Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.36

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

А. С. Андреев

(Ташкент)

Ряд известных теорем об асимптотической устойчивости и неустойчивости при наличии одной функции Ляпунова со знакопостоянной производной обобщаются на неавтономные системы. Находятся условия асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия голономной механической системы с переменными массами под действием потенциальных, гироскопических и диссипативных сил, зависящих от времени.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x_i^{\bullet} = X_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1.1}$$
$$X_i(t, 0, 0, \ldots, 0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

правые части которых определены в области $G\{t \geqslant 0, \|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2} \leqslant H\}$, ограничены в этой области, $\|X(t, x)\| \leqslant Q = \mathrm{const}$ для всех $(t, x) \in G$ и удовлетворяют условию Липшица

$$\|X(t_2, x^{(2)}) - X(t_1, x^{(1)})\| \leqslant L_1(|t_2 - t_1|) + L_2(\|x_2 - x_1\|) \tag{1.2}$$
$$\forall\, t_2, t_1 \in [0, +\infty), \quad |t_2 - t_1| \leqslant T = \mathrm{const}; \qquad x_2, x_1 \in \Gamma\{\|x\| \leqslant H\}$$

Для произвольной последовательности натуральных чисел $n_r \to +\infty$ составим последовательность функций $X^{(r)}(\tau, x) = X((n_r - 1)T + \tau, x)$, определенных в области $G_1\{0 \leqslant \tau \leqslant T, \|x\| \leqslant H\}$. Имеем

$$\|X^{(r)}(\tau, x)\| \leqslant Q, \quad \|X^{(r)}(\tau_2, x_2) - X^{(r)}(\tau_1, x_1)\| = \tag{1.3}$$
$$= \|X((n_r - 1)T + \tau_2, x_2) - X((n_r - 1)T + \tau_1, x_1)\| \leqslant$$
$$\leqslant L_1(\|\tau_2 - \tau_1\|) + L_2(\|x_2 - x_1\|)$$

так что последовательность функций $X^{(r)}(\tau, x)$ равномерно ограничена, равностепенно непрерывна на G_1. Следовательно, согласно теореме Арцела [1], существует подпоследовательность $n_{rs} \to +\infty$, такая, что $X^{(r_s)}(\tau, x)$ сходится равномерно на G_1 к некоторой функции $\varphi(\tau, x)$. Из непрерывности $X^{(r)}(\tau, x)$ следует непрерывность $\varphi(\tau, x)$, из (1.3) получаем, что $\varphi(\tau, x)$ удовлетворяет в области G_1 условию Липшица.

В дальнейшем функцию $\varphi(t, x)$ будем называть предельной к $X(t, x)$, множество всех предельных функций обозначим через $N\{\varphi\}$.

Рассмотрим систему

$$x_i^{\bullet} = \varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.4}$$

для которой, как следует из приведенного выше, условия существования и единственности решений в G_1 выполнены.

Замечание 1.1. По построению системы (1.4) ее решения определены в конечном интервале времени $[0, T]$, где число T задается неравенством (1.2), т. е. свойствами исходной системы (1.1).

Лемма 1.1. Для любого решения системы (1.1) $x = x(t, t_0, x_0)$, $t \geqslant t_0$, $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$, ограниченного областью $\Gamma\{\|x\| \leqslant H\}$ при всех $t \geqslant t_0$, существует последовательность отрезков этого решения $x^{(r)}(t) = x((n_r - 1)T + t, t_0, x_0)$, $(n_1 - 1)T \geqslant t_0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, сходящаяся равномерно к функции $x^*(t)$, которая является решением системы (1.4) с наперед заданной предельной функцией $\varphi = \varphi_0(t, x)$, $\varphi_0 \in N\{\varphi\}$.

Доказательство. По определению φ_0 существует $n_r \to +\infty$, такое, что $X((n_r - 1)T + t, x) = X^{(r)}(t, x)$ сходится равномерно к $\varphi_0(t, x)$ на G_1. Рассмотрим последовательность отрезков решения

$$x = x(t, t_0, x_0) - x^{(r)}(t) = x((n_r - 1)T + t, t_0, x_0), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

с номера N_0, $(N_0 - 1)T \geqslant t_0$. Эта последовательность равномерно ограничена в силу ограниченности рассматриваемого решения, равностепенно непрерывна в силу ограниченности производной $dx(t, t_0, x_0)/dt$. Следовательно, из последовательности $x^{(r)}(t)$ можно выбрать подпоследовательность $x^{(s)}(t)$, сходящуюся равномерно к некоторой функции $x^*(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. При этом имеем

$$x((n_s - 1)T + t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{(n_s-1)T+t} X(\tau, x(\tau, t_0, x_0))\,d\tau =$$

$$= x((n_s - 1)T, t_0, x_0) + \int_{(n_s-1)T}^{(n_s-1)T+t} X(\tau, x(\tau, t_0, x_0))\,d\tau =$$

$$= x^{(s)}(0) + \int_0^t X((n_s - 1)T + \tau, x((n_s - 1)T + \tau, t_0, x_0))\,d\tau =$$

$$= x^{(s)}(0) + \int_0^t [X^{(s)}(\tau, x^{(s)}(\tau)) - \varphi_0(\tau, x^{(s)}(\tau))]\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t [\varphi_0(\tau, x^{(s)}(\tau)) - \varphi_0(\tau, x^*(\tau))]\,d\tau + \int_0^t \varphi_0(\tau, x^*(\tau))\,d\tau$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n_s \to +\infty$ и учитывая равномерную сходимость $X^{(s)}(t, x)$ к $\varphi_0(t, x)$, а также равномерную непрерывность $\varphi_0(t, x)$, получим

$$x^*(t) = x^*_0 + \int_0^t \varphi_0(\tau, x^*(\tau))\,d\tau \quad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

Лемма доказана.

Введение систем (1.4) и лемма 1.1 позволяют установить асимптотическую устойчивость и неустойчивость нулевого решения системы (1.1) при наличии одной функции Ляпунова со знакопостоянной производной.

Определение 1.1. Множество $M\{x : W(x) = 0\}$ не содержит целых решений системы (1.4), если не существует ее решений $x = x(t, x_0)$, определенных на всем конечном интервале $[0, T]$ и таких, что $x(t, x_0) \in M$ для всех $0 \leqslant t \leqslant T$.

Теорема 2.1. Пусть система (1.1) такова, что:

1) в области G существует определенно-положительная, допускающая бесконечно малый высший предел функция $V(t, x)$, $V_1(\|x\|) \leqslant V(t, x) \leqslant V_2(\|x\|)$, полная производная которой в силу (1.1) $V^{\cdot}(t, x) \leqslant W(x) \leqslant 0$;

2) существует предельная функция $\varphi_0 \in N\{\varphi\}$, такая, что множество $M\{x : W(x) = 0\}$ не содержит целых решений системы (1.4), соответствующей этой функции, кроме решения $x(t, 0) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$.▌

Тогда нулевое решение (1.1) асимптотически устойчиво равномерно по начальным координатам из области

$$\Gamma_0 \{\|x\| \leqslant H_0,\ H_0 < H_1 < H,\ V_2(H_0) < V_1(H_1)\}$$

Доказательство. Из условия 1) теоремы следует устойчивость $x = 0$ равномерно по t_0 [2].

Действительно, для решения (1.1) $x = x(t, t_0, x_0)$, $t_0 \geqslant 0$, $x_0 \in \Gamma_0$, в силу $V^{\cdot} \leqslant 0$ имеем

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant H_1, \quad \forall t \geqslant t_0$$
$$\lim_{t\to+\infty} V(t, x(t, t_0, x_0)) = V^* = \mathrm{const} \geqslant 0$$

Допустим, что для некоторого такого решения $V^* \neq 0$. Выберем η, $0 < \eta < V_2^{-1}(V^*)$. Тогда для этого решения

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \geqslant \eta, \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{2.1}$$

Пусть $\varphi_0(t, x)$ — функция, удовлетворяющая условию 2) теоремы. По лемме 1.1 построим последовательность отрезков $x^{(r)}(t) = x((n_r - 1)T + t, t_0, x_0)$, сходящуюся к решению $x = x^*(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ системы (1.4) с функцией $\varphi = \varphi_0(t, x)$. В силу (2.1) $x^*(t) \neq 0$ для всех $0 \leqslant t \leqslant T$.

Для последовательности $x^{(r)}(t)$ имеем оценки

$$V(n_rT, x(n_rT, t_0, x_0)) - V((n_r - 1)T, x((n_r - 1)T, t_0, x_0)) = \int\limits_{(n_r-1)T}^{n_rT} V^{\cdot} dt \leqslant -\int\limits_{(n_r-1)T}^{n_rT} W(x(t, t_0, x_0))\, dt \leqslant -\int\limits_0^T W(x^{(r)}(t))\, dt \leqslant 0 \tag{2.2}$$

Устремляя $n_r \to +\infty$, получаем

$$0 = V^* - V^* = -\int\limits_0^T W(x^*(t))\, dt \leqslant 0$$

Отсюда следует, что $W(x^*(t)) = 0$ при всех $0 \leqslant t \leqslant T$, что противоречит условию 2) теоремы.▌

Итак, $V^* = 0$. Следовательно, из определенной положительности $V(t, x)$ следует выполнение соотношения $\lim_{t\to+\infty} x(t, t_0, x_0) = 0$ для всех $t_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in \Gamma_0$. Из равномерной по t_0 устойчивости и компактности Γ_0 следует [2], что указанное свойство будет выполняться равномерно по $x_0 \in \Gamma_0$. Это следует также и из условий $V^* = 0$ [3].

Теорема 2.2. Пусть система (1.1) такова, что:

1) в области G существует допускающая бесконечно малый высший предел функция $V(t, x)$, $|V(t, x)| \leqslant V_2(\|x\|)$, имеющая в любой малой окрестности $x = 0$ положительные значения, полная производная которой в силу (1.1) $V^{\cdot}(t, x) \geqslant W(x) \geqslant 0$;

2) существует предельная функция $\varphi = \varphi_0(t, x) \in N\{\varphi\}$, такая, что множество $M\{x : W(x) = 0\}$ не содержит целых решений системы (1.4), соответствующей этой функции, кроме $x = x(t, 0)$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Тогда нулевое решение неустойчиво.

Доказательство. Для $t_0 \geqslant 0$ и любого малого $\delta > 0$ выберем x_0, $\|x_0\| \leqslant \delta$, так что $V(t_0, x_0) = V_0 > 0$. Предположим, что решение $x = x(t, t_0, x_0)$ ограничено, $\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant H_1 < H$ для всех $t \geqslant t_0$. Тогда в силу ограниченности V существует $\lim_{t\to+\infty} V(t, x(t, t_0, x_0)) = V^*$. Из $V^{\cdot} \geqslant 0$ имеем

$$\|(x(t, t_0, x_0)\| \geqslant \eta, \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{2.3}$$

где η таково, что $V_2(\eta) < V_0$.

Пусть $\varphi = \varphi_0(t, x)$ — функция, удовлетворяющая условию 2) теоремы. По лемме 1.1 можно построить последовательность отрезков $x^{(r)}(t)$ рассматриваемого решения, сходящуюся к решению $x = x^*(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ системы (1.4) с функцией $\varphi = \varphi_0(t, x)$. В силу (2.3) $x^*(t) \neq 0$ для всех $0 \leqslant t \leqslant T$.

Аналогично (2.2) имеем соотношения

$$V(n_rT, x(n_rT, t_0, x_0)) - V((n_r-1)T, x((n_r-1)T, t_0, x_0)) \geqslant$$
$$\geqslant \int_0^T W(x^{(r)}(t))\,dt \geqslant 0$$

Устремляя $n_r \to +\infty$, получим равенство

$$0 = V^* - V^* = \int_0^T W(x^*(t))\,dt \geqslant 0 \tag{2.4}$$

или $W(x^*(t)) = 0$, что противоречит условию 2) теоремы.

Замечание 2.1. В условиях теорем со знакопостоянной производной из [4, 5] можно указать конечное число $T > 0$, такое, что множество $M\{x : V^{\cdot}(x) = 0\}$ не содержит решений

$$x(t, x_0),\ x(0, x_0) = x_0,\ x_0 \in \{x : 0 < \eta \leqslant \|x\| \leqslant H_1\}$$

на всем интервале $[0, T]$. Отсюда, учитывая, что в случае автономности системы (1.1), система (1.4) совпадает с (1.1), а число T в теоремах 2.1 и 2.2 может быть произвольным, можно показать, что методы, применяемые для доказательства теорем 2.1 и 2.2, применимы и для доказательства теорем из [4, 5].

Исходя из этого замечания, можно сказать, что теоремы 2.1 и 2.2 являются обобщением теорем об асимптотической устойчивости и неустойчивости со знакопостоянной производной из [4, 5].

Замечание 2.2. Пример работы [6], показывающий невозможность непосредственного обобщения теорем из [4,5], не удовлетворяет условиям теоремы 2.1.

Пример 2.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$x_1^{\cdot} = g_{11}(t)x_1 + g_{12}(t)x_2,\quad x_2^{\cdot} = -g_{12}(t)x_1 + g_{22}(t)x_2 \tag{2.5}$$

Предположим, что коэффициенты $g_{ij}(t)$ ограничены, удовлетворяют условию Липшица $|g_{ij}(t_2) - g_{ij}(t_1)| \leqslant L_1(|t_2 - t_1|)$, $g_{12}(t) \neq 0$ на бесконечной системе интервалов $[t_{1k}, t_{2k}]$, $t_{2k} - t_{1k} \geqslant T > 0$, $t_{1k} \to +\infty$ при $n_k \to +\infty$, $T = \mathrm{const}$.

Тогда с системой (2.5) может быть сопоставлена система

$$x_1^{\cdot} = g_{11}^*(t)\, x_1 + g_{12}^*(t)\, x_2, \quad x_2^{\cdot} = -g_{12}^*(t)\, x_1 + g_{22}^*(t)\, x_2 \tag{2.6}$$

коэффициенты которой $g_{ij}^*(t)$ — предельные для $g_{ij}(t)$, при этом $g_{12}^*(t) \neq 0$ для всех $0 \leqslant t \leqslant T$.

Для производной от функции $V = x_1^2 + x_2^2$ в силу (2.5) имеем $V^{\cdot} \leqslant -hx_1^2$, если $g_{11}(t) \leqslant -h = \mathrm{const} < 0$, $g_{22}(t) \leqslant 0$ (случай 1)); $V^{\cdot} \geqslant hx_1^2$, если $g_{11}(t) \geqslant h = \mathrm{const} > 0$, $g_{22}(t) \geqslant 0$ (случай 2)).

Но в силу условия $g_{12}^*(t) \neq 0$ множество $M\{W(x) = \pm hx_1^2 = 0 : x_1 = 0\}$ не содержит решений системы (2.6), кроме $x_1 = x_2 = 0$. Следовательно, из теорем 2.1 и 2.2 получаем, что нулевое решение (2.5) в случае 1) асимптотически устойчиво, в случае 2) неустойчиво, что слабее условий, требуемых в известном примере Четаева [7].

3. Рассмотрим вопрос об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения (1.1) по части переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(m \leqslant n)$. Для этого обозначим

$$y_i = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \quad z_j = x_{m+j} \quad (j = 1, 2, \ldots, p,$$
$$p = n - m)$$
$$\|y\| = (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2)^{1/2}, \quad \|z\| = (z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_p^2)^{1/2}$$

Теорема 3.1. Предположим, что система (1.1) такова, что:

1) ее решения $x = x(t, t_0, x_0)$, $t_0 \geqslant 0$, $\|x_0\| \leqslant H_2$, равномерно L-ограничены по z, т. е. для этих решений $\|z(t, t_0, x_0)\| \leqslant L$ при всех $t \geqslant t_0$, для которых $\|y(t, t_0, x_0)\| \leqslant A$, $A^2 + L^2 \leqslant H_1^2$, $H_2 < H_1 < H$;

2) в области G существует y-определенно-положительная функция $V(t, x)$, $V(t, x) \geqslant V_1(\|y\|)$, такая, что $V(t, x) \leqslant V_2(x)$, $V^{\cdot}(t, x) \leqslant -W(x)$; $V_2(x)$, $W(x)$ — некоторые знакопостоянные функции;

3) существует предельная функция $\varphi = \varphi_0(t, x) \in N\{\varphi\}$, такая, что множество $M\{x : W(x) = 0\} \cap K\{x : V_2(x) > 0\}$ не содержит целых решений системы (1.4), соответствующей этой функции.

Тогда нулевое решение (1.1) y-асимптотически устойчиво равномерно по x_0 из области Γ_0 $\{\|x\| \leqslant H_0 < H_2, \sup(V_2(x)$ при $x \in \Gamma_0) < V_1(A)\}$.

Доказательство. Из условий 1) и 2) теоремы следует y-устойчивость нулевого решения (1.1), равномерная по t_0 [8]. При этом для любого решения $x = x(t, t_0, x_0)$, $t_0 \geqslant 0$, $x_0 \in \Gamma_0$ в силу $V^{\cdot} \leqslant 0$ имеем $\|y(t, t_0, x_0)\| \leqslant A$ для всех $t \geqslant t_0$, $\lim_{t\to+\infty} V(t, x(t, t_0, x_0)) = V^* \geqslant 0$.

Таким образом, решения (1.1) из Γ_0 ограничены областью Γ_1 $\{\|y\| \leqslant A,\ \|z\| \leqslant L\}$.

Предположим, что для некоторого решения $x = x(t, t_0, x_0)$, $x_0 \in \Gamma_0$, $V^* \neq 0$. Тогда для всех $t \geqslant t_0$ имеем $V(t, x(t, t_0, x_0)) \geqslant V^*$, а значит, $V_2(x(t, t_0, x_0)) \geqslant V^* \geqslant 0$. Следовательно

$$x(t, t_0, x_0) \in K_1\{x \in \Gamma_1 : V_2(x) \geqslant V^*\}, \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{3.1}$$

Пусть $\varphi_0(t, x)$ — функция, удовлетворяющая условию 3) теоремы. По лемме 1.1 построим последовательность отрезков $x^{(r)} = x((n_r - 1)T +$

$+ t, t_0, x_0)$, сходящуюся к решению $x = x^* (t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ системы (1.4), с функцией $\varphi = \varphi_0 (t, x)$.

В силу (3.1) имеем $x^* (t) \in K_1$ при всех $0 \leqslant t \leqslant T$.

Из оценок (2.2), как и в теореме 2.1, получим соотношение $W (x^* (t)) = 0$ для всех $0 \leqslant t \leqslant T$, что противоречит условию 3) теоремы.

Таким образом, для любого решения $x = x (t, t_0, x_0)$, $t_0 \geqslant 0$, $x_0 \in \Gamma_0$ имеем $V^* = 0$ и, следовательно, $\lim_{t\to+\infty} y (t, t_0, x_0) = 0$.

Согласно работе [3], из соотношений $\lim_{t\to+\infty} V (t, x (t, t_0, x_0) = 0$ следует также, что найденная асимптотическая y-устойчивость равномерна по $x_0 \in \Gamma_0$.

Характер неустойчивости нулевого решения (1.1) может быть установлен следующей теоремой.

Теорема 3.2. Предположим, что система (1.1) такова, что:

1) ее решения $x = x (t, t_0, x_0)$, $t_0 \geqslant 0$, $\| x_0 \| \leqslant H_0$ равномерно L-ограничены по z, т. е. для этих решений $\| z (t, t_0, x_0) \| \leqslant L$ при всех $t \geqslant t_0$, таких, что $\| y (t, t_0, x_0) \| \leqslant A$, $H_0^2 \leqslant A^2 + L^2 = H_1^2 < H^2$;

2) в области G существует ограниченная функция $V (t, x)$, $| V (t, x) | \leqslant V_2 (\| x \|)$, принимающая в любой малой окрестности $x = 0$ положительные значения, полная производная от которой в силу (1.1) $V^{\cdot} (t, x) \geqslant W (x) \geqslant 0$;

3) существует предельная функция $\varphi = \varphi_0 (t, x) \in N\{\varphi\}$, такая, что множество $M \{x : W (x) = 0\} \cap K \{x : V_2 (x) > 0\}$ не содержит целых решений системы (1.4), соответствующей этой функции.

Тогда нулевое решение (1.1) y-неустойчиво.

Доказательство. Для $t_0 \geqslant 0$ и любого малого $\delta > 0$ выберем x_0 так, чтобы $V (t_0, x_0) = V_0 > 0$. Предположим, что решение $x = x (t, t_0, x_0)$ ограничено по y, т. е.

$$\| y (t, t_0, x_0) \| \leqslant A, \ A^2 + L^2 = H_1^2, \quad \forall t \geqslant t_0$$

Тогда в силу условия 2) существует $\lim_{t\to+\infty} V (t, x (t, t_0, x_0)) = V^*$, а также

$$V_2 (x, (t, t_0, x_0)) \geqslant V_0 > 0, \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{3.2}$$

По лемме 1.1 построим последовательность отрезков рассматриваемого решения, сходящуюся к решению $x = x^* (t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ системы (1.4) с функцией $\varphi = \varphi_0 (t, x)$. В силу (3.2) $V_2 (x^* (t)) \geqslant V_0 > 0$, из соотношения вида (2.4), как и в теореме 2.2, $W (x^* (t)) = 0$ для всех $0 \leqslant t \leqslant T$. Это противоречит условию 3) теоремы.

С учетом замечания, аналогичного замечанию 2.1, можно утверждать, что теоремы 3.1 и 3.2 обобщают на систему (1.1) результаты работ [3,9,10] об асимптотической устойчивости и неустойчивости по части переменных со знакопостоянной производной.

4. Рассмотрим механическую систему с переменными массами и с независящими от времени голономными связями, движение которой описы-

вается уравнениями [11]

$$
\frac{d^*}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}}\right)-\frac{\partial^* T}{\partial q_i}=-\frac{\partial^*\Pi}{\partial q_i}+\psi_i+\sum_{j=1}^{n} g_{ij}q_j^{\cdot}-\sum_{j=1}^{n} f_{ij}q_j^{\cdot} \tag{4.1}
$$

$$
T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, m, q)\, q_i^{\cdot} q_j^{\cdot}
$$

Здесь T — кинетическая энергия, $\partial^*\Pi / \partial q_i$ — обобщенные силы — потенциальные при закрепленных массах, $g_{ij}(t, q_1, q_2, \ldots, q_n) = -g_{ji}(t, q_1, q_2, \ldots, q_n)$ — коэффициенты гироскопических сил, $f_{ij}(t, q) = f_{ji}(t, q)$ — коэффициенты диссипативных сил, $\psi_i(t, q, q^{\cdot})$ — обобщенные реактивные силы, обусловленные отделением и присоединением частиц к материальным точкам системы, движением внутри этих точек, d^* / dt, $\partial^* / \partial q_i$ — производные при затвердевших массах.

Предполагаем, что массы точек ограничены и не исчезают, т. е.

$$
0 < m_{\lambda 1} \leqslant m_{\lambda}(t, q) \leqslant m_{\lambda 2}, \quad m_{\lambda 1}, \ m_{\lambda 2} = \mathrm{const} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, N) \tag{4.2}
$$

Кроме того, $\partial^*\Pi / \partial q_1 = \ldots = \partial^*\Pi / \partial q_n = 0$ при $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$, всех $t \geqslant 0$ и любых значениях $m_1, \ldots, m_N$, удовлетворяющих неравенствам (4.2); $\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0$ при $q_1^{\cdot} = q_2^{\cdot} = \ldots = q_n^{\cdot} = 0$, всех $t \geqslant 0$ и q; все величины, входящие в уравнения (4.1), удовлетворяют условиям (1.2).

Тогда система (4.1) допускает нулевое решение

$$
q_1^{\cdot} = q_2^{\cdot} = \ldots = q_n^{\cdot} = 0, \quad q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0 \tag{4.3}
$$

и с ней может быть сопоставлена система дифференциальных уравнений (лемма 1.1)

$$
\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{\circ} q_j^{\cdot\cdot} + \sum_{j,k=1}^{n} \overset{\circ}{a}_{ijk} q_j^{\cdot} q_k^{\cdot} - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \overset{\circ}{a}_{jki} q_j^{\cdot} q_k^{\cdot} = \Pi_i^{\circ} + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}^{\circ} q_j^{\cdot} - \sum f_{ij}^{\circ} q_j^{\cdot} + \psi_i^{\circ} \tag{4.4}
$$

в которой a_{ij}°, a_{ijk}°, Π_i°, g_{ij}°, f_{ij}°, ψ_i° — предельные для соответствующих величин из (4.1). При этом в силу (4.2) $\det \| a_{ij}^{\circ} \| \geqslant \sigma = \mathrm{const} > 0$.

Используя доказанные теоремы, найдем условия асимптотической устойчивости и неустойчивости решения (4.3) системы (4.1).

Предположим, что система (4.1) удовлетворяет следующим ограничениям: отделение и присоединение частиц, движение их внутри материальных точек таково, что

$$
\sum_{\mu=1}^{N} R_{\mu} v_{\mu} + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{N} m_{\mu}^{\cdot} v_{\mu}^{2} \leqslant 0 \tag{4.5}
$$

где R_{μ} — реактивная сила, прикладываемая к μ-й материальной точке (в отсутствие внутреннего движения частиц [11] это условие сводится к

$$\sum_{\mu=1}^{N} m_\mu^\cdot \left(u_\mu - \frac{1}{2} v_\mu\right) v_\mu \leqslant 0$$

где ϑ_μ, u_μ— переносная и абсолютная скорости отделяющихся и присоединяющихся к материальным точкам системы частиц); функция Π (t, m, q) не возрастает при возрастании времени и изменении масс точек системы при этом возрастании, т. е.

$$(4.6)\qquad \frac{\partial\Pi}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{N} \frac{\partial\Pi}{\partial m_\mu} m_\mu^\cdot \leqslant 0$$

действующие на систему диссипативные силы — силы полной диссипации, f — положительно-определенная квадратичная форма по $q_1^\cdot, q_2^\cdot, \ldots$ $\ldots, q_n^\cdot$, т. е.

$$(4.7)\qquad f = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} q_i^\cdot q_j^\cdot \geqslant f_0(q_1^\cdot, q_2^\cdot, \ldots, q_n^\cdot) \geqslant 0$$

$$f_0 = 0 \Leftrightarrow q_1^\cdot = q_2^\cdot = \ldots = q_n^\cdot = 0$$

Теорема 4.1. При условиях (4.5) — (4.7) предположим также, что:

1) функция Π (t, m, q) — определенно-положительна, допускает бесконечно малый высший предел по $q_1, q_2, \ldots, q_n$;

2) положение равновесия (4.3) — невырожденное изолированное, т. е. выполняется условие

$$(4.8)\qquad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^*\Pi}{\partial q_i}\right)^2 \geqslant \Pi_0(q_1, q_2, \ldots, q_n) \geqslant 0, \quad \Pi_0 = 0 \Leftrightarrow q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$$

Тогда нулевое положение равновесия (4.1) асимптотически устойчиво равномерно по $(q_0^\cdot, q_0)$.

Доказательство. Из условий теоремы функция $H = T + \Pi$ определенно-положительна, допускает бесконечно малый высшей предел по $q_1^\cdot$, $q_2^\cdot, \ldots, q_n^\cdot, q_1, q_2, \ldots, q_n$ с полной производной

$$H^\cdot \leqslant -2f \leqslant -2f_0 \leqslant 0$$

где $f_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $q_1^\cdot = q_2^\cdot = \ldots = q_n^\cdot = 0$.

Для системы (4.4) находим, что ее решение, лежащее на множестве $q_1^\cdot = q_2^\cdot = \ldots = q_n^\cdot = 0$, должно удовлетворять равенствам $\Pi_1^\circ = \Pi_2^\circ = \ldots = \Pi_n^\circ = 0$, что в силу (4.8) возможно только для решения $q_1^\cdot = q_2^\cdot = \ldots = q_1 = \ldots = q_n = 0$. Отсюда и из теоремы 2.1 следует, что решение (4.3) асимптотически устойчиво равномерно по $(q_0^\cdot, q_0)$.

Теорема 4.2. При условиях (4.5) — (4.7) предположим также, что функция $\Pi = \Pi$ (t, m, q) определенно-положительна по $q_1, \ldots, q_m$, ограничена непрерывной функцией P_0 $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, Π $(t, m, q) \leqslant P_0$ (q); движения (4.1) из некоторой окрестности (4.3) равномерно ограничены по $q_{m+1}, \ldots, q_n$; на множестве P_0 $(q_1, q_2, \ldots, q_n) > 0$ нет положений равновесия (4.1), и это свойство невырожденное, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^*\Pi}{\partial q_i}\right)^2 \geqslant \Pi_0(q_1, q_2, \ldots, q_n) \tag{4.9}$$

причем $\Pi_0(q_1, q_2, \ldots, q_n) > 0$ на множестве $P_0(q_1, q_2, \ldots q_n) > 0$.

Тогда нулевое положение равновесия системы (4.1) асимптотически устойчиво по $q_1^{\cdot}, q_2^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}, q_1, \ldots, q_m$ равномерно по $(q_0^{\cdot}, q_0)$.

Доказательство. Из условий теоремы функция $H = T + \Pi$ определенно-положительна по $q_1^{\cdot}, q_2^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}, q_1, \ldots, q_m$, $H \leqslant T_0 + P_0$, T_0 — положительно-определенная квадратичная форма по $q_1^{\cdot}, q_2^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$. Имеем также

$$H^{\cdot} \leqslant -2f, \quad M\{q^{\cdot}, q : f_0 = 0\} \cap K\{q^{\cdot}, q : T_0 + P_0 > 0\} =$$
$$= \{q^{\cdot}, q : P_0(q_1, q_2, \ldots, q_n) > 0, q_1^{\cdot} = q_2^{\cdot} = \ldots = q_n^{\cdot} = 0\}$$

В силу (4.9) на множестве $P_0(q_1, q_2, \ldots, q_n) > 0$

$$\sum_{i=1}^{n}(\Pi_i^{\circ})^2 \geqslant \Pi_0(q_1, q_2, \ldots, q_n) > 0$$

Следовательно, множество $M \cap K$ не содержит решений системы (4.4). Отсюда, на основании теоремы 3.1, получим требуемое доказательство.

Теорема 4.3. При условиях (4.5) — (4.7) предположим также, что функция $\Pi = \Pi(t, m, q)$ допускает бесконечно малый высший предел по $q_1, q_2, \ldots, q_n$; в любой достаточно малой окрестности (4.3) функция Π принимает отрицательные значения; положение равновесия (4.3) — невырожденное изолированное, т. е. имеет место соотношение (4.8).

Тогда это положение равновесия неустойчиво.

Пример 4.1. Рассмотрим тяжелое твердое тело переменного состава, вращающееся вокруг неподвижной точки O, центр масс которого перемещается вдоль оси Ox некоторой неподвижной в теле системы координат $Oxyz$, при этом моменты реактивных сил, сил инерции и сил Кориолиса движущихся частиц равны нулю. Положение определяется углами Эйлера θ, φ, ψ, образуемые $Oxyz$ с неподвижной системой $O\xi\eta\zeta$, ось $O\zeta$ направлена вертикально вверх, $I = I(t, \theta, \varphi, \psi)$ — тензор инерции тела в осях $Oxyz$, dI / dt — матрица неположительная. Пусть на тело, кроме силы тяжести с потенциальной функцией $\Pi_0 = mgx_0 \sin\theta, \sin\varphi$, действуют силы: диссипативные с полной диссипацией, потенциальные с потенциальной функцией

$$\Pi_1 = \Pi_1(t, \theta, \varphi, \psi), \quad \partial\Pi_1 / \partial t \leqslant 0$$
$$\frac{\partial\Pi_1}{\partial\theta} = \frac{\partial\Pi_1}{\partial\varphi} = \frac{\partial\Pi_1}{\partial\psi} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}, \quad \psi = 0$$

так что уравнения движения допускают положение равновесия (ось Ox тела направлена вниз)

$$\theta^{\cdot} = \varphi^{\cdot} = \psi^{\cdot} = 0, \; \theta = \frac{\pi}{2}, \; \varphi = \frac{3\pi}{2}, \; \psi = 0 \tag{4.10}$$

Если Π_1 определенно-положительна, допускает бесконечно малый высший предел по $\theta - \pi / 2$, $\varphi - 3\pi / 2$, ψ и

$$\left(\frac{\partial\Pi_1}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Pi_1}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Pi_1}{\partial\psi}\right)^2 \geqslant \Pi_{10}(\theta, \varphi, \psi) \geqslant 0$$

$$\Pi_{10}=0 \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}, \quad \varphi=\frac{3\pi}{2}, \quad \psi=0$$

(4.11) $$mg\,x_0 \geqslant q = \text{const} > 0, \quad (mgx_0)^{\cdot} \leqslant 0$$

то положение равновесия (4.10) асимптотически устойчиво равномерно по $\theta_0^{\cdot}$, $\varphi_0^{\cdot}$, $\psi_0^{\cdot}$, θ_0, φ_0, ψ_0.

Если $\Pi_1 = \text{const}$, то при условиях (4.11) положение (4.10) асимптотически устойчиво по $\theta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, θ, φ.

При $\Pi_1 = \text{const}$ имеет место также положение равновесия (ось Ox тела направлена вверх)

$$\theta^{\cdot} = \varphi^{\cdot} = \psi^{\cdot} = 0, \ \theta=\frac{\pi}{2}, \ \varphi=\frac{3\pi}{2}, \ \psi=0$$

Под действием диссипативных сил полной диссипации и при условиях $0 < q_1 \leqslant \leqslant (mgx_0) \leqslant q_2$ (q_1, $q_2 = \text{const}$), $(mgx_0)^{\cdot} \geqslant 0$ это положение равновесия неустойчиво.

Поступила 18 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
2. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
3. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
4. *Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.* Об устойчивости движения в целом. Докл. АН СССР, 1952, т. 86, № 3.
5. *Красовский Н. Н.* Об условиях обращения теорем А. М. Ляпунова о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1955, т. 101, № 1.
6. *Матросов В. М.* Об устойчивости движения. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
7. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
8. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
9. *Румянцев В. В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
10. *Risito C.* Sulla stabilita asintotica parziale. Ann. Math. purra ed appl. Ser. 6, 1970, vol. 84, p. 279—282.
11. *Новоселов В. С.* Аналитическая механика систем с переменными массами. Изд-во ЛГУ, 1969.