

СИЛЬНЫЙ ВДУВ ЖИДКОСТИ В ГИПЕРЗВУКОВОЙ ПОТОК С ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИНЫ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

И. И. Вигдорович

(Москва)

Рассматривается сильный вдув жидкости с поверхности плоской пластины конечной длины в набегающий гиперзвуковой поток. Вдуваемая жидкость считается несжимаемой и невязкой, и течение в области вдува, отделенной от набегающего потока контактной поверхностью, описывается приближенными уравнениями «тонкого слоя». Дано полное аналитическое решение задачи, в результате которого в переменных подобия получены универсальные формулы, задающие форму контактной поверхности и распределение давления на пластине. Эти универсальные формулы пригодны для любого давления, заданного на задней кромке пластины.

В работах [1-10] при решении задач по вдуву газов и горючих газовых смесей в сверхзвуковые потоки для течения в области вдува использовались модели идеальной несжимаемой жидкости и идеального совершенного газа. Поперечные градиенты давления не учитывались, и использовались уравнения тонкого слоя. Теоретическое и экспериментальное изучение течений с сильным вдувом на поверхности тел конечных размеров, обтекаемых сверхзвуковым потоком, показало, что значение давления на задней кромке тела является существенным для формирования течения в слое вдува [4-7, 9-11]. В [4, 5, 9] задачи о вдуве жидкости и газа с поверхности клина в сверх- и гиперзвуковой поток решались путем численного интегрирования уравнений тонкого слоя. В [6, 7, 10] при решении аналогичных задач получены интегральные уравнения для давления на поверхности. Последний подход позволил в [10] и данной работе получить полные аналитические решения задач о сверхзвуковом и гиперзвуковом обтекании слоя жидкости, вдуваемой с плоской поверхности. Аналитические решения получены для случая равномерного по длине пластины вдува. Степенной автомодельный вдув жидкости исследован в работах [3, 4, 8].

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание гиперзвуковым потоком газа тонкого слоя жидкости, вдуваемой с поверхности плоской пластины конечной длины. Пластина расположена параллельно вектору скорости набегающего потока, а жидкость вдувается нормально к поверхности равномерно по всей ее длине от передней до задней кромки. Введем прямоугольную систему координат с осью абсцисс, направленной по пластине и началом на ее передней кромке. Предположим, что слой вдуваемой жидкости имеет малые относительную толщину и наклон линий тока. Обозначим через δ порядок этой относительной толщины.

Для определения давления на контактной поверхности при гиперзвуковых условиях обтекания будем использовать формулу касательных

клиньев (1.1) или модифицированную формулу Ньютона (1.2) [12]

$$(1.1) \quad p = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 \sin^2 \alpha$$

$$(1.2) \quad p = p^* \sin^2 \alpha, \quad p^* = \frac{\rho_{\infty} U_{\infty}^2}{\gamma M_{\infty}^2} \left[\left(\frac{\gamma + 1}{2} M_{\infty}^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma M_{\infty}^2 - \gamma - 1} \right)^{1/(\gamma-1)} - 1 \right]$$

Здесь ρ_{∞} , U_{∞} , M_{∞} , γ — соответственно плотность, скорость, число Маха и показатель адиабаты набегающего потока, α — угол между касательной к контактной поверхности и осью абсцисс. Классическая формула Ньютона [12] есть частный случай формулы (1.1) при $\gamma = 1$. Таким образом, учитывая малость наклона поверхности контактного разрыва, в области вдува безразмерное давление p' , имеющее порядок единицы, можно ввести по формулам

$$(1.3) \quad p = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 \delta^2 p', \quad p = p^* \delta^2 p'$$

соответствующим использованию формул для давления (1.1), (1.2).

Введем в области вдува безразмерные переменные, имеющие порядок единицы

$$(1.4) \quad x = lX, \quad y = \delta lY, \quad u = \frac{V_w}{\delta} u' \\ v = V_w v', \quad p = \rho_0 \left(\frac{V_w}{\delta} \right)^2 p'$$

Здесь l — длина пластины, ρ_0 , V_w — плотность и нормальная скорость вдуваемой жидкости. Сравнение выражений (1.3), (1.4) для безразмерного давления дает

$$\delta = \left[\frac{(\gamma + 1) \rho_0 V_w^2}{2\rho_{\infty} U_{\infty}^2} \right]^{1/4}, \quad \delta = \left(\frac{\rho_0 V_w^2}{p^*} \right)^{1/4}$$

Эти выражения определяют порядок относительной толщины слоя вдува при применении формул для давления на контактной поверхности (1.1) и (1.2) соответственно. Заметим, что порядок относительной толщины слоя вдува, определенный в [10] при умеренных сверхзвуковых скоростях набегающего потока, отличается от полученного выше при гиперзвуковых условиях обтекания и равен отношению скоростных напоров в степени $1/3$.

В [6] для безразмерных переменных (1.4) из уравнений Эйлера в нулевом приближении относительно δ^2 получена следующая система уравнений тонкого слоя в переменных Мизеса:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{u'^2}{2} \right) + \frac{\partial p'}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial p'}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial \Psi} = \frac{1}{u'} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial X} = -v', \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = u'$$

Формулы (1.1), (1.2) в нулевом приближении относительно δ^2 дадут

$$(1.5) \quad p' = (dY_s / dX)^2$$

где Y_s — безразмерная ордината контактной поверхности.

Интегрирование системы уравнений тонкого слоя дает следующее выражение для ординаты контактной поверхности [6]:

$$Y_s(X) = 2^{-1/2} \int_0^X [p'(\xi) - p'(X)]^{-1/2} d\xi$$

которое вместе с (1.5) приводит к интегральному уравнению для давления на пластине

$$(1.6) \quad \int_0^X \frac{d\xi}{\sqrt{p'(\xi) - p'(X)}} = \sqrt{2} \int_0^X \sqrt{p'(\xi)} d\xi, \quad 0 \leq X \leq 1$$

Для выделения решения уравнения (1.6), соответствующего некоторому давлению, заданному на задней кромке пластины, необходимо добавить граничное условие $p'(1) = p_0'$, где p_0' — безразмерное по формулам (1.3) давление на задней кромке. Из (1.6) можно получить следующее уравнение для функции $X(p')$

$$(1.7) \quad \int_{+\infty}^{p'} \frac{X'(q) dq}{\sqrt{q - p'}} = \sqrt{2} \int_{+\infty}^{p'} \sqrt{q} X'(q) dq$$

В интегралах (1.7) стоит бесконечный предел интегрирования, поскольку при нормальном вдуве давление на передней кромке в силу (1.5) обращается в бесконечность. Уравнение (1.7) линейно. Решение этого уравнения $x_0(p')$ на полуоси $0 \leq p' < +\infty$, удовлетворяющее граничному условию $x_0(0) = 1$, имеет универсальный характер. Любое решение уравнения (1.7), соответствующее некоторому давлению на задней кромке p_0' , выражается через него по формуле $X(p') = x_0(p') / x_0(p_0')$, $p_0' \leq p' < +\infty$.

2. Решение интегрального уравнения. Заменой переменной $p' = e^{-t}$, $-\infty < t < +\infty$ уравнение (1.7) преобразуем к виду

$$(2.1) \quad \int_{-\infty}^t \frac{e^{\tau/2} x_0'(e^{-\tau}) d\tau}{(1 - e^{\tau-t})^{1/2}} = \sqrt{2} \int_{-\infty}^t e^{-\tau/2} x_0'(e^{-\tau}) d\tau$$

$$x_0(e^{-t}) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow +\infty$$

Чтобы иметь возможность применить к уравнению (2.1) двустороннее преобразование Лапласа [13], оценим порядок убывания искомой функции на $-\infty$. Предположим, что при некотором $b \geq 0$ имеет место неравенство

$$(2.2) \quad |x_0'(e^{-t})| \leq \text{const } e^{(b+1/2)t}, \quad t < 0$$

Тогда из левой части уравнения (2.1) по свойству свертки получим, что неравенство (2.2) сохраняется при замене b на $b + 1$ и, следовательно, выполняется при любом положительном b . Теперь допуская экспоненциальный рост функции $x_0'(e^{-t})$ на $+\infty$, получим, что операционное со-

ответствие (L — оператор Лапласа)

$$(2.3) \quad L[x_0'(e^{-t})] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_0'(e^{-t}) e^{-zt} dt = h(z)$$

имеет некоторую полуплоскость сходимости $\operatorname{Re} z > a$.

Применяя к (2.1) теорему о свертке [13], в силу операционного соответствия [14]

$$L[(1 - e^{-t})^{-1/2} H(t)] = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(z)}{\Gamma(z + 1/2)}, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

где $H(t)$ — единичная функция Хевисайда, $\Gamma(z)$ — гамма-функция, для изображения по Лапласу $h(z)$ получим функциональное уравнение

$$(2.4) \quad h\left(z - \frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma(z) \sqrt{\pi}}{\Gamma(z + 1/2)} = \frac{\sqrt{2}}{z} h\left(z + \frac{1}{2}\right), \quad \operatorname{Re} z > \max\left(0, a + \frac{1}{2}\right)$$

Заметим, что решение уравнения (2.4) определено с точностью до произвольной периодической функции $\omega(z)$ с периодом единица.

Найдем частное решение этого уравнения $h_0(z)$. Прологарифмировав обе части уравнения (2.4), а затем дважды продифференцировав результат, имеем ($\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции)

$$(2.5) \quad \frac{d^2}{dz^2} \ln h_0\left(z + \frac{1}{2}\right) - \frac{d^2}{dz^2} \ln h_0\left(z - \frac{1}{2}\right) = \\ = \psi'(z + 1) - \psi'\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

Введем функцию $\theta(t)$ согласно операционному соответствию

$$(2.6) \quad \frac{d^2}{dz^2} \ln h_0(z) = L[\theta(t)]$$

Применяя к (2.5) обратное преобразование Лапласа и используя операционное соответствие [14]

$$L[-te^{-t/2} (1 + e^{-t/2})^{-1} H(t)] = \psi'(z + 1) - \psi'(z + 1/2)$$

получим следующее выражение для функции $\theta(t)$:

$$(2.7) \quad \theta(t) = \frac{1 - e^{-t/2}}{(1 - e^{-t})^2} te^{-t} H(t)$$

Применяя теперь к (2.7) преобразование Лапласа, найдем

$$\frac{d^2}{dz^2} \ln h_0(z) = \psi\left(z + \frac{1}{2}\right) - \psi(z) + \left(z + \frac{1}{2}\right) \psi'\left(z + \frac{1}{2}\right) - z\psi'(z)$$

Интегрируя это выражение дважды, имеем

$$(2.8) \quad \ln h_0(z) = \int_z^{z+1/2} \zeta \psi(\zeta) d\zeta + kz + q = \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) - \\ - z \ln \Gamma(z) - \int_z^{z+1/2} \ln \Gamma(\zeta) d\zeta + kz + q$$

где k и q — постоянные интегрирования. Значение $k = 1/2 \ln \sqrt{\pi/2} - 1/2$ определим подстановкой выражения (2.8) в прологарифмированное урав-

нение (2.4), используя равенство [15]

$$\int_0^1 \ln \Gamma(\zeta) d\zeta = \ln \sqrt{2\pi}$$

Кроме того, как будет показано ниже, условие $x_0(e^{-t}) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow +\infty$ будет удовлетворено, если выбором константы q положить $h_0(0) = 1$. Таким образом, получим

$$q = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} + G$$

$$G = \int_0^{1/2} \ln \Gamma(\zeta + 1) d\zeta = -0.0428536$$

Значение постоянной G взято из таблиц [16].

Асимптотику функции $h_0(z)$ на бесконечности можно получить из (2.8), используя асимптотику гамма-функции [17]

$$(2.9) \quad \ln h_0(z) \sim \frac{z}{2} \ln z + kz + \frac{1}{8} \ln z + q - \frac{1}{8} - \frac{1}{48z} +$$

$$+ \frac{1}{128z^2} + \dots, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad |\arg z| < \pi - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

Общее решение уравнения (2.4) имеет вид $h(z) = \omega(z) h_0(z)$. Как изображение по Лапласу функция $h(z)$ должна быть голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > a$ и стремиться к нулю на концах любой прямой $\operatorname{Re} z = c, c > a$. Из (2.8) можно заключить, что особыми точками функции $h_0(z)$ могут быть лишь точки $z = -m, -1/2 - m$ (m — целое положительное число). Таким образом, функция $\omega(z) = h(z) / h_0(z)$ голоморфна при $\operatorname{Re} z > \max(a, -1)$, из чего в силу периодичности $\omega(z)$ с периодом единица следует ее голоморфность во всей комплексной плоскости. Из (2.9) получим, что на любой прямой, параллельной мнимой оси и лежащей в правой полуплоскости

$$|h_0(z)| > \text{const} \exp\left(-\frac{\pi}{4} |\operatorname{Im} z|\right)$$

Условие стремления $h(z)$ к нулю дает

$$(2.10) \quad |\omega(z)| \leq \text{const} \exp\left(\frac{\pi}{4} |\operatorname{Im} z|\right)$$

Целая периодическая функция с периодом единица, удовлетворяющая в полосе периодов неравенству (2.10), равна постоянной. Это утверждение просто доказывается методом, данным в [18] (стр. 330). Таким образом, функцию $\omega(z)$ можно в дальнейшем положить равной единице.

Введем универсальную функцию $y_0(p')$, задающую ординату контактной поверхности

$$y_0(p') = \int_{+\infty}^{p'} x_0'(q) \sqrt{q} dq$$

По формуле обращения Меллина имеем

$$(2.11) \quad \begin{aligned} x_0(e^{-t}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} h_0(z) e^{zt} \frac{dz}{z} \\ y_0(e^{-t}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} h_0\left(z + \frac{1}{2}\right) e^{zt} \frac{dz}{z} \\ c &> 0, \quad -\infty < t < +\infty \end{aligned}$$

Исследуем поведение функции $h_0(z)$ в точках $z = -m, m = 1, 2, \dots$.
Имеют место следующие разложения в степенные ряды [15]:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \left(z + \frac{1}{2}\right) \psi\left(z + \frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2} - m\right) \psi\left(\frac{1}{2} - m\right) + \\ &+ \left[\left(\frac{1}{2} - m\right) \psi'\left(\frac{1}{2} - m\right) + \psi\left(\frac{1}{2} - m\right)\right] (z + m) + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^n (2^n - 1) \zeta(n) + \left(m - \frac{1}{2}\right) (-1)^n (2^{n+1} - 1) \zeta(n+1) + \right. \\ &+ \left. S_2(n, m-1) - \left(m - \frac{1}{2}\right) S_2(n+1, m-1)\right] (z + m)^n, \\ &|z + m| < 1/2 \\ -z\psi(z) &= -\frac{m}{z+m} + m\psi(m+1) + 1 + \\ &+ [m\zeta(2) - \psi(m+1) + mS_1(2, m)] (z + m) + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} [(-1)^{n+1} m\zeta(n+1) + (-1)^{n+1} \zeta(n) + \\ &+ mS_1(n+1, m-1) - S_1(n, m-1)] (z + m)^n, \quad |z + m| < 1 \\ \left(S_1(n, m) = \sum_{k=1}^m k^{-n}, \quad S_2(n, m) = \sum_{k=1}^m \left(k - \frac{1}{2}\right)^{-n}\right) \\ m &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Здесь $\zeta(n)$ — дзета-функция Римана.

Из равенства

$$\frac{d}{dz} \ln h_0(z) = \left(z + \frac{1}{2}\right) \psi\left(z + \frac{1}{2}\right) - z\psi(z) + k$$

после интегрирования и потенцирования получим

$$(2.13) \quad \begin{aligned} h_0(z) &= p_m (z + m)^{-m} \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z + m)^n\right], \quad |z + m| < 1 \\ a_1 &= 1 - \frac{c}{2} + (2m - 1) \ln 2 + mS_1(1, m-1) - \\ &- \left(m - \frac{1}{2}\right) S_2(1, m-1) + k \\ a_2 &= \left(\frac{3}{4} - m\right) \zeta(2) - \ln 2 + (m/2) S_1(2, m-1) - \\ &- \left(m/2 - 1/4\right) S_2(2, m-1) + 1/2 S_2(1, m-1) - \\ &- 1/2 S_1(1, m-1) \\ a_n &= \frac{1}{n} \left[mS_1(n, m-1) - S_1(n-1, m-1) + S_2(n-1, m-1) - \right. \end{aligned}$$

$$- \left(m - \frac{1}{2}\right) S_2(n, m-1) + (-1)^{n-1} \zeta(n-1)(2^{n-1} - 2) + \\ + (-1)^{n-1} \zeta(n) \left(2^n m - 2m + \frac{1}{2} - 2^{n-1}\right)], \quad n = 3, 4, \dots$$

Здесь $c = 0.577215$ — постоянная Эйлера. Постоянная интегрирования p_m в (2.13) может быть определена непосредственно из (2.4). Используя рекуррентную формулу (2.4) последовательно m раз, получим

$$h_0(z-m) = h_0(z) \prod_{k=0}^{m-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(z-k)}{\Gamma(z-k+1/2)} \\ p_m = \lim_{z \rightarrow 0} z^m h_0(z-m) = \prod_{k=0}^{m-1} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{(2k-1)!!}{k! 2^k}$$

Здесь учтено, что $h_0(0) = 1$. Как видно из (2.13), $h_0(z)$ в точках $z = -m$ имеет полюсы порядка m . Можно также показать, что в точках $z = -1/2 - m$ функция $h_0(z)$ имеет нули кратности m .

Как показывает асимптотическое разложение (2.9), к интегралам (2.11) применима лемма Жордана и они могут быть представлены в виде рядов по вычетам подынтегральных функций. Например, для первой подынтегральной функции (2.11) имеет место равенство

$$(2.14) \quad h_0(z) \exp(zt) \frac{1}{z} = \frac{-P_m}{m(z+m)^m} \exp(-mt) \exp\left[\left(a_1 + t + \frac{1}{m}\right) \times \right. \\ \left. \times (z+m) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n + \frac{1}{nm^n}\right) (z+m)^n\right] \\ |z+m| < 1, \quad m = 1, 2, \dots$$

которое позволяет определить вычеты в каждом полюсе $z = -m$. Для этого необходимо вычислить коэффициент при $(z+m)^{m-1}$ в разложении экспоненты в правой части (2.14). Вычисление коэффициентов разложения экспоненты в степенной ряд удобно вести по рекуррентной формуле (см. [19], стр. 488).

Таким образом, функции $x_0(e^{-t})$, $y_0(e^{-t})$ могут быть представлены в виде следующих рядов, сходящихся при всех t :

$$x_0(e^{-t}) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-mt} P_{m-1}(t) \\ y_0(e^{-t}) = h_0\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(m+1/2)t} Q_{m-1}(t)$$

$P_m(t)$, $Q_m(t)$ — полиномы степени m . Возвращаясь к переменной p' , получим

$$(2.15) \quad x_0(p') = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi} p' + \sum_{m=2}^{\infty} p'^m P_{m-1}(-\ln p') \\ y_0(p') = 2^{1/4} \pi^{-3/4} \exp\left(\frac{3}{4} + 2G\right) - \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} p'^{3/2} + \\ + \sum_{m=2}^{\infty} p'^{m+1/2} Q_{m-1}(-\ln p')$$

Асимптотика функций $x_0(p')$, $y_0(p')$ при $p' \rightarrow +\infty$ может быть получена методом перевала для интегралов (2.11) [20]

Приведем здесь вычисление асимптотики лишь функции $x_0(e^{-t})$. Асимптотическое представление второй универсальной функции может быть найдено аналогично. Обозначим

$$\alpha(z) = \ln h_0(z) - \ln z + zt$$

Точка перевала ξ лежит на оси абсцисс и является положительным корнем уравнения

$$(2.16) \quad \alpha'(z) = 0, \quad t < 0$$

Согласно (2.9), имеем асимптотические разложения

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \alpha'(z) &= \frac{1}{2} \ln z + t + k + \frac{1}{2} - \frac{7}{8z} + \frac{1}{48z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) \\ \alpha''(z) &= \frac{1}{2z} + \frac{7}{8z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) \end{aligned}$$

Для нахождения асимптотического представления положительного корня уравнения (2.16) при $t \rightarrow -\infty$ применим итерационный метод Ньютона [20]. В качестве нулевого приближения возьмем $\xi_0 = 2\pi^{-1} \exp(-2t)$. Третья итерация дает для корня уравнения (2.16) выражение

$$(2.18) \quad \xi = \xi_0 + \frac{7}{4} - \frac{151}{96\xi_0} + \frac{15}{4\xi_0^2} + O\left(\frac{1}{\xi_0^3}\right)$$

После подстановки (2.18) в (2.9), (2.17) получим

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) &= -\frac{\xi_0}{2} - \frac{7}{8} \ln \xi_0 - \frac{1}{8} + q - \frac{151}{192\xi_0} + \frac{15}{16\xi_0^2} + O\left(\frac{1}{\xi_0^3}\right) \\ \alpha''(\xi) &= \frac{1}{2\xi_0} + O\left(\frac{1}{\xi_0^3}\right) \end{aligned}$$

Перейдем в интеграле (2.11) к интегрированию по прямой $\text{Im}z = \xi$, направление которой вблизи точки перевала совпадает с направлением наибоыстрейшего спуска. После разложения $\alpha(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки ξ и замены переменной интегрирования $z = \xi + i\alpha''(\xi)\eta$ (2.11) преобразуется к виду

$$(2.19) \quad \begin{aligned} x_0(e^{-t}) &= \frac{\exp(\alpha(\xi))}{\pi\alpha''(\xi)} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2\alpha''}\eta^2 - \frac{\alpha^{\text{IV}}}{12(\alpha'')^3}\eta^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha^{\text{VI}}}{360(\alpha'')^5}\eta^6 + \dots\right] \cos\left[\frac{1}{\alpha''}\left(\frac{\alpha'''}{6(\alpha'')^2}\eta^3 - \frac{\alpha^{\text{V}}}{120(\alpha'')^5}\eta^5 + \dots\right)\right] d\eta \end{aligned}$$

причем имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{\alpha'''(\xi)}{[\alpha''(\xi)]^2} &= -2 + O\left(\frac{1}{\xi_0^2}\right), & \frac{\alpha^{\text{IV}}(\xi)}{[\alpha''(\xi)]^3} &= 8 + O\left(\frac{1}{\xi_0^2}\right) \\ \frac{\alpha^{\text{V}}(\xi)}{[\alpha''(\xi)]^4} &= -48 + O\left(\frac{1}{\xi_0^2}\right), & \frac{\alpha^{\text{VI}}(\xi)}{[\alpha''(\xi)]^5} &= 384 + O\left(\frac{1}{\xi_0^2}\right) \end{aligned}$$

Во всех приведенных выше выражениях сохранены лишь члены, необходимые для получения асимптотики функции $[x_0(e^{-t})]$ с точностью $O(\xi_0^{-3})$. К интегралу (2.19) может быть применен метод Лапласа [20].

После выполнения выкладок окончательно имеем

$$x_0(e^{-t}) \sim \frac{\xi_0^{-3/8}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi_0}{2} - \frac{1}{8} + q\right) \left(1 + \frac{137}{192\xi_0} + \frac{107759}{73728\xi_0^2} + \dots\right)$$

$$y_0(e^{-t}) \sim \frac{\xi_0^{-3/8}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi_0}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{8} + q\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{233}{192\xi_0} - \frac{182831}{73728\xi_0^2} + \dots\right)$$

Возвращаясь к переменной p' , получим

$$(2.20) \quad x_0(p') \sim 2^{1/8} \left(\frac{e}{\pi}\right)^{3/8} p'^{-3/4} \exp\left(-\frac{p'^2}{\pi} + G\right) \times$$

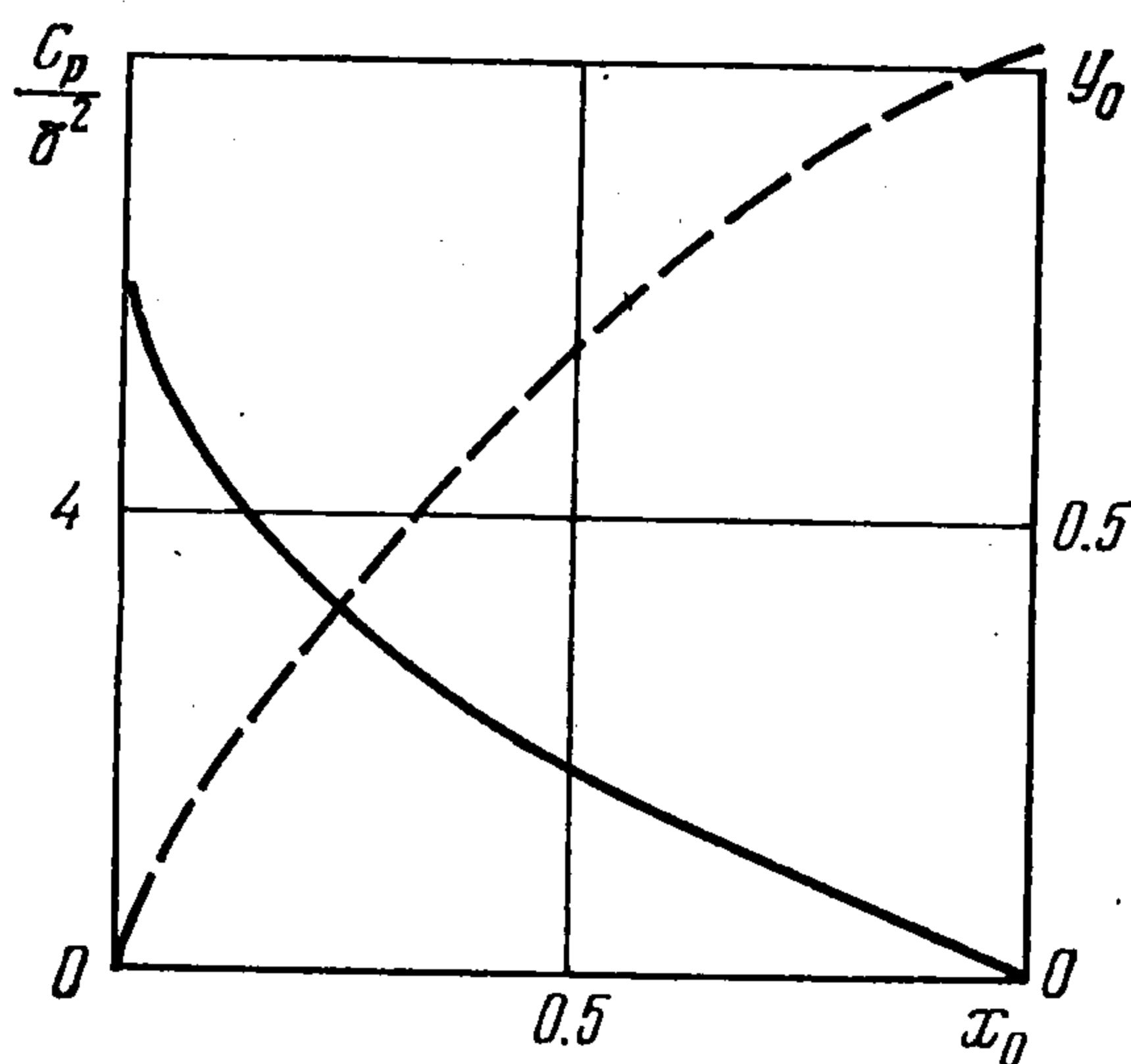
$$\times \left(1 + \frac{137\pi}{384p'^2} + \frac{107759\pi^2}{294912p'^4} + \dots\right)$$

$$y_0(p') \sim 2^{1/8} \left(\frac{e}{\pi}\right)^{3/8} p'^{-1/4} \exp\left(-\frac{p'^2}{\pi} + G\right) \times$$

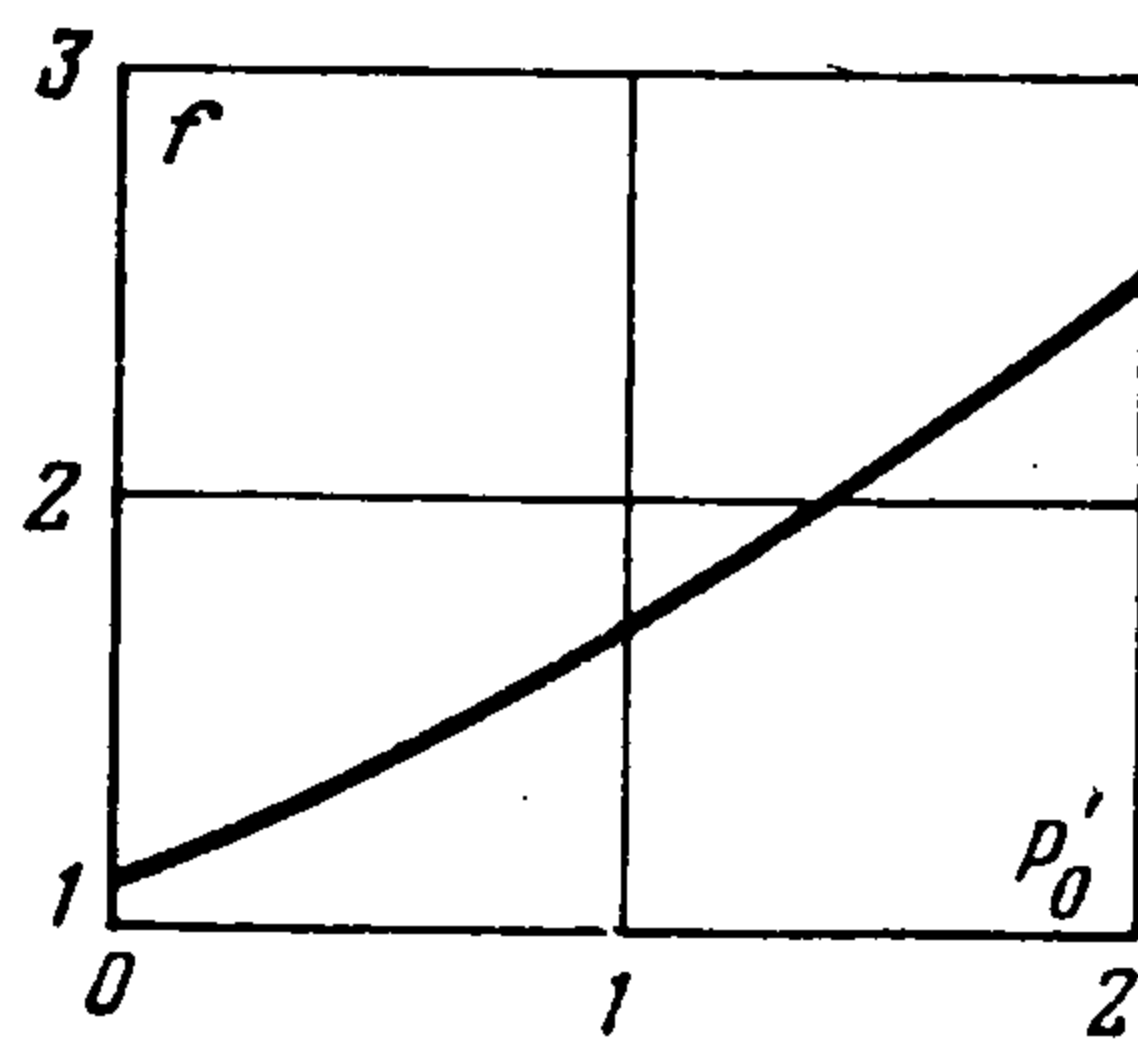
$$\times \left(1 + \frac{233\pi}{384p'^2} - \frac{182831\pi^2}{294912p'^4} + \dots\right), \quad p' \rightarrow +\infty$$

Представления (2.15), (2.20) универсальных функций позволяют вычислить распределение давления на пластине и форму контактной поверхности.

На фиг. 1 в переменных подобия изображены универсальные кривые, задающие распределение коэффициента давления $c_p = 2\delta^2 p'$ на пластине



Фиг. 1



Фиг. 2

(сплошная кривая) и форму контактной поверхности $y_0 = y_0(x_0)$ (штриховая кривая). Для получения распределения давления на пластине и формы контактной поверхности, соответствующих некоторому давлению на задней кромке p'_0 , следует растянуть сплошную кривую на фиг. 1 по оси абсцисс, а штриховую кривую также и по оси ординат в $1/x_0(p'_0)$ раз и взять их части, соответствующие промежутку $0 \leq X \leq 1$. На фиг. 2 дана зависимость суммарной силы F , действующей на пластину, от величины давления на задней кромке p'_0 . Поскольку рассмотренная задача плоская, сила F вычисляется в расчете на полосу пластины единичной ширины. На фиг. 2 $f = \delta^2 F / (l\rho_0 V_w^2)$.

Автор благодарит В. А. Левина за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thomas P. D., Conti R. J., Kruger C. H.* Flow over finite bodies with massive injection. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 11.
2. *Thomas P. D.* Flow over a finite plate with massive injection. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 4.
3. *Антонов А. М., Комашенко А. П.* Некоторые автомодельные решения задачи о сильном вдуве через пластинку в сверхзвуковом потоке. Прикл. механ., 1969, т. 5, вып. 10.
4. *Матвеева Н. С., Нейланд В. Я.* Сильный вдув на теле конечной длины в сверхзвуковом потоке. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 5.
5. *Нейланд В. Я.* Вдувание газа в гиперзвуковой поток. Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 6.
6. *Левин В. А.* Сильный вдув на поверхности тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5.
7. *Зак Л. И.* Сверхзвуковое обтекание тела конечных размеров при наличии интенсивного вдува горючей смеси газов на его боковой поверхности. Научн. тр. ин-та механики МГУ, 1974 № 32.
8. *Антонов А. М., Зайцев А. В.* Класс автомодельных решений задач обтекания пористых осесимметричных тел гиперзвуковым потоком газа. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 12.
9. *Липатов И. И.* Сверхзвуковое обтекание клина конечных размеров при сильном вдуве газа через его поверхность. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 5.
10. *Виедорович И. И., Левин В. А.* Сильный вдув жидкости в сверхзвуковой поток с поверхности пластины конечной длины. В сб.: Неравновесные течения газа и оптимальные формы тел в сверхзвуковом потоке. Изд-во МГУ, 1978.
11. *Харченко В. Н.* Экспериментальное исследование обтекания конусов гиперзвуковым потоком при наличии сильного вдува. Тр. ЦАГИ, 1972, вып. 1374.
12. *Черный Г. Г.* Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
13. *Поль Б. Ван дер, Бреммер Х.* Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований, т. 1. М., «Наука», 1969.
15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1973.
16. British association for the advancements of science mathematical tables I. Circular and hiperbolic functions, exponential, sine and cosine integrals, factorial function and allied functions. Hermitien probability functions. Cambridge, Univ. Press, 1951.
17. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М., «Наука», 1977.
18. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций, т. 2. М., «Наука», 1968.
19. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., «Наука», 1970.
20. *Брейн Н. Г. де.* Асимптотические методы в анализе. М., Изд-во иностр. лит., 1961.