АН СССР, 1977.
8. Шлюмис М. И. Нелинейные эффекты в суспензии ферромагнитных частиц при воздействии вращающегося магнитного поля. Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 5.
9. Дроздова В. И., Кирюшин В. В., Налетова В. А., Чеканов В. В. Движение намагничивающейся жидкости во вращающемся магнитном поле. В сб.: Девятое Рижское совещание по магнитной гидродинамике, вып. 1. Саласпилс, Ин-т физики АН ЛатвССР, 1978.
10. Кирюшин В. В., Налетова В. А. О движении цилиндрического столба и капли намагничивающейся жидкости во вращающемся магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1978, № 2.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.