Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.36

К ТЕОРИИ ПРАКТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Р. З. Абдуллин, Л. Ю. Анапольский

(Иркутск)

Вводятся некоторые динамические свойства системы процессов, обобщающие для дифференциальных и разностных уравнений большинство известных концепций (см, например, [1–8] теории практической устойчивости, таких, как: (A, λ, t_0, T) — устойчивость Четаева [1], практическая устойчивость Ла-Салля и Лефшеца [3], квазисжимающая и сжимающая устойчивость при возмущениях [4], финальная и полуфинальная устойчивость [7] и ряд других. Для системы процессов [1] с помощью принципа уравнения [9, 10] получены теоремы, охватывающие многие известные признаки устойчивости (например тотальной практической устойчивости [5], практической устойчивости с заданным временем установления [6] и некоторые другие). Выделены эффективно проверяемые случаи применения этих теорем. Проведен пример.

1. Теоремы об оценках для системы процессов. Для системы процессов S с множеством T, являющимся некоторым подмножеством вещественной оси R^1 с наследованным из R^1 естественным отношением порядка, рассмотрим динамические свойства, выражаемые формулами

$$
\begin{aligned}
(1.1)\qquad & \mathrm{P}_{1^\circ} \equiv \{W_1\, [W_2 R_1 \wedge (\forall \Delta \in a\,(t_0))(\forall t \in \Delta) R_2]\} \\
& \mathrm{P}_{2^\circ} \equiv \{W_1\, [W_2 R_1 \wedge (\exists \Delta \in a\,(t_0))(\forall t \in \Delta) R_2]\} \\
& \mathrm{P}_{3^\circ} \equiv \{W_1\, [W_2 R_1 \wedge (\exists a_\mu\,(t_0))(\forall \Delta \in a_\mu\,(t_0))(\forall t \in \Delta) R_2]\} \\
& W_1 \equiv (\forall t_0 \in T^\circ)(\forall h_{t_0} \in P^*{}_{t_0})(\forall x \in rh), \\
& W_2 \equiv (\forall t \in T_{t_0}(x,\ h)),\ R_1 \equiv x\,(t,\ h) \in P^t \\
& R_2 \equiv x\,(t, h) \in P_f{}^t,\quad x\,(\cdot,\ h) \equiv x \\
& H = \{h = t_0,\ h_{t_0}) : t_0 \in T^\circ,\ h_{t_0} \in H_{t_0}\}
\end{aligned}
$$

Здесь P, $P_t \in \Xi$, $P^\circ \in H$ — некоторые фиксированные подмножества множеств Ξ, H, такие, что $(\forall t \in T)$ (соответственно $(\forall t_0 \in T^\circ)$) их сечения P^t, $P_f{}^t$ (соответственно $P_{t_0}{}^\circ$) гиперплоскостью t (соответственно t_0) не пусты; $a\,(t_0)$ — множество фиксированных промежутков $\Delta \subseteq T_{t_0}$ вида $[t_-,\ t^-)$, $t_- \in T_{t_0} \equiv \{t \in T :\ t_0 \leqslant t\}$ (в случае вырожденных промежутков Δ считается $\Delta = \{t_-\}$); $a_\mu\,(t_0)$ — множество непересекающихся промежутков $\Delta = [t_-,\ t^-) \subseteq T_{t_0}$, мера которых $\mathrm{mes}\,\Delta \geqslant \mu$ или $\mathrm{mes}\,\Delta \leqslant \mu$ $(\mu = \mathrm{const} > 0)$ (промежутки $\Delta \in a_\mu\,(t_0)$) в отличие от промежутков, содержащихся в множестве $a\,(t_0)$, не фиксированы, однако число μ счи-

---

[1] *Анапольский Л. Ю., Матросов В. М.* Метод сравнения в анализе возмущаемых процессов. В сб.: Международный симпозиум ИФАК по проблемам организационного управления и иерархическим системам (Баку, 1971). Рефераты докладов, ч. 1. М., «Наука», 1972.

тается заданным); $T^\circ \subseteq T$ — множество начальных моментов времени t_0; $\Xi = \{(t, x) : t \in T, x \in X^t\}$ — пространство позиций; X^t — пространство состояний в момент t; H — пространство исходных данных; H_{t_0} — пространство входов и (или) начальных состояний в момент t_0; r — основное отношение системы процессов с областью определения $\operatorname{dom} r \subseteq H$, такое, что для любого h из $\operatorname{dom} r$ rh — совокупность процессов $x(\cdot, h)$ системы процессов S с исходными данными h, область определения которых $T_{t_0}(x, h)$ $(\forall t \in T_{t_0}^*(x, h))$ $x(t, h) \in X^t$; кроме того, полагаем

$$(1.2)\qquad \begin{gathered}(\forall t_0 \in T^\circ) P_{t_0}^* \equiv (P^\circ \cap \operatorname{dom} r)_{t_0} \neq \varnothing \\ (\forall h = (t_0, h_{t_0}) \in \operatorname{dom} r)(\forall x \in rh) \quad T_{t_0}(x, h) \parallel T_{t_0}\end{gathered}$$

Свойства P_{1° и P_{2° ранее не указывались, однако часто имеют место в динамике регулируемых систем. Свойство P_{3° близко к свойству дифференциальной регулируемой системы быть нерастягивающие колебательной [11]. Смысл свойства P_{2° состоит в следующем. Для любых исходных данных $h = (t_0, h_{t_0})$, $t_0 \in h_{t_0} \in P_{t_0}^*$ и любых процессов с этими исходными данными: 1) при всех $t \in T_{t_0}$ $x(t, h) \in P^t$; 2) существует промежуток $\Delta = [t_-, t^-) \subseteq T_{t_0}$ из множества таких промежутков $a(t_0)$, что для всех $t \in \Delta$ $x(t, h) \in P_f^t$. При этом множества P, P_f, P° и $a(t_0)$ считаются заданными априори. В отличие от P_{2° в свойстве P_{3° множество $a_\mu(t_0)$ непересекающихся промежутков «длины», не меньшей (или не большей) μ, расположенных «правее» точки t_0, предполагается существующим, причем для любого $\Delta \in a_\mu(t_0)$ и для всех $t \in \Delta$ $x(t, h) \in$ $\in P_f^t$. В реальных ситуациях P^t — множество возможных состояний системы, а P_f^t — множество требуемых ее состояний, когда выполняются какие-либо дополнительные ограничения по точности, качеству переходного процесса и т. п.

Очевидно, $P_{1^\circ} \Rightarrow P_{2^\circ}$. С другой стороны, свойство P_{1° эквивалентно называемому P_1P° — оценкой на T [9] системы процессов S свойству

$$P_{1^\circ}' \equiv \{W_1 W_2\, x(t, h) \in P_1^t\}$$

$$P_1^t = \begin{cases} P^t, & t \in T_{t_0} \setminus \Big(\bigcup\limits_{\Delta \in a(t_0)} \Delta\Big) \\ P^t \cap P_1^t, & t \in \Big(\bigcup\limits_{\Delta \in a(t_0)} \Delta\Big)\end{cases}$$

Каждое из свойств P_{i° $(i = 1, 2, 3)$ в частных предположениях относительно T, T°, P, P°, P_f, $a(t_0)$, $a_\mu(t_0)$ сводится к одной из следующих концентраций устойчивости: (A, λ, t_0, T) — устойчивости Четаева [1], практической устойчивости [3], практической устойчивости (тотальной) и ее равномерного аналога относительно переменных во времени множеств [5], стохастической практической устойчивости [12]. Кроме того, свойства P_{1°, P_{2° сводятся к практической устойчивости с заданным временем установления [6], а P_{2° — к финальной или полуфинальной устойчивости [7] и их равномерным аналогам, а также к квазисжимающей или сжимающей устойчивости относительно переменных во времени множеств [4].

Доказательство этого предположения в полном объеме громоздко, поэтому ограничимся, например, установлением того факта, что из P_{1° вытекает практическая устойчивость [3].

Пусть $R_0^1 = [0, +\infty)$, Q — область в R^n, $Q^\circ \subset Q$, $C^* \subseteq C[R'_0 \times$ $\times Q, R^n)$, т. е. C^* — некоторое множество из класса непрерывных и определенных на $R_0^1 \times Q$ n-мерных функций. Рассматривается семейство обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
(1.3)\qquad \begin{aligned} &x^{\cdot} = f(t, x) + R(t, x),\ x(t_0) = x_0 \in Q^\circ,\ R \in C^*, \\ &f \in C[R_0' \times Q,\ R^n] \end{aligned}
$$

Предполагается, что $(\forall x_0 \in Q^\circ)$ $(\forall t_0 \geqslant 0)$ $(\forall R \in C^*)$ — каждое классическое решение $x_R(\cdot,\ t_0,\ x_0)$ задачи Коши (1.3) при $x_R(t_0,\ t_0,\ x_0) = x_0$ продолжимо вправо на интервал $[t_0,\ +\infty)$. Система (1.3) обладает практической устойчивостью в смысле [3], если

$$
(1.4)\qquad \begin{aligned} &(\forall t_0 \in T^\circ)(\forall x_0 \in Q^\circ)(\forall R \in C^*)(\forall x_R(\cdot,\ t_0,\ x_0)) \\ &(\forall t \in [t_0,\ +\infty))\, x_R(t,\ t_0,\ x_0) \in Q \end{aligned}
$$

Примем $T = T^\circ = R_0^1$, $X^t = X = Q$, $H_{t_0} = Q^\circ \times C^*$; систему процессов S зададим как множество всех классических решений $x_R(\cdot,\ t_0,\ x_0)$ $(t_0 \in T^\circ,\ x_0 \in Q^\circ)$ задачи (1.3) при $R \in C^*$. Тогда $\operatorname{dom} r = T^\circ \times H_{t_0}$; $(\forall h = (t_0,\ x_0,\ R) \in \operatorname{dom} r)$ $\mathrm{rh} = \{x_R(\cdot,\ t_0,\ x_0)\}$, т. е. rh — множество всех классических решений уравнения (1.3) с заданным t_0, x_0, R; $(\forall h \in \operatorname{dom} r)$ $(\forall r \in \mathrm{rh})$ $T_{t_0}(x,\ h) = [t_0 + \infty)$.

Положим

$$
P_{t_0}{}^\circ = H_{t_0},\quad P_f{}^t = P^t = Q,\quad a(t_0) = \{\Delta\},\quad \Delta = [t_0,\ +\infty),\quad P^* = \operatorname{dom} r
$$

Формула свойства $\rho_1{}^\circ$ принимает вид

$$
\begin{aligned} &(\forall h = (t_0,\ x_0,\ R) \in T^\circ \times Q^\circ \times C^*)\ (\forall x_R(\cdot,\ t_0,\ x_0) \in \\ &\in \mathrm{rh})\ (\forall t \in [t_0,\ +\infty)) \\ &x_R(t,\ t_0,\ x_0) \in Q \end{aligned}
$$

совпадающий с (1.4), что и требовалось.

Аналогично доказываются и другие импликации, описанные в предложении.

На основе принципа сравнений [9, 10] получим для составных динамических свойств $P_i{}^\circ$ теоремы сравнения. Пусть для системы процессов S в предположении (1.2) существуют системы сравнения $S_c{}^\alpha$ и вектор-функции сравнения $V^\alpha = (v^\alpha,\ w^\alpha,\ v_{01}{}^\alpha,\ v_{02}{}^\alpha)$ $(\alpha = 1,\ 2)$ [10] и выполняются условия

$$
(1.5)\qquad \begin{aligned} &(\forall t_{0c}^\alpha \in T_c^{0\alpha})\, P_{t_0c}^{*\alpha} \equiv (P_c^{0\alpha} \cap \operatorname{dom} r_c{}^\alpha)_{t_0{}^\alpha c} \neq \varnothing \\ &(\forall h_c{}^\alpha = (t_{0c}^\alpha,\ h_{t_0c}^\alpha) \in \operatorname{dom} r_c{}^\alpha)(\forall x_c{}^\alpha \in r_c{}^\alpha h_c{}^\alpha) \quad T^\alpha_{t_0{}^\alpha c}(x_c{}^\alpha,\ h_c{}^\alpha) = T^\alpha_{t_0{}^\alpha c} \end{aligned}
$$

Здесь $t_{0c}{}^\alpha$, $h_{t_0c}{}^\alpha$, $h_c{}^\alpha$, ..., $T_c{}^{\circ\alpha}$, $P_c{}^{\circ\alpha}$, $P_{t_0c}{}^{*\alpha}$, ... — соответственно переменные и константы, которыми описывается система сравнения $S_c{}^\alpha$. Так как динамические свойства $P_i{}^\circ$ $(i = 1,\ 2,\ 3,)$ содержат две заключительные формулы R_1, R_2, то для получения теорем сравнения, вообще говоря, используются [10] две системы сравнения $S_c{}^\alpha$ и две вектор-функции сравнения V^α $(\alpha = 1,\ 2)$. Как правило, принимается[1] $S_c{}^1 = S_c{}^2$, $V^1 = V^2$.

---

[1] *Анапольский Л. Ю., Матросов В. М.* Метод сравнения в динамике систем и абстрактной теории управления. Тезисы докл. 5-й Казахстанск. межвуз. конф. по математике и механике, 1974. Алма-Ата, 1974.

Для динамического свойства P_{i° (соответственно для простого свойства $\mathrm{P}_{i^\circ}{}^{\alpha}$, отвечающего заключительной формуле R_α) динамическое свойство сравнения (соответственно простое динамическое свойство системы сравнения $S_c{}^{\alpha}$) выражается формулой $\mathrm{P}_{i^\circ c}$ (соответственно $\mathrm{P}_{i^\circ c}^{\alpha}$), получающейся из P_{i° (соответственно из $\mathrm{P}_{i^\circ}{}^{\alpha}$) приписыванием ко всем входящим в нее символом нижнего индекса c и верхнего индекса α.

Из принципа сравнения [10] выводятся следующие леммы сравнения для динамических свойств P_{i° $(i = 1, 2, 3)$ (символ $\vdash$ означает выводимость в данной теории):

$$(1.6)\qquad \bigwedge_{\alpha=1}^{2} [(A_\alpha) \wedge (B_\alpha) \wedge C_{i^\circ}^{\alpha} B^{\alpha}] \vdash \mathrm{P}_{i^\circ} \Rightarrow \mathrm{P}_{i^\circ}$$

$$(1.7)\qquad (A_\alpha) \equiv \{(\forall h = (t_0, h_{t_0}) \in \operatorname{dom} r)$$
$$h_c{}^{\alpha} = (t_{0c}^{\alpha}, h_{t_0c}^{\alpha}) = (v_{01}{}^{\alpha}(t_0), v_{02}{}^{\alpha}(h)) \in \operatorname{dom} r_c{}^{\alpha}\}$$

$$(1.8)\qquad (B_\alpha) \equiv \{(\forall h = (t_0, h_{t_0}) \in H_*{}^{\alpha})(\forall x \in \mathrm{rh})(\exists x_c{}^{\alpha} \in r_c{}^{\alpha} h_c{}^{\alpha})(\forall t \in T_*{}^{\alpha})$$
$$v^{\alpha}(t, x(t, h), h) \leqslant x_c{}^{\alpha}(w^{\alpha}(t), v_{01}{}^{\alpha}(t_0), v_{02}{}^{\alpha}(h))\}$$
$$T_*{}^{\alpha} \subseteq T_{t_0} \cap (w^{\alpha})^{-1}(T_{t_0 \alpha c}^{\alpha})$$

$$(1.9)\qquad H_*{}^{\alpha} \subseteq \{h \in \operatorname{dom} r : (\forall x \in rh)(\forall t \in T_{t_0})(t, x(t, h), h) \in \operatorname{dom} v^{\alpha}\}$$

$$(1.10)\qquad B^{\alpha} \equiv \{(\forall t_{0c}{}^{\alpha} = v_{01}{}^{\alpha}(t_0)) \wedge (\forall h_{t_0 \alpha_c}^{\alpha} = v_{02}{}^{\alpha}(h)) \wedge (t_c{}^{\alpha} = w^{\alpha}(t)) \wedge$$
$$\wedge (\neg R_\alpha \wedge R_{\alpha c} \Rightarrow v^{\alpha}(t, x(t, h), h \nleqslant x_c{}^{\alpha}(t_c{}^{\alpha}, h_c{}^{\alpha}))\}$$
$$C_{i^\circ}{}^{1} = W_1(\forall t \in T_{t_0})(\exists t_{0c}{}^{1} \in T_c{}^{01})(\exists h_{t_0^1 c}^{1} \in P_{t_0^1 c}^{*1})$$
$$(\forall x_c{}^{1} \in r_c{}^{1} h_c{}^{1})(\exists t_c{}^{1} \in T_{t_0^1 c}^{1}), \quad C_{i^\circ}{}^{2} = C^2 C_{i^\circ}{}^{+2}$$
$$C^2 = W_1(\exists t_{0c}{}^{2} \in T_c{}^{02})(\exists h_{t_0^2 c}^{2} \in P_{t_0^2 c}^{*2})(\forall x_c{}^{2} \in r_c{}^{2} h_c{}^{2})$$
$$C_{1^\circ}{}^{+2} = (\forall \Delta \in a(t_0))(\forall t \in \Delta)(\exists \Delta_c{}^{2} \in a_c{}^{2}(t_{0c}{}^{2}))(\exists t_c{}^{2} \in \Delta_c{}^{2})$$
$$C_{2^\circ}{}^{+2} = (\forall \Delta_c{}^{2} \in a_c{}^{2}(t_{0c}{}^{2}))(\exists \Delta \in a(t_0))(\forall t \in \Delta)(\exists t_c{}^{2} \in \Delta_c{}^{2})$$
$$C_{3^\circ}{}^{+2} = (\forall a_{\mu c}^{2}(t_{0c}{}^{2}))(\exists a_\mu(t_0))(\forall \Delta \in a_\mu(t_0))$$
$$(\forall t \in \Delta)(\exists \Delta_c{}^{2} \in a_{\mu c}^{2}(t_{0c}{}^{2}))(\exists t_c{}^{2} \in \Delta_c{}^{2})$$

Для получения из (1.6) теорем сравнения используем следующую процедуру [10]. Пусть

$$(1.11)\qquad C_{xi^\circ}^{*1} X_*{}^{1} \equiv \{(\forall t \in T_*{}^{1} \cap \mathrm{pr}_1 \operatorname{dom} v^1)(\forall x \in Q^{1t} \setminus P^t)$$
$$(\forall x_c{}^{2} \in P_c^{1w^1(t)})\, v^1(t, x, h) \nleqslant x_c{}^{1}\}$$
$$C_{xi^\circ}^{*2} X_*{}^{2} \equiv \{\forall t \in T_*{}^{2} \cap (\bigcup_{\Delta \in a(t_0)} \Delta) \cap \mathrm{pr}_1 \operatorname{dom} v^2)$$
$$(\forall x \in Q^{2t} \setminus P_f{}^{t})(\forall x_c{}^{2} \in P_{fc}^{2w^2(t)})\, v^2(t, x, \mathring{h}) \nleqslant x_c{}^{2}\}, \quad i = 1, 2$$
$$C_{x3^\circ}^{*2} X_*{}^{2} \equiv \{(\forall t \in T_*{}^{2} \cap (\bigcup_{\Delta \in a_\mu(t_0)} \Delta) \cap \mathrm{pr}_1 \operatorname{dom} v^2)$$
$$(\forall x \in Q^{2t} \setminus P_f{}^{t})(\forall x_c{}^{2} \in P_{fc}^{2w^2(t)})\, v^2(t, x, h) \nleqslant x_c{}^{2}\}$$

Здесь $(\forall t \in T)$ $Q^{\alpha t} \subseteq \mathrm{pr}_2 \operatorname{dom} v^{\alpha}$, $Q^{\alpha t}$ — множество, содержащее значения всех процессов $x(\cdot, t_0, h_{t_0})$ в момент времени t при $h_{t_0} \in P_{t_0}{}^{*} \cap$ $\cap\, \mathrm{pr}_3 \operatorname{dom} v^{\alpha}$, а $\mathrm{pr}_\beta \operatorname{dom} v^{\alpha}$ — проекция множества $\operatorname{dom} v^{\alpha}$ на β-ось ($\beta =$ $= 1, 2, 3$). Согласно алгоритму получения теорем сравнения [10], условия, фигурирующие в теоремах сравнения для динамических свойств P_{i°, записываются с учетом (1.11) следующим образом:

(1.12) $C^{\alpha}_{t_c i^\circ}(t_{0c}{}^{\alpha} = v_{01}{}^{\alpha}(t_0)) \equiv \{v_{01}{}^{\alpha}(T^\circ) \subseteq T_c{}^{\circ\alpha}\} \quad (\alpha = 1, 2)$

(1.13) $C^{\alpha}_{h_0 i^\circ}(h^{\alpha}_{t_0\alpha_c} = v_{02}{}^{\alpha}(h)) \equiv \{(\forall t_0 \in T^\circ)\, v_{02}{}^{\alpha}(t_0,\ P_{t_0}{}^*) \subseteq P^{*\alpha}_{v_{01}{}^{\alpha}(t)c}\}$

(1.14) $C^{1}_{ti^\circ}(t_c{}^1 = w^1(t)) \equiv \{(\forall t_0 \in T^\circ)\, w^1(T_{t_0}) \subseteq T^1_{v_{01}{}^1(t_0)c}\}$

$C^2_{t1^\circ}(t_c{}^2 = w^2(t)) \equiv \{(\forall t_0 \in T^\circ)(\forall \Delta \in a(t_0))$
$(\exists \Delta_c{}^2 \in a_c{}^2(v_{01}{}^2(t_0))) \quad w^2(\Delta) \subseteq \Delta_c{}^2\}$

$C^2_{t2^\circ}(t_c{}^2 = w^2(t)) \equiv \{(\forall t_0 \in T^\circ)(\forall \Delta_c{}^2 \in a_c{}^2(v_{01}{}^2(t_0)))$
$(\exists \Delta \in a(t_0)) \quad w^2(\Delta) \subseteq \Delta_c{}^2\}$

$C_{t3^\bullet}{}^2(t_c{}^2 = w^2(t)) = \{(\forall t_0 \in T^\circ)(\forall a_{\mu c}{}^2(v_{01}{}^2(t_0)))(\exists a_\mu(t_0))$
$(\forall \Delta \in a_\mu(t_0))(\forall t \in \Delta)(\exists \Delta_c{}^2 \in a_{\mu c}{}^2(v_{01}{}^2(t_0)))(\exists t_c{}^2 \in \Delta_c{}^2)$
$t_c{}^2 = w^2(t)\}$

(1.15) $C^1_{x*i^\circ}X_*{}^1 \equiv \{W^1 C^2_{xi^\circ}X_*{}^1\}$

$C^2_{x*i^\circ}X_*{}^2 \equiv \{W^2 C^2_{xi^\circ}X_*{}^2\}, \quad i = 1, 2$

$C^2_{x*3^\circ}X_*{}^2 \equiv \{W^2(\forall t \in T_*{}^2 \cap \mathrm{pr}_1 \operatorname{dom} v^2)$
$(\forall x \in Q^{2t} \setminus P_f{}^t)(\forall x_c{}^2 \in P^{2m^2(t)}_{fc})\, v^2(t,\ x,\ h) \not\leqslant x_c{}^2\}$
$W^{\alpha} = (\forall t_0 \in T^\circ)(\forall h_{t_0} \in P_{t_0}{}^* \cap \mathrm{pr}_3 \operatorname{dom} v^{\alpha})$

Таким образом, для динамических свойств P_{i° имеет место следующая теорема.

Теорема сравнения 1. Пусть для системы процессов S при условиях (1.2) существуют системы сравнения $S_c{}^{\alpha}$ и вектор-функции сравнения $V^{\alpha} = (v^{\alpha},\ w^{\alpha},\ v_{01}{}^{\alpha},\ v_{02}{}^{\alpha})$ $(\alpha = 1,\ 2)$, удовлетворяющие условиям (1.5). Тогда

$$\bigwedge_{\alpha=1}^{2} [C^{\alpha}_{h_0 i^\circ}(h^{\alpha}_{t_0\alpha_c} = v_{02}{}^{\alpha}(h)) \wedge C^{\alpha}_{ti^\circ}(t_c{}^{\alpha} = w^{\alpha}(t)) \wedge C^{\alpha}_{x*i^\circ}X_*{}^{\alpha}] \vdash P_{i^\circ c} \Rightarrow P_{i^\circ}$$

где указанные формулы задаются соотношениями (1.13) — (1.15).

Отметим, что формула (1.12) при условии $v_{01}{}^{\alpha} : T^\circ \to T_c{}^{\circ\alpha}$ $(\alpha = 1, 2)$ общезначима, поэтому условие $C_{t_c i^\circ}{}^{\alpha}(t_{0c}{}^{\alpha} = v_{01}{}^{\alpha}(t_0))$ не фигурирует в формулировке теоремы.

Замечания. 1°. Условие (1.13) означает, что в любой начальный момент времени $t_0 \in T^\circ$ образ некоторого фиксированного множества $P_{t_0}{}^*$ из пространства исходных данных H_{t_0} при отображении $v_{02}{}^{\alpha}$ содержится в фиксированном множестве $P^{*\alpha}_{v_{01}{}^{\alpha}(t_0)c}$ пространства исходных данных системы сравнения $S_c{}^{\alpha}$.

2°. Соотношения (1.14) означают вложимость при отображении w^{α} некоторых временных отрезков T_{t_0}, $\Delta, \ldots$ системы процессов S в соответствующие временные отрезки $T^{\alpha}_{t_0\alpha_c}$, $\Delta_c{}^{\alpha}, \ldots$ системы сравнения $S_c{}^{\alpha}$.

3°. Первое (соответственно второе и третье) требование предполагает, что для любых исходных данных из множества $P_{t_0}{}^* \cap \mathrm{pr}_3 \operatorname{dom} v^1$ (соответственно $P_{t_0}{}^* \cap \mathrm{pr}_3 \operatorname{dom} v^2$) и при некоторых $t \geqslant t_0$ функция v^1 (соответственно v^2) не может мажорироваться сверху в смысле частичного порядка из $X^{1w^1(t)}_c$ (соответственно $X^{2w^2(t)}_c$) элементами множества $P^{1w^1(t)}_c$ (соответственно $P^{2w^2(t)}_{fc}$), когда x выбирается из множества $Q^{1t} \setminus P^t$ (соответственно $Q^{2t} / P_f{}^t$).

Полученная теорема сравнения является общей и в частных предположениях относительно системы процессов S, $S_c{}^{\alpha}$ и вектор-функций V^{α} из нее следуют теоремы сравнения для дифференциальных и разностных уравнений, динамических и дисперсных систем и т. п. Далее эта теорема детализируется для случая, когда системы процессов S, S_c^α представляют собой множества решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Приложение к дифференциальным уравнениям. Пусть E — вещественное банахово пространство, $T = [0, \tau)$ —промежуток времени t, $T \subseteq R_0^1 \equiv [0, +\infty)$, $T^\circ \subseteq T$, $G \subseteq T \times E$, $\mathrm{pr}_1 G = T$, F — множество функций $z: G \to L$, где L — некоторое метрическое пространство. Для каждой функции $z \in F$ рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение в E

$$x^{\cdot} = f(t, x, z(t, x)) \tag{2.1}$$

Здесь оператор $f: G \times L \to E$ удовлетворяет в своей области определения условиям теоремы существования решений в смысле Каратеодори (K-решений), т. е. для любых $h = (t_0, x_0, z) \in \Omega^\circ \equiv G^\circ \times F$ ($G^\circ \subseteq T \times \overline{\mathrm{pr}_2 G}$), $\overline{pr_2 G}$ — замыкание $\mathrm{pr}_2 G$ в E) существует K-решение $x(\cdot, h)$ задачи Коши для уравнения (2.1), определенное на промежутке $[t_0, \tau)$.

Систему K-решений задачи Коши для уравнения (2.1) примем в качестве системы процессов S, полагая $(\forall t \in T)\ X^t = E$, $(\forall t_0 \in T^\circ)\ H_{t_0} = G_{t_0}{}^\circ \times F$, $\mathrm{dom}\ r = \Omega^\circ$; здесь $(\forall h = (t_0, x_0, z) \in \Omega^\circ)\ \mathrm{rh} = \{x(\cdot, h)\}$ — множество K-решений уравнения (2.1) с исходными данными h, таких, что

$$(\forall x(\cdot, h) \in rh)\ x(t_0, t_0, x_0, z) = x_0 \wedge T_{t_0}(x, h) = [t_0, \tau)$$

Пусть непрерывная функция $v^\alpha : T \times \overline{\mathrm{pr}_2 G} \times F \to R^{k_\alpha}$, $(t, x, z) \mapsto v^\alpha(t, x, z)$ ($\alpha = 1, 2$ и в R^{k_α} вводится покомпонентная частичная упорядоченность) такова, что $(\forall h \in \Omega^\circ)\ (\forall x(\cdot, h) \in \mathrm{rh})$ функция $v^\alpha(\cdot, x(\cdot, h), z)$ переменной t абсолютно полунепрерывна сверху в смысле [13] на любом отрезке $[t_0\tau_0] \subset [t_0, \tau)$ и для любых x, z и почти всех t, таких, что $(t, x, z) \in G_1^\alpha \times F$

$$\begin{aligned} D_+ v^\alpha(t, x, z) &\equiv \liminf_{s \to 0+} s^{-1}[v^\alpha(t + s, x + sf(t, x, z(t, x)), z) - \\ &- v^\alpha(t, x, z)] \leqslant g^\alpha(t, v^\alpha(t, x, z)) \quad \alpha = 1, 2) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $G_1^\alpha \subseteq G$, $\mathrm{pr}_1 G_1^\alpha = T$, $(\forall t \in T)\ G_1^{\alpha t} \neq \varnothing$; измеримая функция $g^\alpha: T \times A^\alpha \to R^{k_\alpha}$ (A^α — область в R^{k_α}, содержащая множество рассматриваемых значений функции v^α) удовлетворяет в $T \times A^\alpha$ условию [14] по переменной v^α, т. е. для почти всех $t \in T$ и любого $s = 1, \ldots, k_\alpha$, $g_s^\alpha(t, v_1^\alpha) \leqslant g_s^\alpha(t, v_2^\alpha)$ при $v_1^\alpha \leqslant v_2^\alpha$, $v_{1s}^\alpha = v_{2s}^\alpha$, а в любом компактном множестве $B^\alpha \subset T \times A^\alpha$ функция g^α измерима по t и ограничена по норме суммируемой функцией $\varphi_{B^\alpha}(t)$:

$$\|g^\alpha(t, v^\alpha)\| \leqslant \varphi_{B^\alpha}(t) \quad \text{при } (t, v^\alpha) \in B^\alpha,$$
$$\int_{T_{B^\alpha}} \varphi_{B^\alpha}(t)\,dt < +\infty, \quad T_{B^\alpha} = \mathrm{pr}_1 B^\alpha \subset T$$

Здесь мера, измеримость и интеграл понимаются в смысле Лебега.

На основе (2.2) образуется вспомогательная системы обыкновенных дифференциальных уравнений в R^{k_α}

$$x^{\alpha\cdot}{}_c = g^\alpha(t, x^\alpha{}_c) \quad (\alpha = 1, 2) \tag{2.3}$$

Для системы (2.3) рассматриваются обобщенные решения второго рода [15], определяемые начальными данными $h_c^\alpha = (t_0, x_{c_0}^\alpha) \in T \times A^\alpha$. Эти решения предполагаются существующими для любых $h_c^\alpha \in T \times A^\alpha$ на интервале $T_{t_0} = [t_0, \tau)$. Из теоремы 1 в [14] о дифференциальном неравенстве имеем

$$(2.4) \qquad (\forall h \in \Omega^\circ \cap (G_1^\alpha \times F))\ (\forall x(\cdot, h) \in rh)\ (\forall t \in T_*^\alpha)$$
$$v^\alpha(t, x(t, h), z) \leqslant x_c^{*\alpha}(t, h_c^\alpha)$$

Здесь $x_c^{*\alpha}(\cdot, h_c^\alpha)$ — верхнее решение уравнения (2.3), проходящее через начальную точку $h_c^\alpha = (t_0, x_{c_0}^\alpha = v^\alpha(h))$ (существование верхних обобщенных решений второго рода уравнений (2.3) обеспечивается [14] указанными выше условиями для функции g^α), T_*^α — подмножество T, в течение которого $x(\cdot, h)$, начавшись в $\Omega^\circ \cap (G_1^\alpha \times F)$, остается в G_1^α. Введем вектор-функцию $V^\alpha = (v^\alpha, w^\alpha, v_{01}^\alpha, v_{02}^\alpha)$ $(\alpha = 1, 2)$, компонента v^α которой определена выше, $w^\alpha = v_{01}^\alpha = 1$, а функция v_{02}^α задается соотношением

$$(2.5) \qquad (\forall h \in \Omega^\circ)\quad v_{02}^\alpha(h) = v^\alpha(h)$$

Пусть $H_*^\alpha = \Omega^\circ$ (см. 1.9). Определим систему процессов S_c^α как множество обобщенных решений второго рода уравнения (2.3) с начальными данными $h_c^\alpha \in T \times A^\alpha$. Оценка (2.4) показывает, что условия (1.7) и (1.8) выполняются, следовательно, система процессов S_c^α и вектор-функция $V^\alpha = (v^\alpha, 1, 1, v^\alpha)$ являются системой сравнения и вектор-функцией сравнения для системы процессов S. Кроме того, примем (см. (1.2), (1.5))

$$(2.6) \qquad P \subset T \times E,\ (\forall t \in T)\, P^t \cap G_1^{1t} \neq \varnothing,\ P_f \subset T \times E,$$
$$(\forall t \in T)\, P_f^t \cap G_1^{2t} \neq \varnothing$$
$$P^\circ \subset T^\circ \times E \times F,\ (\forall t_0 \in T^\circ)\, \mathrm{pr}_2 P^\circ \subseteq G_1^{\alpha t_0},\ P^* = P^\circ \cap \Omega^\circ$$
$$(\forall t_0 \in T^\circ)\, P_{t_0}^* \neq \varnothing,\quad (\forall t_0 \in T^\circ)(\forall h_{t_0} \in P_{t_0}^*)(\forall x(\cdot, h))$$
$$T_{t_0}(x, h) = [t_0, \tau)$$
$$P_c^1 \subset T \times R^{k_1},\quad R_{fc}^2 \subset T \times R^{k_2},\quad P_c^{0\alpha} \subset T^\circ \times R^{k\alpha}$$
$$(\forall t_0 \in T^\circ)\, P_{ct_0}^{*\alpha} = P_{ct_0}^{0\alpha} \cap A^\alpha \neq \varnothing$$
$$(\forall h_{t_0c}^\alpha \in P_{ct_0}^{*\alpha})(\forall x_c^\alpha(\cdot, h_c^\alpha))\, T_{t_0\alpha_c}^\alpha(x_c^\alpha, h_c^\alpha) = [t_0, \tau)$$

Здесь $P, P_f, P^\circ, P_c^1, P_{fc}^2, P_c^{\circ\alpha}$ — некоторые фиксированные множества соответствующих пространств. Положим

$$(2.7) \qquad (\forall t_0 \in T^\circ)\ a(t_0) = a_c^\alpha(t_0),\ a_\mu(t_0) = a_{\mu c}^\alpha(t_0)$$

Условия (1.13), (1.15) с учетом (2.5) — (2.7) принимают вид (условия (1.14) в силу (2.6), (2.7) выполняются тривиально)

$$(2.8) \qquad C_{h_0 i^\circ}^\alpha(x_{0c}^\alpha = v^\alpha(h)) \equiv \{\forall t_0 \in T^\circ)(\forall h_{t_0} =$$
$$= (x_0, z) \in P_{t_0}^*)\, v^\alpha(t_0, h_{t_0}) \in P_{ct_0}^{*\alpha}\}$$

$$(2.9) \qquad C_{x*i^\circ}^1 X_*^1 \equiv \{(\forall t_0 \in T^\circ)(\forall z \in F)(\forall t \in [t_0, \tau))$$
$$(\forall x \in \bar{G}_1^{1t} \setminus P^t)(\forall x_c^1 \in P_c^{1t})\, v^1(t, x, z) \nleqslant x_c^1\}$$
$$C_{x*i^\circ}^2 X_*^2 \equiv \{\forall t_0 \in T^\circ)(\forall z \in F)(\forall t \in [t_0, \tau) \cap (\bigcup_{\Delta \in a(t_0)} \Delta))$$

$$(\forall x \in \bar{G}_1^{2t} \setminus P_f^t)\ (\forall x_c^2 \in P_{fc}^{2t})\ v^2(t, x, z) \nleqslant x_c^2\}\ (i = 1, 2)$$
$$C^2_{x^*3^\circ}\ X_*^2 = \{\ (\forall t_0 \in T^0)\ \ (\forall z \in F)\ \ (\forall t \in [t_0,\ \tau))$$
$$(\forall x \in \bar{G}_1^{2t} \setminus P_f^t)\ (\forall x_c^2 \in P^{2t}{}_{fc})\ v^2(t, x, z) \nleqslant x_c^2\}$$

Теорема сравнения 2. Пусть удовлетворяются указанные выше предположения относительно дифференциальных систем (2.1), (2.3) и функций v^α $(\alpha = 1, 2)$, а также условия (2.6), (2.7). Тогда

$$\bigwedge_{\alpha=1}^{2} [C^\alpha_{h_0 i^\circ}(x_{0c}{}^\alpha = v^\alpha(h)) \wedge C^\alpha_{x^* i^\circ} X_*{}^\alpha) \vdash \mathrm{P}_{i^\circ c} \Rightarrow \mathrm{P}_{i^\circ}$$

Здесь формулы $C^\alpha_{k_0 i^\circ}(x_{0c}{}^\alpha = v^\alpha(h))$, $C^\alpha_{x^* i^\circ}\ X_*{}^\alpha$ задаются соответственно соотношениями (2.8), (2.9). Аналогичные результаты можно получить для функциональных и разностных уравнений в E.

Теорема сравнения 2 следует из теоремы 1.

Иногда в приложениях можно найти общее решение системы сравнения (2.3) или получить достаточно точные его оценки. В этом случае условия теоремы сравнения 2 уточняются. Примем для формул $C^{*\alpha}_{xi^\circ}\ X_*{}^\alpha$ вместо (1.11) следующие выражения, содержащие верхние решения $x^{*\alpha}(\cdot, h_c{}^\alpha)$ системы сравнения (2.3) $(T_{i^\circ}{}^* \subseteq [t_0, \tau)\ i = 1, 2, 3)$:

$$C^{*1}_{xi^\circ} X_*{}^1 \equiv \{(\forall t \in [t_0, \tau))(\forall x \in \bar{G}_1{}^{1t} \setminus P^t)$$
$$(\forall x_c{}^1 = x_c{}^{*1}(t, t_0, v^1(t_0, x_0, z)) \in P_c{}^{1t})\, v^1(t, x, z) \nleqslant x_c{}^1\} \quad \{i = 1, 2, 3) \tag{2.10}$$
$$C^{*2}_{xi^\circ} X_*{}^2 \equiv \{(\forall t \in T_{i^\circ}{}^*)(\forall x \in \bar{G}_1{}^{2t} \setminus P_f{}^t)(\forall x_c{}^2 =$$
$$= x_c^{*2}(t, t_0 v^2(t_0, x_0, z)) \in P_{fc}{}^{2t})\, v^2(t, x, z) \nleqslant x_c{}^2\} \quad (i = 1, 2)$$
$$C^{*2}_{x3^\circ} X_*{}^2 \equiv \{(\forall t \in T_{3^\circ}{}^*)(\forall x \in \bar{G}_1{}^{2t} \setminus P_f{}^t)$$
$$(\forall x_c{}^2 = x_c^{*2}(t, t_0, v^2(t_0, x_0, z)) \in P_{fc}{}^{2t})(v^2(t, x, z) \nleqslant x_c{}^2\}$$

На основе процедуры вывода теорем сравнения [10] вместо условий (2.9) получим

$$C^\alpha_{x^* i^\circ} X_*{}^\alpha \equiv \{(\forall t_0 \in T^\circ)(\forall z \in F)\, C^{*\alpha}_{xi^\circ} X_*{}^\alpha\}$$

где $C^{*\alpha}_{xi^\circ}\ X_*{}^\alpha$ представляются выражениями (2.10).

Из теоремы 1 работы [14] о дифференциальном неравенстве для обобщенных решений второго рода системы (2.3) имеем

$$(\forall t_0 \in T^\circ)(\forall x_{c_0}{}^\alpha \in A^\alpha : x_{c_0}{}^\alpha \leqslant x_{c_0}^{\alpha *} \in A^\alpha)(\forall x_c{}^\alpha(\cdot, t_0, x_{c_0}{}^\alpha))$$
$$(\forall t \in [t_0, \tau))\, x_c{}^\alpha(t, t_0, x_{c_0}{}^\alpha) \leqslant x_c^{*\alpha}(t, t_0, x_{c_0}^{\alpha *})$$

Следовательно, если существует вектор $M^\alpha(t_0) \in A^\alpha$, удовлетворяющий условию

$$(\forall h = (t_0, h_{t_0}) \in (\Omega^\circ \cap (G_1{}^\alpha \times F)))\ v^\alpha(h) \leqslant M^\alpha(t_0) \tag{2.11}$$

то верхнее решение $x_c{}^{*\alpha}(\cdot, t_0, M^\alpha(t_0))$ системы сравнения (2.3) будет мажорировать все другие решения с начальными данными $x_{co}^d = v^\alpha(h)$, $h \in \Omega^\circ \cap G_1{}^\alpha \times F$. Заметим, что если существует

$$M_*{}^\alpha(t_0) = \sup v^\alpha(t_0, h_{t_0}) \quad h_{t_0} \in (\Omega^\circ \cap (G_1{}^\alpha \times F))_{t_0}$$

то можно положить $M^\alpha(t_0) = M_*{}^\alpha(t_0)$.

Пусть существуют векторы $m^\alpha(t) \in R^{k_\alpha}$, такие, что

$$(2.12)\qquad \begin{gathered}(\forall t \in T)\,(\forall x \in \bar{G}_1^{1t} \setminus P^t)\,(\forall z \in F)\; v^1(t, x, z) \geqslant m^1(t)\\ (\forall t \in T)\,(\forall x \in \bar{G}_1^{2t} \setminus P_f^t)\,(\forall z \in F)\; v^2(t, x, z) \geqslant m^2(t)\end{gathered}$$

Если существуют

$$\begin{gathered}m_*^1(t) = \inf v^1(t, x, z),\; x \in \bar{G}_1^{1t} \in P^t,\; z \in F\\ m_*^2(t) = \inf v^2(t, x, z),\; x \in \bar{G}_1^{2t} \in P_f^t,\; z \in F\end{gathered}$$

то для точности оценок целесообразно принять $m^\alpha(t) = m_*^\alpha(t)$.

Множества P_c^1, P_{fc}^2, $P_c^{\circ\alpha}$ $(\alpha = 1, 2)$ определяются следующим образом:

$$(2.13)\qquad \begin{gathered}(\forall t_0 \in T^\circ)\; P_{ct_0}^{\circ\alpha} = v^\alpha(t_0,\; P_{t_0}^*)\\ (\forall t_0 \in T^\circ)\,(\forall t \in [t_0, \tau))\, P_c^{1t} = \{x_c^1 \in R^{k_1} : x_c^1 \leqslant x_c^{*1}(t, t_0, M^1(t_0))\}\\ (\forall t_0 \in T^\circ)\,(\forall t \in [t_0, \tau))\, P_{fc}^{2t} = \{x_c^2 \in R^{k_2} : x_c^2 \leqslant x_c^{*2}(t, t_0\, M^2(t_0))\}\end{gathered}$$

Тогда выполняются динамические свойства сравнения $P_{i^\circ c}$ и условие (2.8). С учетом (2.10) — (2.12) аналогично [10] получим из (1.6) следующий признак существования свойств P_{i° в системе (2.1).

Теорема 3. Пусть удовлетворяются предположения относительно дифференциальных систем (2.1), (2.3) и функций v^α, условия (2.6), (2.7), (2.13) и существуют векторы $M^\alpha(t_0) \in A^\alpha$, $m^\alpha(t) \in R^{k_\alpha}$, для которых справедливы соотношения (2.11) и (2.12). Если

$$(2.14)\qquad \begin{gathered}(\forall t_0 \in T^\circ)(\forall t \in [t_0, \tau))\quad m^1(t) \not\leqslant x_c^{*1}(t, t_0, M^1(t_0))\\ (\forall t_0 \in T^\circ)(\forall t \in (\bigcup_{\Delta \in a(t_0)} \Delta)\quad m^2(t) \not\leqslant x_c^{*2}(t, t_0, M^2(t_0))\end{gathered}$$

то в системе (2.1) имеет место динамическое свойство P_{1°. Если выполняется первое условие в (2.14), а также

$$(2.15)\qquad (\forall t_0 \in T^\circ)\,(\exists \Delta \in a(t_0))\,(\forall t \in \Delta),\; m^2(t) \not\leqslant x_c^{*2}(t, t_0, M^2(t_0))$$

то в системе (2.1) имеет место свойство P_{2°. Если же выполняется первое условие в (2.14), а также

$$(2.16)\qquad (\forall t_0 \in T^\circ)(\exists a_\mu(t_0))(\forall t \in (\bigcup_{\Delta \in a_\mu(t_0)} \Delta))\; m^2(t) \not\leqslant x_c^{*2}(t, t_0, M^2_k(t_0))$$

то для системы (2.1) справедливо свойство P_{3°.

Наиболее простые достаточные условия существования в системе (2.1) свойства P_{i° получаются из теоремы 3 при g^α, не зависящей от x_c^α, так как в этом случае обобщенные решения (2.3) совпадают с классическими и определяются квадратурой

$$x_c^\alpha(t) = x_{c_0}^\alpha + \int_{t_0}^{t} g^\alpha(s)\,ds$$

Следовательно, справедливо следующее:

Следствие 1. Пусть удовлетворяются предположения относительно дифференциальных систем (2.1), (2.3) и функций v^α с $g^\alpha(t, x_c^\alpha) = g^\alpha(t)$, условия (2.6), (2.7), (2.13) и существуют векторы $M^\alpha(t_0) \in A^\alpha$, $m^\alpha(t) \in$

$\in R^{k_\alpha}$, для которых выполняются соотношения (2.11), (2.12). Если

$$(2.17)\qquad (\forall t_0\in T^\circ)(\forall t\in[t_0,\tau))\quad m^1(t)\nleqslant M^1(t_0)+\int_{t_0}^{t}g^1(s)\,ds$$

$$(\forall t_0\in T^\circ)(\forall t\in(\bigcup_{\Delta\in a(t_0)}\Delta))\ m^2(t)\nleqslant M^2(t_0)+\int_{t_0}^{t}g^2(s)\,ds$$

то в системе (2.1) имеет место свойство $P_1{}^\circ$. Если выполняется первое условие в (2.17), а также

$$(2.18)\qquad (\forall t_0\in T^\circ)(\exists\Delta\in a(t_0))(\forall t\in\Delta)\,m^2(t)\nleqslant M^2(t_0)+\int_{t_0}^{t}g^2(s)\,ds$$

то для системы (2.1) выполняется свойство $P_2{}^\circ$. Если же выполняется первое условие в (2.17), а также

$$(\forall t_0\in T^\circ)(\exists a_\mu(t_0))(\forall t\in(\bigcup_{\Delta\in a_\mu(t_0)}\Delta))\ m^2(t)\nleqslant M^2(t_0)+\int_{t_0}^{t}g^2(s)\,ds$$

то для системы (2.1) справедливо свойство $P_3{}^\circ$.

Из теорем 2 и 3 на основе предложения п. 1 непосредственно следуют аналогичные теоремы для свойств, редуцируемых из рассматриваемых свойств $P_i{}^\circ$, охватывающих известные результаты [5]. Так, например, для изучаемых систем процессов S, $S_c{}^\alpha$ при $v^1(t,x,z)\equiv v^2(t,x,z)$, $g^1(t,x_c{}^1)\equiv g^2(t,x_c{}^2)$ и свойства $P_1\bullet$ с $P=P_f$, $a(t_0)=\{\Delta\}$, $\Delta=[t_0,\tau)$, которое сводится при этом к равномерной тотальной устойчивости относительно изменяющихся во времени множеств [5], из теоремы 3 получается следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть выполнены предположения относительно дифференциальных систем (2.1), (2.3) и функций v^α, условия (2.6), (2.7), (2.13) и

$$M^1(t_0)=\{\sup v_1{}^1(t_0,h_{t_0}),\ldots,\sup v_{k_1}{}^1(t_0,h_{t_0})\}\in A^1$$
$$h_{t_0}\in(\Omega^0\cap(G_1{}^1\times F))_{t_0}$$
$$m^1(t)=\{\inf v_1{}^1(t,x,z),\ldots\inf v_{k_1}{}^1(t,x,z)\}\in R^{k_1}$$
$$x\in\bar G_1{}^{1t}\setminus P^t,\quad z\in F$$

Если $(\forall t_0\in T^\circ)(\forall t\in[t_0,\tau))\,m^1(t)\nleqslant x_c{}^{*1}(t,t_0,M^1(t_0))$, то в системе (2.1) имеет место равномерная тотальная устойчивость относительно изменяющихся во времени множеств.

Пример. Пусть для системы (2.1) при $E=R^n$ существуют вектор-функции v^α: $T\times R^n\to R^{k_\alpha}$, компоненты которых являются неотрицательными квадратичными формами, т. е.

$$v_i{}^\alpha(t,x)=x^TB_i{}^\alpha(t)\,x,\qquad i=1,\ldots,k_\alpha$$

Здесь $B_i{}^\alpha(t)$ — дифференцируемая по t матрица размерности $n\times n$. Пусть производная по времени от каждой квадратичной формы $v_i{}^\alpha$ в силу системы (2.1) допускает оценку

$$\dot v_i^\alpha(t,x)\leqslant\sum_{j=1}^{k_\alpha}g_{ij}^\alpha v^\alpha{}_j(t,x);\quad i\neq j,\quad g^\alpha{}_{ij}=\mathrm{const}\geqslant0$$

Система сравнения (2.3) представляется теперь уравнением

$$a_c^{\alpha \cdot} = G^\alpha x_c^\alpha, \quad G^\alpha = (g_{ij}^\alpha) \quad (\alpha = 1, 2)$$

решение которого, проходящее через точку $x_{c_0}^\alpha$ в момент времени $t \geqslant 0$, имеет вид

$$x_c^\alpha(t, t_0, x_{c_0}^\alpha) = \exp(G^\alpha(t - t_0))\, x_{c_0}^\alpha$$

Пусть заданы множества

$$P = \{(t, x) : t \in R_0^1, \ \|x\|^2 < \eta(t)\}, \quad P_f = \{(t, x) \colon t \in R_0^1 \ \|x\|^2 \leqslant \beta(t)\}$$
$$P^* = P^0 = \{(t_0, x) \colon t_0 \in R_0^1, \ \|x\|^2 < \gamma(t)\}, \quad \|x\|^2 = x^T x$$

Здесь $\eta(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ — непрерывные функции времени, такие, что $(\forall t \in R_0^1)\cdot$ $\cdot\eta(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t) > 0$ и $\eta(t) > \gamma(t)$. Тогда векторы $M^\alpha(t_0)$, $m^\alpha(t)$ (см. (2.11), (2.12)) определяются следующим образом:

$$M^\alpha(t_0) = \Lambda^\alpha(t_0)\,\gamma(t_0), \quad m^1(t) = \lambda^1(t)\,\eta(t), \quad m^2(t) = \lambda^2(t)\,\beta(t)$$
$$\Lambda^\alpha(t_0) = [\Lambda^\alpha_1(t_0), \ldots, \Lambda^\alpha_{k_\alpha}(t_0)]^T, \quad \lambda^\alpha(t) = [\lambda_1^\alpha(t), \ldots, \lambda^\alpha_{k_\alpha}(t)]^T$$

Здесь $\Lambda_i^\alpha(t)$, $\lambda_i^\alpha(t)$ — соответственно наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы $B_i^\alpha(t)$. Если $T = T^\circ = R_0^1$ и выполнены условия

$$(\forall (t - t_0) \geqslant 0) \quad \lambda^1(t)\,\eta(t) \nleqslant \exp[G^1(t - t_0)]\,\Lambda^1(t_0)\,\gamma(t_0)$$
$$(\forall t_0 \geqslant 0)(\exists a_\mu(t_0))(\forall t \in (\bigcup_{\Delta \in a_\mu(t_0)} \Delta)), \quad \lambda^2(t)\,\beta(t) \nleqslant$$
$$\nleqslant \exp[G^2(t - t_0)]\,\Lambda^2(t_0)\,\gamma(t_0)$$

то система (2.1) обладает свойством P_{3°.

Поступила 17. VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* О некоторых вопросах, относящихся к задаче об устойчивости неустановившихся движений. ПММ, 1960, т. 24, вып. 1.
2. *Каменков Г. В.* Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, 1953, т. 17, вып. 5.
3. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М., «Мир», 1964.
4. *Weiss L., Infante E. F.* Finite time stability under perturbing forces and on product spaces. IEEE Trans. Automat. Control., 1967, vol. 12, No. 1.
5. *Michel A. N.* Quantative analysis of simple and interconnected system: stability, boundedness, and trajectory behaviour. IEEE Trans. Circuit Theory, 1970, vol. 17, No. 3.
6. *Grujic L. T.* Non-Lyapunov stability analysis of large-scale systems on time-varying sets. Internat. J. Control., 1975, vol. 21, No. 3.
7. *Grippo L., Lampariello F.* Practical stability of discrete-time systems. J. Franklin Inst., 1976, vol. 302, No. 3.
8. *Абгарян К. А.* Устойчивость движения на конечном интервале. Итоги науки и техники. Общая механика, т. 3. М. ВИНИТИ, 1976.
9. *Матросов В. М.* Метод сравнения в динамике систем. I. Дифференциальные уравнения, 1974, т. 10, № 9; II. Дифференциальные уравнения, 1975, т. 11, № 3.
10. *Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н.* Принцип сравнения в математической теории систем. Новосибирск, «Наука», 1979.
11. *Якубович В. А.* Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной нестационарной нелинейностью. Сиб. матем. ж., 1973, т. 14, № 5.
12. *Бусленко Н. П., Калашников В. В., Коваленко И. Н.* Лекции по теории сложных систем. М., «Сов. радио», 1973.
13. *Алексеев В. М.* Теорема об интегральном неравенстве и некоторые ее приложения. Матем. сб., 1965, т. 68, № 2.
14. *Козлов Р. И.* К теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Дифференциальные уравнения, 1974, т. 10, № 7.
15. *Матросов В. М.* О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями. 1. Дифференциальные уравнения, 1967, т. 3, № 3.