

**ИССЛЕДОВАНИЕ ГИПЕРЗВУКОВОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО
ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ
ТОЧКИ ПРИ НАЛИЧИИ ВДУВА ИЛИ ОТСОСА**

Э. А. Гершбейн, С. А. Юницкий

(Москва)

Рассматривается пространственное обтекание гладких затупленных тел гиперзвуковым потоком однородного вязкого газа при наличии вдува или отсоса. Получено численное решение задачи в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса и параметра вдува (отсоса). Приводятся профили скоростей и температуры поперек ударного слоя, а также зависимости коэффициентов трения и теплообмена на поверхности тела от числа Рейнольдса и параметра вдува (отсоса); эти зависимости от параметра вдува оказываются универсальными. Интегральным методом последовательных приближений получено приближенное аналитическое решение задачи, удовлетворительно совпадающее с численным решением при малых числах Рейнольдса.

Проводится анализ асимптотики уравнений гиперзвукового ударного слоя при больших числах Рейнольдса при наличии вдува. Дается аналитическое решение задачи о сильном вдуве в приближении двух невязких слоев, разделенных контактной поверхностью. На той же разностной сетке получено решение уравнений пограничного слоя и показано, что отличие от решения уравнений ударного слоя в коэффициенте трения в направлении, совпадающем с плоскостью, содержащей сечение поверхности тела с наибольшим радиусом кривизны, может быть значительным даже при числах Рейнольдса порядка 10^8 . С увеличением отсоса данное отличие увеличивается, с увеличением вдува уменьшается, и при достаточно больших значениях параметра вдува коэффициент трения, полученный из решения уравнений пограничного слоя, совпадает с коэффициентом трения, полученным из решения уравнений ударного слоя при больших числах Рейнольдса.

Приводятся некоторые результаты численного решения уравнений слоя смешения, образующегося около контактной поверхности при сильном вдуве с поверхности тела.

Впервые вопрос о влиянии вязкости и теплопроводности за сильно искривленной ударной волной рассматривался в работе [1]. В дальнейшем исследование плоских и осесимметричных течений разреженных газов в рамках теории гиперзвукового вязкого ударного слоя с обобщенными соотношениями Рэнкина — Гюгоню на ударной волне [2] проводилось в ряде работ (см. [3-10] и др.). Расчет пространственного обтекания затупленных тел гиперзвуковым потоком вязкого теплопроводного газа проводился в работах [11, 12].

1. Уравнения пространственного гиперзвукового вязкого ударного слоя. Граничные условия. Рассмотрим пространственное обтекание плавно затупленного тела. Введем некоторую произвольную криволинейную систему координат, нормально связанных с обтекаемой поверхностью. Пусть $x^3 = \text{const}$ — уравнения семейства поверхностей, параллельных поверх-

ности тела $x^3 = 0$, x^1, x^2 выбраны на поверхности. Уравнения пространственного гиперзвукового вязкого ударного слоя в однородном газе в системе координат $\{x^i\}$ имеют следующий безразмерный вид [12]:

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho u [i] \sqrt{\frac{a}{a_{(ii)}}} \right) = 0$$

$$\rho (Du [\gamma] + A_{\alpha\beta}^\gamma u [\alpha] u [\beta]) = - \varepsilon a^{\gamma\alpha} \sqrt{a_{(\gamma\gamma)}} \frac{\partial P}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\mu}{K} \frac{\partial u [\gamma]}{\partial x^3} \right)$$

$$\rho A_{\alpha\beta}^3 u [\alpha] u [\beta] = - \frac{\partial P}{\partial x^3}$$

$$\rho DT = 2\varepsilon \frac{u [\alpha]}{\sqrt{a_{(\alpha\alpha)}}} \frac{\partial P}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial T}{\partial x^3} \right) +$$

$$+ \frac{2\mu}{K} \frac{a_{\alpha\beta}}{\sqrt{a_{(\alpha\alpha)} a_{(\beta\beta)}}} \frac{\partial u [\alpha]}{\partial x^3} \frac{\partial u [\beta]}{\partial x^3}$$

$$P = \rho T, \quad D \equiv \frac{u [\alpha]}{\sqrt{a_{(\alpha\alpha)}}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + u [3] \frac{\partial}{\partial x^3}$$

$$T_0 = \frac{V_\infty^2}{2c_p}, \quad \mu_0 = \mu(T_0), \quad \varepsilon = \frac{\gamma-1}{2\gamma}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad \sigma = \frac{\mu c_p}{\lambda}$$

$$Re = \frac{\rho_\infty V_\infty R}{\mu_0}, \quad Re_w = \frac{\rho_w V_w R}{\mu_w}, \quad G = \frac{\rho_w V_w}{\rho_\infty V_\infty}$$

$$\delta^2 = \frac{\rho_w V_w^2}{\rho_\infty V_\infty^2}, \quad K = \varepsilon Re$$

$$A_{\alpha\alpha}^\alpha = \frac{a_{12}}{a} \left[\frac{\partial \sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\partial x^\beta} + \frac{a_{12}}{a_{(\alpha\alpha)}} \frac{\partial \sqrt{a_{(\alpha\alpha)}}}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{\sqrt{a_{(\alpha\alpha)}}} \frac{\partial a_{12}}{\partial x^\alpha} \right]$$

$$A_{12}^\alpha = A_{21}^\alpha = \frac{1}{2a} \left[\sqrt{a_{11} a_{22}} \left(1 + \frac{a_{12}^2}{a_{11} a_{22}} \right) \frac{\partial \sqrt{a_{\alpha\alpha}}}{\partial x^\beta} - 2a_{12} \frac{\partial \sqrt{a_{\beta\beta}}}{\partial x^\alpha} \right]$$

$$A_{\alpha\alpha}^\beta = \frac{\sqrt{a_{(\beta\beta)}}}{a} \left[\frac{\partial a_{12}}{\partial x^\alpha} - \sqrt{a_{(\alpha\alpha)}} \frac{\partial \sqrt{a_{(\alpha\alpha)}}}{\partial x^\beta} - \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{(\alpha\alpha)}}} \frac{\partial \sqrt{a_{(\alpha\alpha)}}}{\partial x^\alpha} \right] (\beta \neq \alpha)$$

$$A_{\alpha\beta}^3 = A_{\beta\alpha}^3 = b_{\alpha\beta} / \sqrt{a_{(\alpha\alpha)} a_{(\beta\beta)}}$$

$$a = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \quad a_{33} = 1$$

Здесь по паре одинаковых индексов производится суммирование; по индексам, заключенным в круглые скобки, суммирование отсутствует; латинские индексы пробегает значения 1, 2, 3 и относятся к пространству R^3 , греческие индексы принимают значения 1, 2 и ассоциируются с поверхностью тела, заключенной в R^3 ; $V_\infty u [1]$, $V_\alpha u [2]$, $\varepsilon V_\infty u [3]$ — физические компоненты вектора скорости, $\rho_\infty V_\infty^2 P$, $\varepsilon^{-1} \rho_\infty \rho$, $T_0 T$, $\mu_0 \mu$, λ — соответственно давление, плотность, температура, коэффициенты вязкости и теплопроводности, $c_p = \text{const}$ — теплоемкость газа, $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ — компоненты симметричных ковариантных тензоров, определяющих соответственно первую и вторую квадратичные формы поверхности тела. Все линейные размеры отнесены к характерному линейному размеру R , нормальная координата — к εR . Индексы ∞ , w относятся к величинам в набегающем потоке и на поверхности тела. В случае выбора на поверхности тела ортогональной системы координат $a_{12} = 0$.

Уравнения (1.1) получаются из записанных в системе координат $\{x^i\}$ и физических компонентах векторов и тензоров уравнений Навье — Стокса [13], в которых ε и Re^{-1} устремлены к нулю, а произведение $K = \varepsilon \text{Re}$ порядка единицы. Члены с продольным градиентом давления оставлены в уравнениях (1.1) в силу того, что при больших числах Рейнольдса они играют основную роль в слое около поверхности тела. При малых числах Рейнольдса они могут быть опущены. Таким образом, система уравнений (1.1) описывает течение в гиперзвуковом ударном вязком слое в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса от умеренно малых до больших. При $K \rightarrow \infty$ вырожденные уравнения (1.1) совпадают с уравнениями, описывающими течение невязкого газа в рамках ньютоновской теории [14–16]. Аналогично работе [17] можно показать, что при наличии вдува с поверхности тела при условиях $K \gg 1$, $\text{Re}_w \gg 1$, $G \lesssim 1$, $\delta \ll 1$ система (1.1) асимптотически верно описывает течение газа в ударном слое.

В качестве граничных условий на ударной волне при $x^3 = x_s^3$ запишем модифицированные соотношения Рэнкина — Гюгонио [1] в приближении тонкого слоя

$$(1.2) \quad u[\alpha] - u[\alpha]_\infty = \frac{\mu}{Ku[3]_\infty} \frac{\partial u[\alpha]}{\partial x^3}, \quad P = u^2[3]_\infty$$

$$\rho \left(u[3] - \frac{u[\alpha]}{V a_{(\alpha\alpha)}} \frac{\partial x_s^3}{\partial x^\alpha} \right) = u[3]_\infty$$

$$u[3]_\infty (H - H_\infty - u^2[3]_\infty) = \frac{\mu}{K\sigma} \frac{\partial T}{\partial x^3} +$$

$$+ \frac{2\mu}{K} \left[u[\alpha] \frac{\partial u[\alpha]}{\partial x^3} + \frac{a_{12}}{V a_{11}a_{22}} \frac{\partial}{\partial x^3} (u[1]u[2]) \right],$$

$$H = T + \frac{a_{\alpha\beta}}{V a_{(\alpha\alpha)a_{(\beta\beta)}}} u[\alpha]u[\beta]$$

При больших числах Рейнольдса ($K \rightarrow \infty$) соотношения (1.2) переходят в обычные соотношения Рэнкина — Гюгонио, записанные в гиперзвуковом приближении.

На поверхности тела граничные условия при отсутствии скольжения и скачка температуры запишем в следующем безразмерном виде:

$$(1.3) \quad x^3 = 0, \quad u[\alpha] = 0, \quad \rho u[3] = G(x^1, x^2), \quad T = T_w(x^1, x^2)$$

Скорость скольжения и скачок температуры — величины порядка $\varepsilon^{1/2} K^{-1}$ [18].

2. Численное решение уравнений гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя в окрестности критической точки. Для численного решения задачи преобразуем уравнения (1.1) к переменным типам переменных Дородницына, обычно используемых в теории пространственного пограничного слоя (см., например, [19])

$$(2.1) \quad \zeta = \frac{1}{\Delta} \int_0^{x^3} \rho \sqrt{a} dx^3, \quad x^\alpha = \xi^\alpha, \quad \Delta = \int_0^{x_s^3} \rho \sqrt{a} dx^3$$

и введем новые переменные по формулам

$$(2.2) \quad u[\alpha] = u_{(\alpha)}^*(\xi^1, \xi^2) \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi}, \quad T = T^*(\xi^1, \xi^2) \theta$$

$$\rho \sqrt{a} u[3] = - \frac{\partial \psi_{(\alpha)}^*(\xi^1, \xi^2) \varphi_\alpha}{\partial \xi^\alpha} - \Delta \varphi_{(\alpha)}^* \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x^\alpha}$$

$$\psi_\alpha^* = \Delta \varphi_\alpha^* = \Delta \frac{u_\alpha^*}{\sqrt{a_{(\alpha\alpha)}}}, \quad l = \frac{\mu \rho a}{K \Delta^2}$$

При этом уравнение неразрывности удовлетворится тождественно. Функции $u_\alpha^*(\xi^1, \xi^2)$, $T^*(\xi^1, \xi^2)$ определим ниже. Оператор D в новых переменных имеет вид

$$(2.3) \quad D = \varphi_{(\alpha)}^* \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} - \left[\varphi_{(\alpha)}^* \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi^\alpha} + B_\alpha \varphi_\alpha \right] \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$B_\alpha \equiv \frac{\partial \varphi_{(\alpha)}^*}{\partial \xi^\alpha} + \varphi_{(\alpha)}^* \frac{\partial \ln \Delta}{\partial \xi^\alpha}$$

Рассмотрим обтекание гладкого выпуклого тела с поверхностью S , заданной в декартовой системе координат в виде $y^3 = f(y^1, y^2)$. Выбирая в качестве криволинейных координат на поверхности тела $x^\alpha = y^\alpha$, а в качестве координатных линий x^3 — семейство нормалей к поверхности S , получаем

$$(2.4) \quad a_{\alpha\alpha} = 1 + q_\alpha^2, \quad a_{12} = q_1 q_2, \quad b_{\alpha\beta} = -r_{\alpha\beta} / \sqrt{a}$$

$$a = 1 + q_1^2 + q_2^2, \quad q_\alpha \equiv \partial f / \partial x^\alpha, \quad r_{\alpha\beta} \equiv \partial^2 f / \partial x^\alpha \partial x^\beta$$

Пусть вектор скорости набегающего потока совпадает с направлением оси y^3 . Тогда физические составляющие скорости $u[i]_\infty$ в приближении тонкого слоя ($x^3 \approx 0$) равны

$$u[\alpha]_\infty = \sqrt{a_{(\alpha\alpha)}} q_\alpha / a, \quad u[3]_\infty = -1 / \sqrt{a}$$

Рассмотрим далее обтекание под нулевым углом атаки эллиптического параболоида, уравнение поверхности которого зададим в виде $2y^3 = (y^1)^2 + k(y^2)^2$, где $k = R/R_1$; R, R_1 — радиусы главных кривизн в критической точке параболоида. Полагая $u_\alpha^*(x^1, x^2) = u[\alpha]_\infty$, $T^*(x^1, x^2) = u^2[3]_\infty$, разрешаем все особенности, возникающие в коэффициентах уравнений в критической точке.

Используя (1.1), (2.1) — (2.4), получаем следующие уравнения пространственного течения газа в окрестности критической точки:

$$(2.5) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(l \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial \xi^2} \right) + (\varphi_1 + k\varphi_2) \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial \xi^2} = d_\alpha \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{\rho} P_\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{l}{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + (\varphi_1 + k\varphi_2) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0$$

$$P = \rho \theta, \quad \frac{\partial P_\alpha}{\partial \xi} = 2 \Delta d_{(\alpha)}^2 \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi} \right)^2$$

$$P_\alpha \equiv \frac{1}{d_{(\alpha)} \xi^{(\alpha)}} \frac{\partial P}{\partial \xi^\alpha}, \quad d_1 = 1, \quad d_2 = k$$

Последние уравнения (2.5) получены из третьего уравнения (1.1), к которому применен оператор $(d_{(\alpha)} \xi^{(\alpha)})^{-1} \partial / \partial \xi^\alpha$.

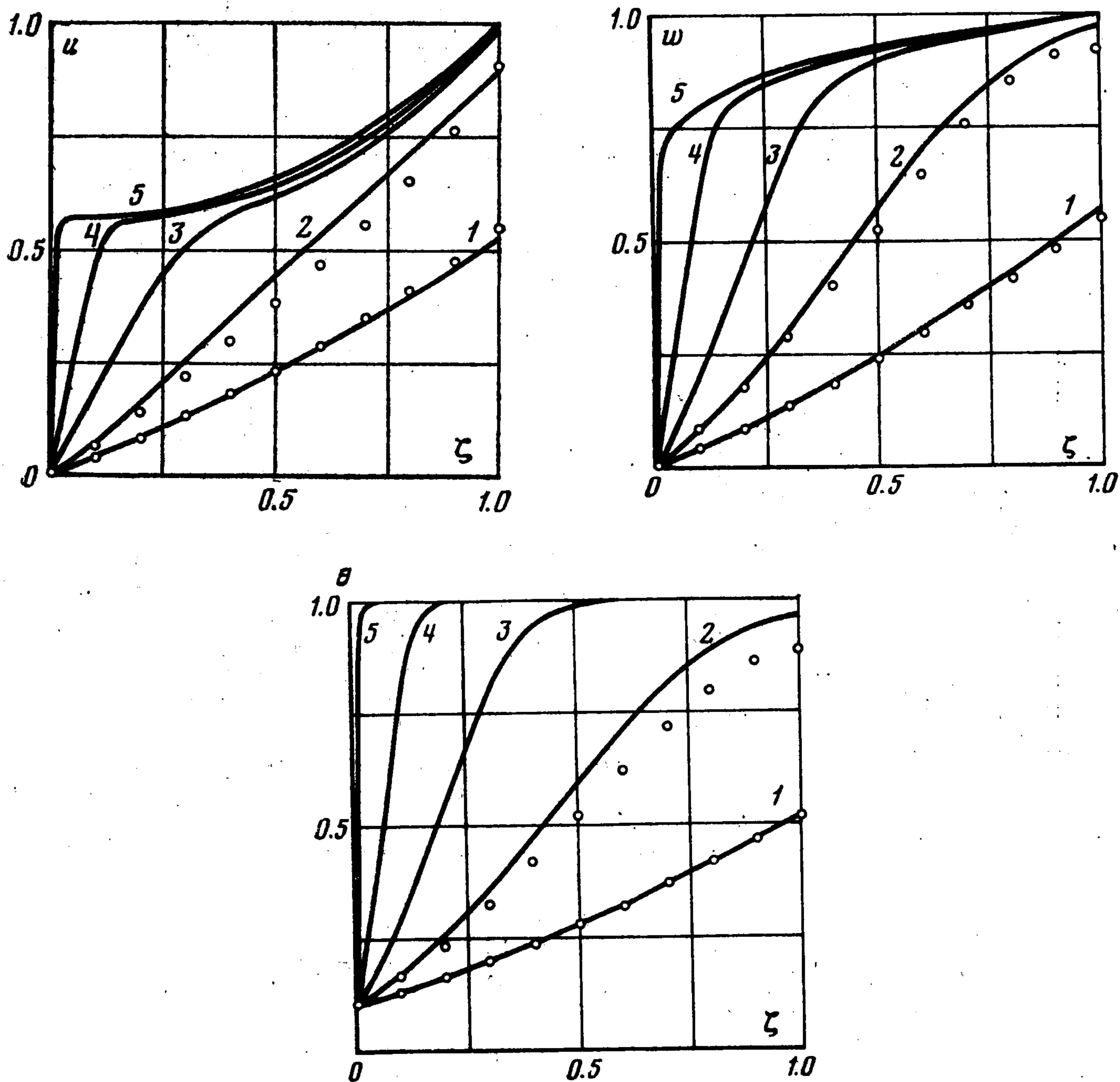
Граничные условия (1.2), (1.3) принимают следующий вид:

$$(2.6) \quad \zeta = 1, \quad \varphi_1 + k\varphi_2 = 1 / \Delta$$

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \zeta} + l\Delta \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial \zeta^2} = 1, \quad \theta + \frac{l\Delta}{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = 1, \quad P = 1, \quad P_\alpha = -2d_\alpha$$

$$(2.7) \quad \zeta = 0, \quad \partial \varphi_\alpha / \partial \zeta = 0, \quad \varphi_1 + k\varphi_2 = -G / \Delta, \quad \theta = \theta_w$$

Уравнения (2.5) с граничными условиями (2.6), (2.7) решали численно при следующих значениях параметров: $k = 0, 0.1, 0.4, 1.0$; $\sigma = 0.71$;

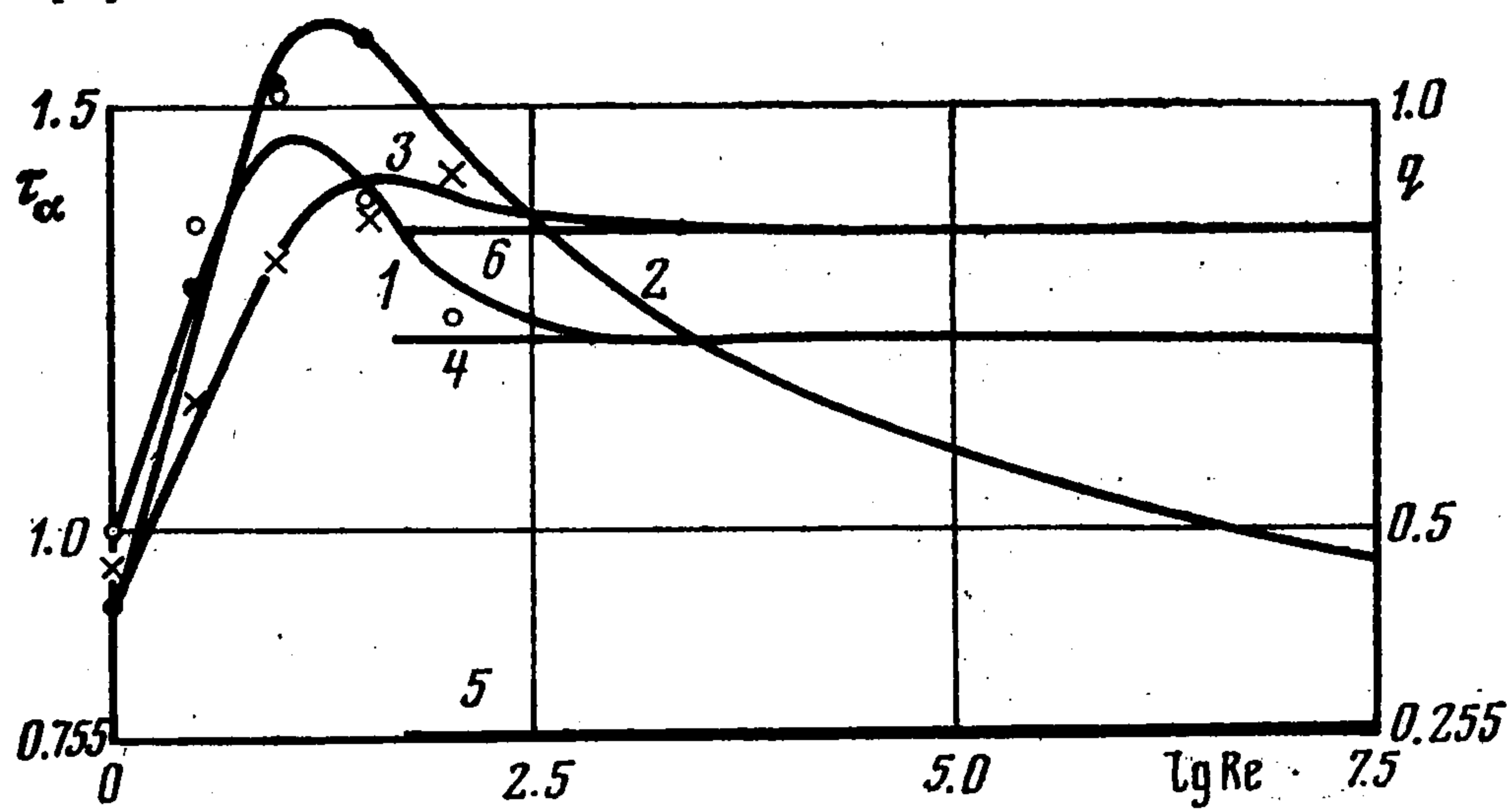


Фиг. 1

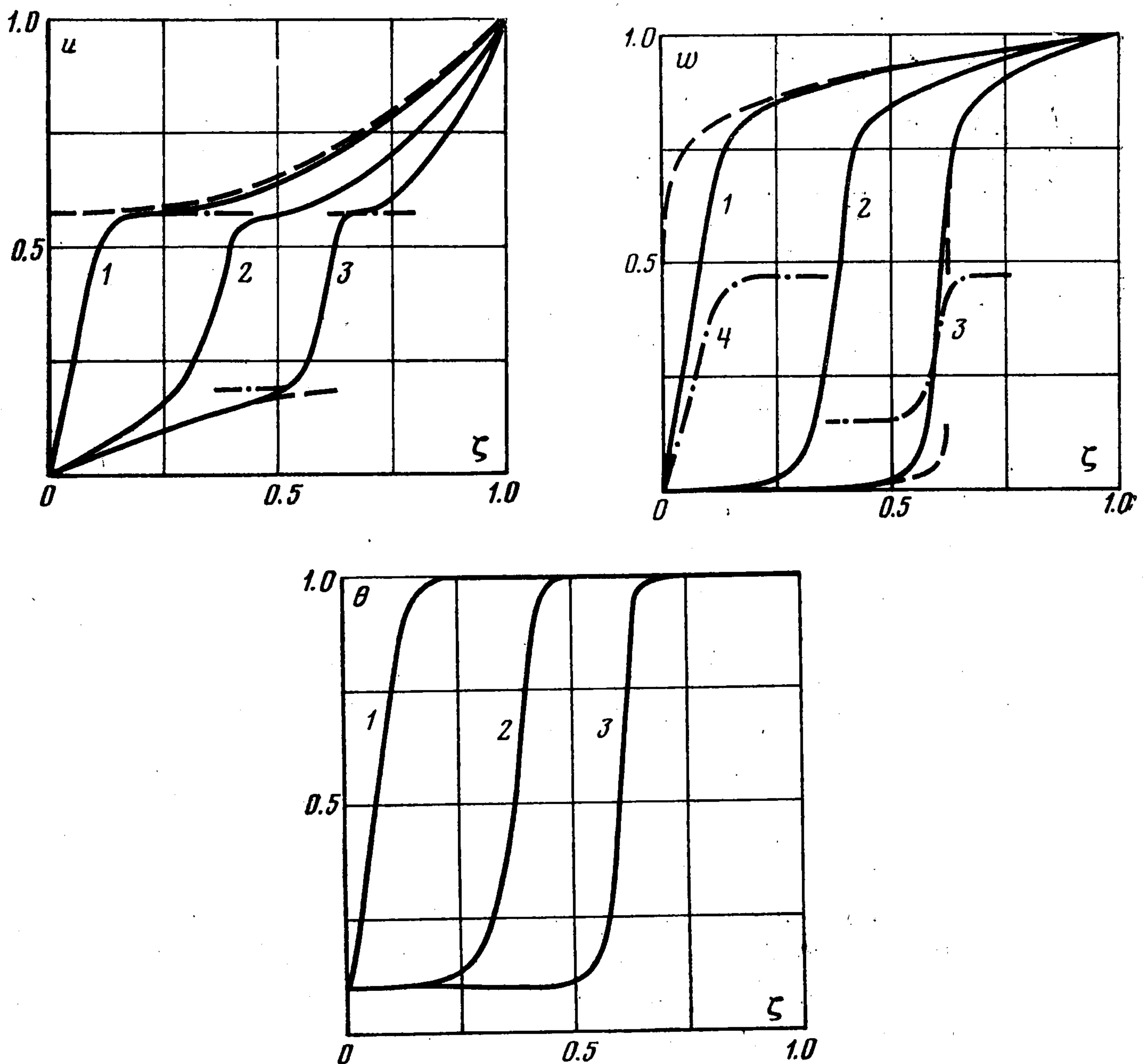
$\varepsilon = 0.1$; $\theta_w = 0.1, 0.5$; $-0.25 \leq G \leq 0.25$; $1 \leq Re \leq 5 \cdot 10^7$; $\mu = \theta^{1/2}$. Использовалась неявная конечно-разностная схема [20] с точностью аппроксимации $O(\Delta \zeta^4)$. Для повышения точности расчетов при больших числах Рейнольдса вблизи поверхности тела производилось сгущение точек расчетной сетки.

Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 1—6. На фиг. 1 приведены характерные профили касательных составляющих скорости $u = \partial \varphi_1 / \partial \zeta$, $w = \partial \varphi_2 / \partial \zeta$ и температуры θ поперек ударного слоя для $G = 0$, $k = 0.1$, $\theta_w = 0.1$ при $Re = 5, 50, 5 \cdot 10^2, 5 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^5$ (кривые 1—5 соответственно). Здесь легко проследить образова-

ние у поверхности тела при больших числах Рейнольдса тонкого пограничного слоя. Вид профилей u и θ для плоского ($k = 0$) и осесимметричного ($k = 1$) течений приведен в работе [21].



Фиг. 2



Фиг. 3

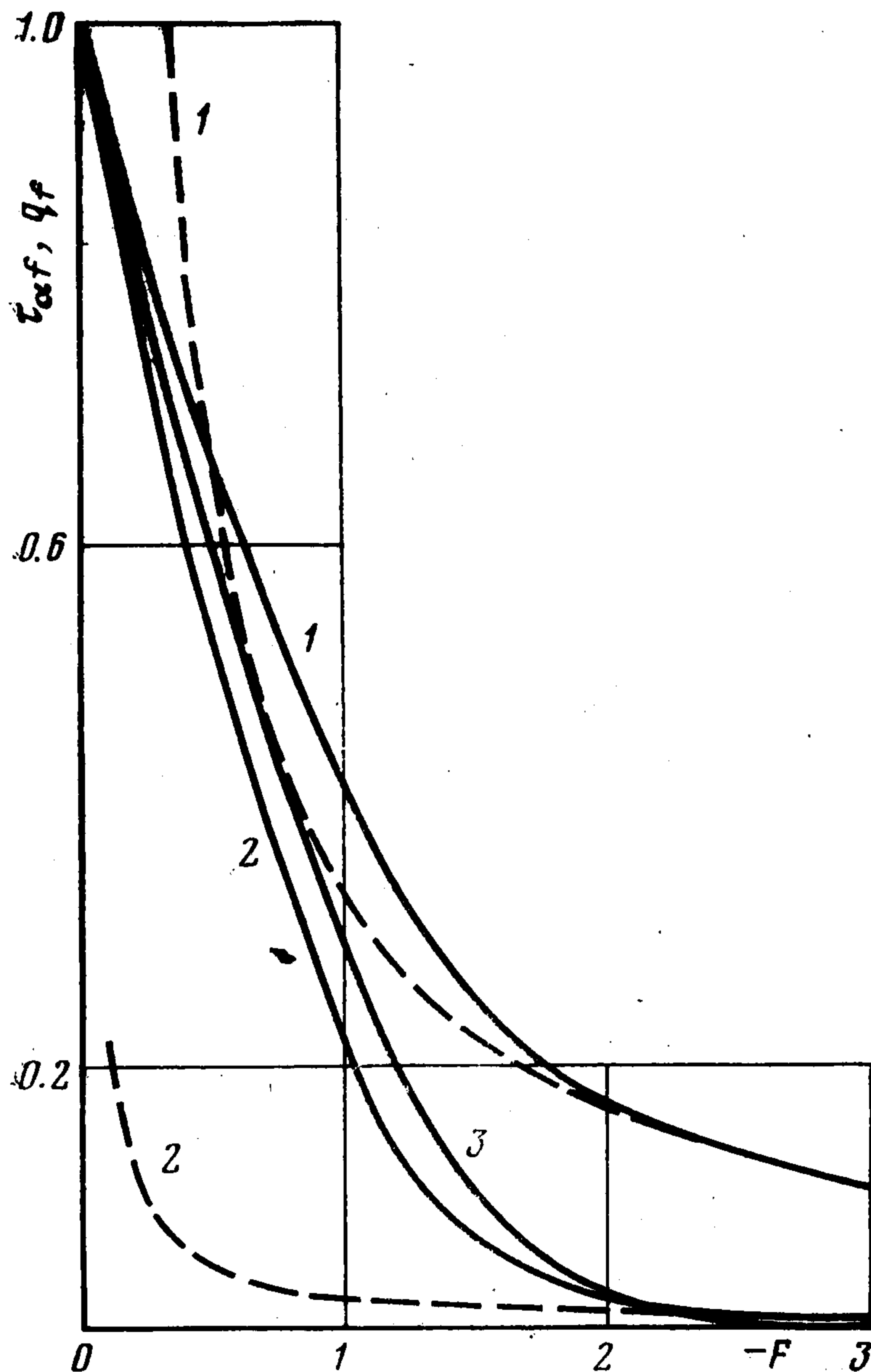
На фиг. 2 изображены зависимости коэффициентов трения τ_1 , τ_2 (кривые 1, 2) и теплообмена q (кривая 3) от числа Рейнольдса, подсчитанные по теории вязкого ударного слоя для $k = 0.1$, $\theta_w = 0.1$. Прямые линии 4—6 относятся к соответствующим

значениям коэффициентов трения и теплообмена (τ_1, τ_2 — прямые 4, 5; q — прямая 6), полученным по теории пограничного слоя (см. п. 4). Выражения для τ_α и q имеют следующий вид:

$$(2.8) \quad \tau'_{\xi\alpha\zeta} = \frac{\mu}{\rho_\infty V_\infty^2} \frac{\partial u[\alpha]}{\partial x^3} = u[\alpha]_\infty \frac{l\Delta}{\sqrt{a}} \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=0}, \quad \tau_\alpha = \frac{\tau'_{\xi\alpha\zeta} \sqrt{\text{Re}}}{u[\alpha]_\infty}$$

$$q' = \frac{\lambda}{\rho_\infty V_\infty^3} \frac{\partial T}{\partial x^3} = T^* \frac{l\Delta}{2\sigma \sqrt{a}} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0}, \quad q = \frac{q' \sqrt{\text{Re}}}{T^*}$$

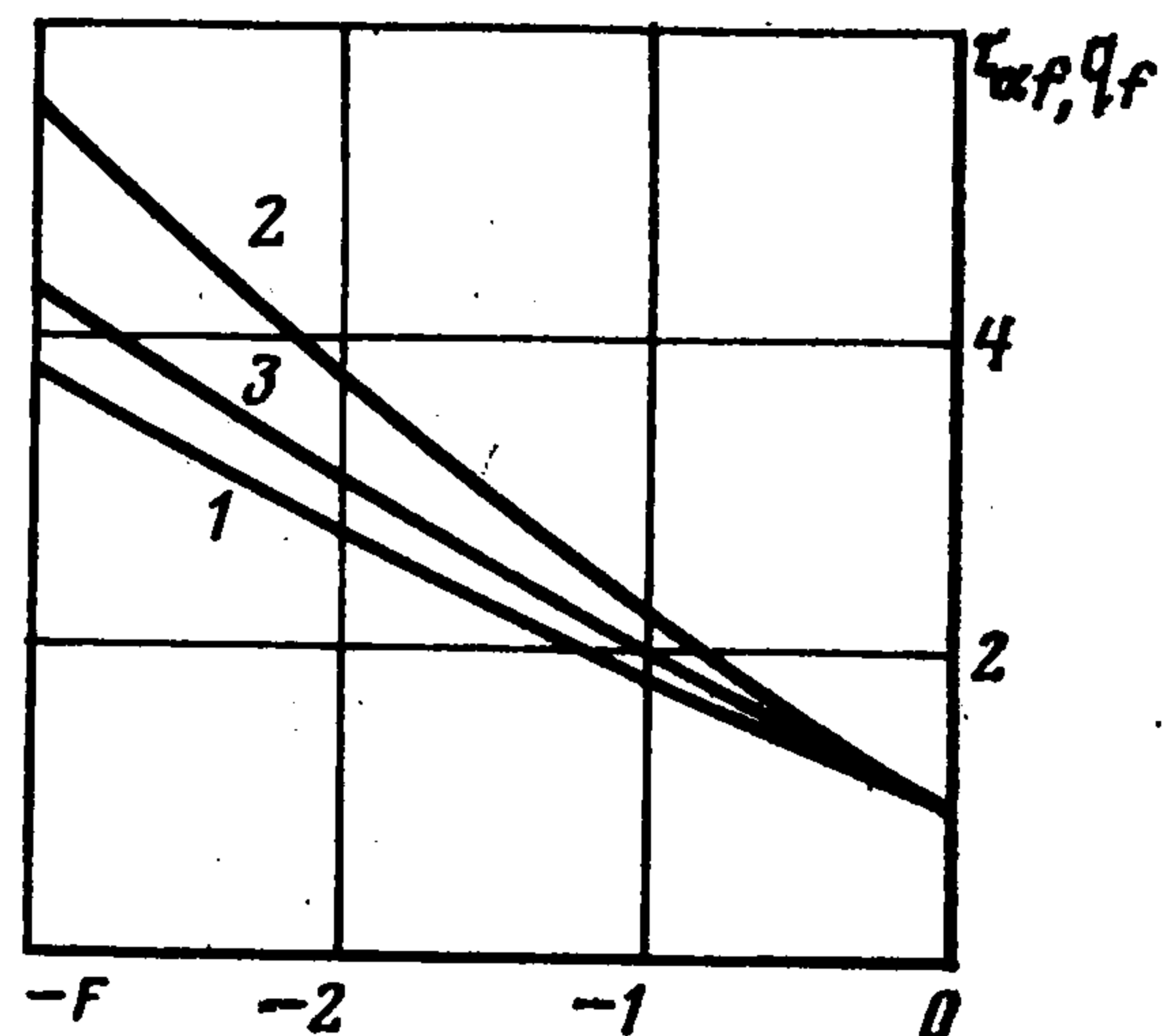
Анализ результатов расчетов течения в ударном вязком слое при наличии вдува [17, 21] показывает, что характер течения газа в ударном слое определяется параметром $F = -G \sqrt{\text{Re}} (1+k)^{-1/2} \varepsilon^{1/4} (-P_{1w})^{-1/4}$, обычно используемым в теории ламинарного пограничного слоя. На фиг. 3 сплошными линиями приведены профили u, w и θ поперек ударного слоя для числа Рейнольдса $\text{Re} = 5 \cdot 10^3$, $k = 0.1$, $\theta_w = 0.1$ при $-F = 0, 3.03, 7.03$ (кривые 1—3 соответственно). Как видно из фиг. 3, при $-F \geq 2$ пограничный слой отходит от поверхности тела и превращается в слой смешения.



Фиг. 4

На фиг. 4 сплошными линиями приведены зависимости от параметра вдува $-F$ коэффициентов трения и теплообмена на поверхности тела, отнесенных к их значениям при $F = 0$ (на фиг. 4 обозначено: $\tau_{\alpha f} = \tau_\alpha / (\tau_\alpha)_{F=0}$, $q_f = q / (q)_{F=0}$ для $k = 0.1$,

на фиг. 4 обозначено: $\tau_{\alpha f} = \tau_\alpha / (\tau_\alpha)_{F=0}$, $q_f = q / (q)_{F=0}$ для $k = 0.1$,



Фиг. 5

$0 \leq G \leq 0.25$, $10 \leq \text{Re} \leq 5 \cdot 10^3$; кривые 1—3 соответствуют $\tau_{1f}, \tau_{2f}, q_f$; штриховые линии соответствуют асимптотическому решению уравнений пограничного слоя при сильном вдуве [22]). Расчеты показывают, что точки, соответствующие различным значениям Re и G , ложатся на единую кривую; в этом смысле полученные зависимости универсальны.

Зависимости от параметра отсоса F коэффициентов трения и теплообмена, отнесенных к их значениям при $F = 0$, также имеют универсальный характер (см. фиг. 5, обозначения те же, что на фиг. 4).

3. Приближенное аналитическое решение уравнений гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя в окрестности критической точ-

ки. Введем новые искомые функции по формулам (индексом s обозначены параметры газа непосредственно за ударной волной)

$$(3.1) \quad v_\alpha = \frac{1}{c_\alpha} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \zeta}, \quad \vartheta = \frac{\theta - \theta_w}{\theta_s - \theta_w}, \quad c_\alpha = \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \zeta} \right)_s$$

Граничные условия для функций v_α и ϑ

$$(3.2) \quad \zeta = 1, v_\alpha = \vartheta = 1; \quad \zeta = 0, v_\alpha = \vartheta = 0$$

Систему уравнений (2.5) с учетом (3.1), (3.2) можно привести к следующему виду:

$$(3.3) \quad v_\alpha = 1 + F_\alpha(\zeta) + K_\alpha \int_1^\zeta l^{-1} d\zeta$$

$$\vartheta = 1 + F_s(\zeta) + K_s \int_1^\zeta \sigma l^{-1} d\zeta$$

$$F_\alpha(\zeta) = \int_1^\zeta l^{-1} \int_0^\zeta \left[-(\varphi_1 + k\varphi_2) \frac{\partial v_\alpha}{\partial \zeta} + c_{(\alpha)} d_{(\alpha)} v_\alpha^2 + \frac{\varepsilon}{\rho c_{(\alpha)}} P_\alpha \right] d\zeta d\zeta$$

$$F_s(\zeta) = \int_1^\zeta \sigma l^{-1} \int_0^\zeta \left[-(\varphi_1 + k\varphi_2) \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} \right] d\zeta d\zeta$$

$$K_\alpha = -[1 + F_\alpha(0)] \left(\int_1^0 l^{-1} d\zeta \right)^{-1}$$

$$K_s = -[1 + F_s(0)] \left(\int_1^0 \sigma l^{-1} d\zeta \right)^{-1}$$

$$(3.4) \quad \varphi_1 + k\varphi_2 = c_{(\alpha)} d_\alpha \int_0^\zeta v_\alpha d\zeta - \frac{G}{\Delta}, \quad P = P_s = 1$$

$$\rho^{-1} = \theta_w + (\theta_s - \theta_w) \vartheta$$

$$P_\alpha = 2\Delta c_{(\alpha)}^2 d_{(\alpha)}^2 \int_1^\zeta v_\alpha^2 d\zeta - 2d_\alpha$$

Граничные условия (2.6) в новых переменных переищутся так:

$$(3.5) \quad \frac{1}{c_\alpha} = 1 + l\Delta \frac{\partial v_\alpha}{\partial \zeta}, \quad \frac{1 - \theta_s}{\theta_s - \theta_w} = \frac{l\Delta}{\sigma} \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta}$$

$$\frac{1 + G}{\Delta} = \int_0^1 (c_1 v_1 + k c_2 v_2) d\zeta$$

Таким образом, задача свелась к совместному решению уравнений (3.3), (3.5) относительно переменных v_α , ϑ , Δ , c_α , θ_s . Величины P , P_α , ρ могут быть исключены из (3.3), (3.5) с помощью выражений (3.4). Для решения системы (3.3), (3.5) используем метод последовательных приближений [12], заключающийся в следующем. Пусть известны функции $v_\alpha^{(n-1)}$, $\vartheta^{(n-1)}$ в $(n-1)$ -м приближении. Подставляя их в систему (3.5), определяем Δ , c_α , θ_s . При известных Δ , c_α , θ_s функции $v_\alpha^{(n)}$, $\vartheta^{(n)}$ определяются из (3.3) после подстановки в их правые части $v_\alpha^{(n-1)}$, $\vartheta^{(n-1)}$. Для получения

последующих приближений процесс повторяется. Из анализа решений уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя (п. 2, см. также [2-4, 8]) следует, что в переменных Дородницына профили скорости и температуры поперек ударного слоя при значениях параметра K порядка единицы близки к линейным. Поэтому в качестве нулевого приближения будем задавать

$$(3.6) \quad v_{\alpha}^{(0)} = \theta^{(0)} = \zeta$$

Найдем аналитическое решение задачи в первом приближении. Подставляя (3.6) в (3.5), получаем при задании коэффициента вязкости в виде $\mu = \theta$

$$(3.7) \quad \Delta = g + \sqrt{g^2 + 2gK^{-1}}, \quad g = (1 + G) / (1 + k) \\ c_{\alpha} = \Delta K / (1 + \Delta K), \quad \theta_s = (\theta_w + \sigma \Delta K) / (1 + \sigma \Delta K)$$

Если коэффициент вязкости пропорционален θ^{ω} , $0 < \omega < 1$, то решение системы (3.5) можно найти, построив при фиксированных σ , ω , θ_w зависимость от θ_s величины

$$(3.8) \quad 2gK = m\sigma^{-1} (\theta_s - \theta_w) (1 - \theta_s)^{-1} \theta_s^{\omega-1} \\ m = (\theta_s - \theta_w) [(1 - \sigma) \theta_s + \sigma - \theta_w]^{-1}$$

При этом для определения c_{α} и Δ имеем

$$(3.9) \quad c_{\alpha} = m, \quad \Delta = 2gm^{-1}$$

Подставляя (3.6) в (3.3), (3.4), получаем

$$(3.10) \quad F_n(\zeta) = \sum_{i=0}^4 \frac{A_{ni}}{i+1} \left[\frac{a_n}{i+2} (\zeta^{i+2} - 1) + \frac{b_n}{i+3} (\zeta^{i+3} - 1) \right] \\ A_{\alpha 0} = \frac{G}{\Delta} + \frac{\varepsilon}{c_{(\alpha)}} \theta_w P_{\alpha 1}, \quad A_{\alpha 1} = \frac{\varepsilon}{c_{(\alpha)}} (\theta_s - \theta_w) P_{\alpha 1} \\ A_{\alpha 2} = -(1+k)/2 + d_{(\alpha)} c_{\alpha}, \quad A_{\alpha 3} = \varepsilon \theta_w P_{\alpha 2} / c_{(\alpha)} \\ A_{\alpha 4} = \varepsilon (\theta_s - \theta_w) P_{\alpha 2} / c_{(\alpha)}, \quad A_{30} = G / \Delta \\ A_{31} = A_{33} = A_{34} = 0, \quad A_{32} = -(1+k) c_{\alpha} / 2 \\ P_{\alpha 1} = -2d_{(\alpha)} (1 + \Delta d_{(\alpha)} c_{\alpha}^2 / 3), \quad P_{\alpha 2} = 2\Delta d_{(\alpha)}^2 c_{\alpha}^2 / 3 \\ a_{\alpha} = l_w^{-1}, \quad b_{\alpha} = l_s^{-1} - l_w^{-1}, \quad a_3 = \sigma a_{\alpha}, \quad b_3 = \sigma b_{\alpha}$$

При вычислении интегралов величина l аппроксимировалась так:

$$l^{-1} = l_w^{-1} + (l_s^{-1} - l_w^{-1}) \zeta$$

При известных Δ , c_{α} , θ_s , F_n , K_n величины $\partial \varphi_{\alpha} / \partial \zeta$, θ находятся из (3.3), (3.1), а коэффициенты трения и теплообмена — по формулам (2.8). Таким образом, задача в первом приближении полностью решена. Сравнение данного решения (светлые точки) с точным численным решением исходной задачи приведено на фиг. 1 и на фиг. 2 (светлые точки соответствуют τ_1 , темные — τ_2 , крестики — q).

При вычислении коэффициентов трения и теплообмена по формулам (2.8) в последние подставляли значение Δ , вычисленное из последнего соотношения (3.5), в правую часть которого подставляли значения $v_{\alpha}^{(1)}$ и $c_{\alpha}^{(1)}$, полученные в первом приближении. Как видно из приведенных кривых, приближенное аналитическое решение хорошо согласуется с численным при $0.1 \leq K \leq 5$. При больших значениях параметра K , соответствующих большим числам Рейнольдса, требуются высшие приближения. Аналогичные результаты получаются и при наличии вдува.

4. Об асимптотическом решении уравнений гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя в окрестности критической точки при больших числах Рейнольдса. Будем рассматривать такие значения числа Рейнольдса, при которых выполняется неравенство $\varepsilon^2 Re \gg 1$. При больших числах Рейнольдса задача (2.5) — (2.7) сингулярна, и для ее асимптотического решения может быть использован метод внешних и внутренних разложений. При этом асимптотика уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя будет различной в зависимости от величины параметра вдува — F . При $-F \lesssim 1$ ударный слой можно разделить на невязкий ударный слой и пограничный слой, примыкающий к поверхности тела. При $-F \gg 1$ реализуется трехслойная схема течения, согласно которой в слоях, примыкающих к поверхности тела и к ударной волне, эффектами молекулярного переноса в первом приближении можно пренебречь, а в промежуточной области (в слое смешения) они играют основную роль. При решении внешней задачи слой смешения может быть заменен поверхностью контактного разрыва с соответствующими условиями на ней [17,21]. Некоторые численные решения внешней задачи приведены штриховыми линиями на фиг. 3 (решалась система (2.5) — (2.7) с $l \equiv 0$ и условиями $\varphi_1 + k\varphi_2 = 0$, $P_{\alpha^+} = P_{\alpha^-}$ на контактном разрыве). Внешняя задача может быть решена в квадратурах, если в уравнениях (2.5) продольный градиент давления $P_{\alpha}(\zeta)$ положить равным $P_{\alpha w}$, где $P_{\alpha w}$ определяется по формуле Буземана — Хейза (формула 3.6.35 работы [15]), что асимптотически верно при малых значениях параметра ε (см. работы [4, 16, 17]). С учетом этого решение внешней задачи имеет следующий вид [16,22] ($\zeta_c^\circ \Delta^{-1}$ — толщина слоя вдуваемых газов): для слоя вдува

$$(4.1) \quad u = \frac{s}{\sqrt{\rho_w}}, \quad w = \frac{\beta_2 \sqrt{\rho_w}}{\sqrt{k}} \frac{(s + \beta_1)^\omega - (\beta_1 - s)^\omega}{(s + \beta_1)^\omega + (\beta_1 - s)^\omega}$$

$$t \equiv \frac{\Delta}{G} (\varphi_1 + k\varphi_2) = - \exp \int_0^s \frac{s + kw\rho_w^{-1/2}}{s^2 - \beta_1^2} ds, \quad \zeta^\circ = G \sqrt{\rho_w} \int_0^s \frac{t ds}{s^2 - \beta_1^2}$$

$$(0 \leq s \leq \beta_1), \quad \zeta_c^\circ = \zeta^\circ(\beta_1)$$

для ударного слоя $u = s$

$$(4.2) \quad w = \frac{\beta_2}{\sqrt{k}} \frac{(s + \beta_1)^\omega + C(s - \beta_1)^\omega}{(s + \beta_1)^\omega - C(s - \beta_1)^\omega}, \quad C = \frac{\sqrt{k} - \beta_2}{\sqrt{k} + \beta_2} \left(\frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1} \right)^\omega$$

$$t \equiv \Delta (\varphi_1 + k\varphi_2) = \exp \int_{\beta_1}^s \frac{s + kw}{s^2 - \beta_1^2} ds,$$

$$\zeta^\circ = \zeta_c^\circ + \int_{\beta_1}^s \frac{t ds}{s^2 - \beta_1^2} \quad (\beta_1 \leq s \leq 1), \quad \Delta = \zeta^\circ(1)$$

$$(\beta_\alpha = \sqrt{-\varepsilon P_\alpha}, \quad \omega = \sqrt{k} \beta_2 / \beta_1, \quad \zeta^\circ = \Delta \zeta)$$

При малых значениях параметра вдува $-F \lesssim 1$ внутренняя задача в обычном приближении состоит в решении уравнений пограничного слоя, которые в окрестности критической точки имеют вид уравнений (2.5), если в них положить $\Delta = 1$, $\partial P / \partial \zeta = \partial P_\alpha / \partial \zeta = 0$, $P_\alpha = P_{\alpha w}$, где $P_{\alpha w}$ задается из решения внешней задачи.

Граничные условия на поверхности тела — условия (2.7), на бесконечности — обычные

$$(4.3) \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad \partial \varphi_\alpha / \partial \zeta \rightarrow (-\varepsilon P_{\alpha w} / d_{(\alpha)})^{1/2}, \quad \theta \rightarrow 1$$

Систему уравнений пограничного слоя с граничными условиями (2.7), (4.3) при наличии вдува или отсоса решали численно тем же методом на тех же сетках, что и систему уравнений ударного слоя.

Результаты сравнения коэффициентов трения и теплообмена приведены на фиг. 2. Прямые линии на фиг. 2 — решение уравнений пограничного слоя. Как видно, различие в коэффициенте трения τ_2 в направлении, совпадающем с плоскостью, содержащей сечение поверхности тела с наибольшим радиусом кривизны, может быть значительным даже при больших числах Рейнольдса. Различие в коэффициентах τ_1 и q существенно меньше.

Объяснение данного различия (состоит в следующем. Анализ решения внешней задачи (4.2) показывает, что при обтекании вытянутого в поперечном направлении тела (малые k) около его поверхности образуется тонкий сильно завихренный слой, причем одна из касательных составляющих вектора скорости имеет бесконечную производную по поперечной переменной на поверхности тела (см. фиг. 3, линия 4 рассчитана при тех же значениях параметров, что и линия 1). Другая составляющая скорости и температура при $0 < k < 1$ имеют нулевую производную по поперечной координате. Таким образом, для правильного построения асимптотики уравнений ударного слоя при больших числах Рейнольдса следует учитывать вихревое взаимодействие, которое не учитывается при обычной постановке задачи в рамках теории пограничного слоя первого приближения.

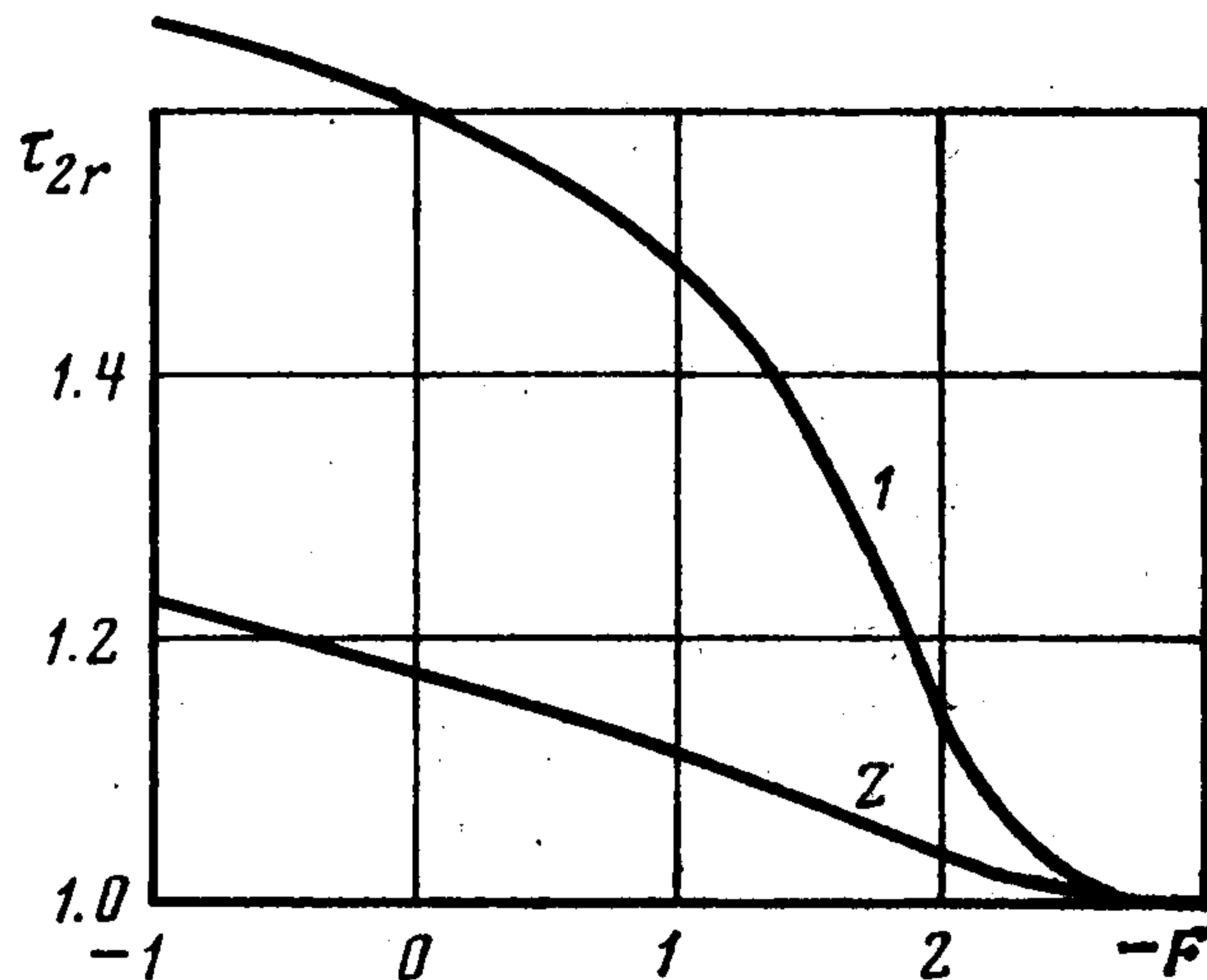
Отметим, что в случае плоского течения производная от касательной составляющей скорости по поперечной координате равна нулю, а в случае осесимметричного течения она конечна [21], что приводит к слабому влиянию при больших числах Рейнольдса завихренности внешнего потока на коэффициенты трения и теплообмена на поверхности тела.

Как видно из фиг. 6, на которой приведено отношение коэффициентов трения в направлении ξ^2 на поверхности тела τ_{2r} , полученных в результате решения уравнений ударного и пограничного слоев (кривые 1, 2 соответствуют $k = 0.1, 0.4$), с увеличением параметра отсоса данное отношение увеличивается в силу того, что основными членами в уравнениях пограничного слоя становятся члены, связанные с эффектами молекулярного переноса [23]. С увеличением вдува отношение коэффициентов трения уменьшается и, начиная со значения параметра вдува $-F \gtrsim 2.5$, отношение коэффициентов мало отличается от единицы. Последнее объясняется тем, что основной вклад в коэффициент трения на поверхности тела при больших значениях параметра вдува вносит градиент давления в продольном направлении [17, 22], который слабо изменяется поперек слоя вдуваемых газов. Можно показать, что при $-F \gg 1$ и $\delta \ll 1$ отношение коэффициентов трения в ударном и пограничном слое — величина порядка

$$\tau_{\alpha r} \rightarrow \frac{P_{\alpha (F \neq 0)}}{P_{\alpha (F=0)}} = 1 + O(\delta)$$

При $-F \gg 1$ решение внутренней задачи заключается в решении уравнений пограничного слоя с условиями (4.3) и с условиями [17]

$$\begin{aligned} \zeta \rightarrow -\infty, \quad \partial \varphi_\alpha / \partial \zeta &\rightarrow [-\varepsilon P_{\alpha w} / \rho_w d_{(\alpha)}]^{1/2}, \quad \theta \rightarrow \theta_w \\ \zeta = \zeta_c, \quad \varphi_1 + k\varphi_2 &= 0 \end{aligned}$$



Фиг. 6

Некоторые результаты решения данной задачи приведены штрих — пунктирными линиями на фиг. 3, из которой видно, что различие в профилях u и θ , рассчитанных по уравнениям вязкого ударного слоя и по уравнениям слоя смешения, в вязкой части ударного слоя незначительно, в то время как в профилях w оно существенно больше. В данном случае сильно завихренный слой образуется вблизи поверхности контактного разрыва.

Авторы благодарят Г. А. Тирского и Г. Г. Черного за обсуждение данной работы.

Поступила 4 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И., Михайлова М. П., Черный Г. Г. О влиянии вязкости и теплопроводности на течение газа за сильно искривленной ударной волной. Вестн. МГУ, 1953, № 3.
2. Cheng H. K. The blunt-body problem in hypersonic flow at low Reynolds number. IAS Paper, 1963, No. 63—92.
3. Анкудинов А. Л. Расчет вязкого гиперзвукового ударного слоя с подводом массы при умеренно малых числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
4. Магомедов К. М. Гиперзвуковое обтекание тупых тел вязким газом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
5. Залогин Г. Н., Лунев В. В. О модели вязкого неравновесного ударного слоя с тонкой ударной волной. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5.
6. Численное исследование современных задач газовой динамики. (Под ред. О. М. Белоцерковского.) М., «Наука», 1974.
7. Тирский Г. А. К теории гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел вязким химически реагирующим многокомпонентным потоком газа при наличии вдува. Научн. тр. Ин-та механики, МГУ, 1975, № 39.
8. Брыкина И. Г. Интегрирование уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя методом последовательных приближений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1978, т. 18, № 1.
9. Kang S. W. Hypersonic low-Reynolds-number flow over a blunt body with mass injection. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 8.
10. Davis R. T. Numerical solution of the hypersonic viscous shock-layer equations. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No 5.
11. Карякин В. Е., Попов Ф. Д. Расчет пространственного обтекания затупленных тел сверхзвуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1977, т. 17, № 6.
12. Гершбейн Э. А. К теории пространственного обтекания затупленных тел гиперзвуковым потоком вязкого газа при наличии вдува. В сб.: Некоторые вопросы механики сплошной среды. Изд-во МГУ, 1978.
13. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.
14. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
15. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
16. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М., «Машиностроение», 1975.
17. Гершбейн Э. А. Теория гиперзвукового ударного слоя при больших числах Рейнольдса и при сильном вдуве инородных газов. ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.
18. Шидловский В. П. Введение в динамику разреженных газов. М., «Наука», 1965.
19. Шевелев Ю. Д. Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М., «Наука», 1977.
20. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. В сб.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М., «Наука», 1964.
21. Гершбейн Э. А., Тирский Г. А. Течение вязкого теплопроводного многокомпонентного газа в ударном слое в окрестности притупления при интенсивных вдувах. Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1970, № 1.
22. Гершбейн Э. А. Асимптотическое решение уравнений трехмерного ламинарного многокомпонентного пограничного слоя при сильном вдуве. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.
23. Гершбейн Э. А. Асимптотическое решение уравнений трехмерного ламинарного многокомпонентного пограничного слоя при интенсивном отсосе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4.