Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.36

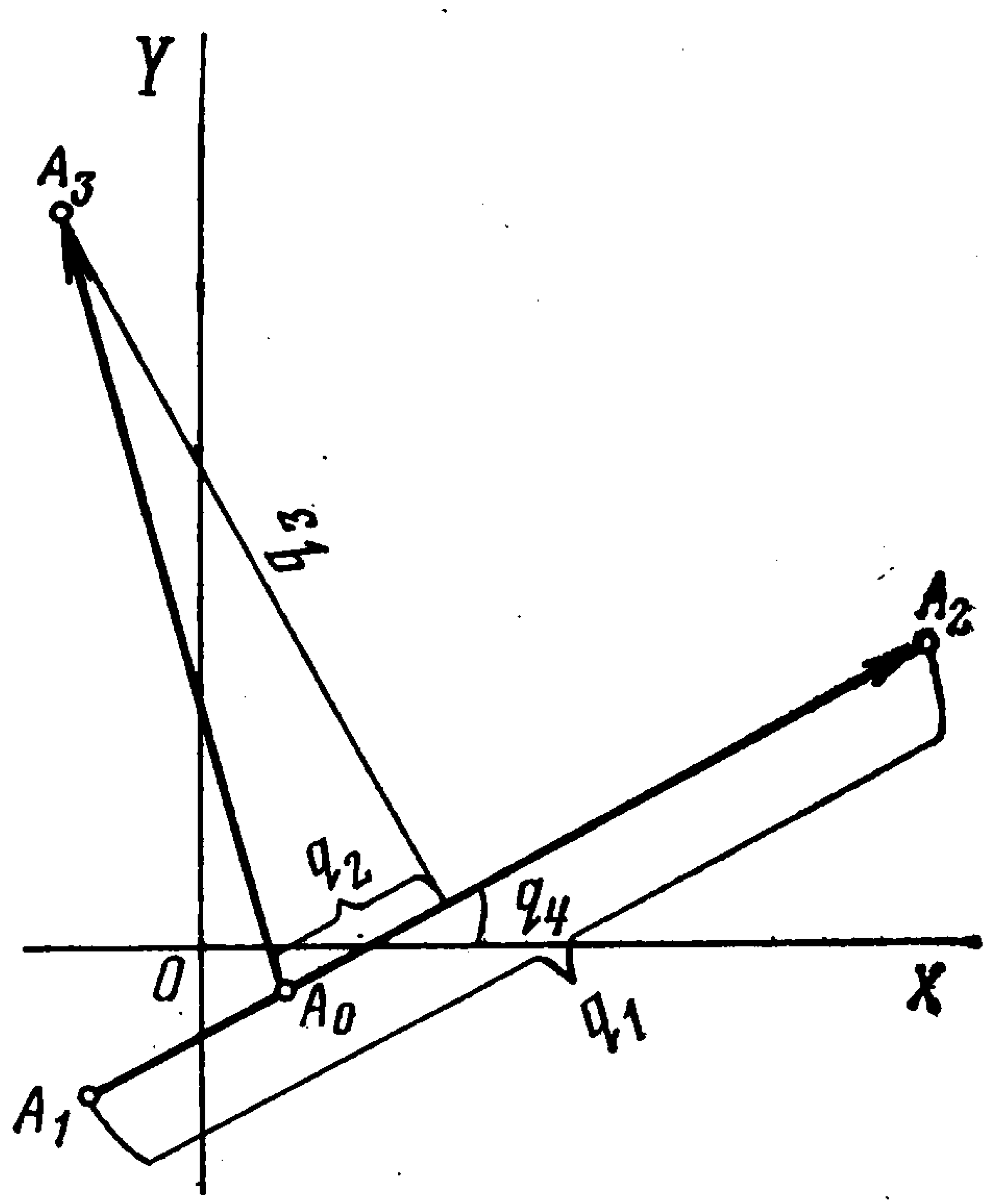
ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПОСТОЯННЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ РЕШЕНИЙ ПЛОСКОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

А. П. Иванов

(Москва)

В нелинейной постановке рассматривается задача об устойчивости треугольных постоянных лагранжевых решений плоской неограниченной задачи трех тел. В плоскости параметров задачи построены области устойчивости для большинства начальных условий и формальной устойчивости. Доказано, что при выполнении резонансных соотношений имеет место неустойчивость по Ляпунову или (в одном из резонансных случаев) устойчивость в конечном порядке.

1. Рассмотрим плоское движение трех материальных точек A_1, A_2, A_3 с массами m_1, m_2, m_3, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. В плоскости движения введем инерциальную барицентрическую систему координат OXY и систему координат Якоби q_1, q_2, q_3, q_4 (фиг. 1). Здесь $q_1 = A_1A_2$, q_2 и q_3 — проекции вектора $\mathbf{A}_0\mathbf{A}_3$ (A_0 — центр масс системы A_1 и A_2) на направления, параллельное и перпендикулярное вектору $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, q_4 — угол между вектором $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ и осью OX. Конфигурация системы вполне определяется координатами q_1, q_2, q_3. Система дифференциальных уравнений, описывающая изменение этих координат, может быть записана [1] в канонической форме



Фиг. 1

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

$$H = \frac{m_1 + m_2}{2m_1m_2}\left[p_1^2 + \frac{1}{q_1^2}(\Gamma - q_2p_3 + q_3p_2)^2\right] +$$

$$+ \frac{m_1 + m_2 + m_3}{2m_3(m_1 + m_2)}(p_2^2 + p_3^2) - f\left(\frac{m_2m_3}{r_{23}} + \frac{m_1m_3}{r_{13}} + \frac{m_1m_2}{r_{12}}\right)$$

$$r_{23}^2 = \left(-\frac{m_1}{m_1 + m_2}q_1 + q_2\right)^2 + q_3^2,$$

$$r_{13}^2 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}q_1 + q_2\right)^2 + q_3^2, \quad r_{12} = q_1$$

Здесь Γ — интеграл площадей, f — гравитационная постоянная.

Как известно [1,2], уравнения движения задачи трех тел допускают частные решения, называемые постоянными лагранжевыми решениями, для которых три точки во время движения образуют неизменяемый равносторонний треугольник со стороной a. Этот треугольник вращается вокруг центра масс системы с постоянной угловой скоростью ω. При этом для лагранжевых решений $\Gamma \neq 0$ и

$$a = \frac{1}{f}\Gamma^2\frac{M_1}{M_2^2}, \quad \omega = f^2\frac{1}{\Gamma^3}\frac{M_2^3}{M_1}$$
$$M_1 = m_1 + m_2 + m_3, \quad M_2 = m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1$$

Сделаем в системе (1.1) каноническую замену переменных

$$q_i = ax_i = \frac{1}{f}\Gamma^2\frac{M_1}{M_2^2}x_i, \quad p_i = f\frac{M_1M_2}{\Gamma}y_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

с валентностью $\Gamma M_1^2 / M_2$ и введем новую независимую переменную ν по формуле

$$\frac{d\nu}{dt} = \omega = f^2\frac{1}{\Gamma^3}\frac{M_2^3}{M_1}$$

т. е. в постоянном лагранжевом решении $\nu = q_4$. В новых переменных уравнения движения имеют вид

$$\frac{dx_i}{d\nu} = \frac{\partial H^*}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{d\nu} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

$$H^* = \frac{(m_1 + m_2)M_1}{2m_1m_2}\left[y_1^2 + \frac{1}{x_1^2}\left(\frac{M_2}{M_1^2} - x_2y_3 + x_3y_2\right)^2\right] +$$
$$+ \frac{M_1^2}{2m_3(m_1 + m_2)}(y_2^2 + y_3^2) - \frac{1}{M_1^2}\left(\frac{m_2m_3}{r_{23}} + \frac{m_1m_3}{r_{13}} + \frac{m_1m_2}{r_{12}}\right)$$
$$r_{23}^2 = \left(\frac{-m_1}{m_1 + m_2}x_1 + x_2\right)^2 + x_3^2,$$
$$r_{13}^2 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}x_1 + x_2\right)^2 + x_3^2, \quad r_{12} = x_1$$

Лагранжевы решения соответствуют положениям равновесия системы (1.2)

$$x_1^\circ = 1, \quad x_2^\circ = \frac{m_1 - m_2}{2(m_1 + m_2)}, \quad x_3^\circ = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{1.3}$$
$$y_1^\circ = 0, \quad y_2^\circ = \mp\frac{m_3(m_1 + m_2)}{M_1^2}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_3^\circ = \frac{m_3(m_1 - m_2)}{M_1^2}$$

В дальнейшем будем все рассуждения проводить для случая $x_3^\circ = +\sqrt{3}/2$, имея в виду, что все сказанное ниже верно и для случая $x_3^\circ = -\sqrt{3}/2$.

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \beta = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2},$$
$$\gamma = \frac{m_1m_2}{m_1^2 + m_1m_2 + m_2^2} = \frac{1 - \beta^2}{3 + \beta^2}$$

и сделаем в системе (1.2) каноническую замену переменных

$$x_1 = X_1, \qquad y_1 = Y_1(\beta^2 + 3)(1 - \alpha)$$
$$x_2 = \beta X_2 - \sqrt{3}X_3, \quad y_2 = (\beta Y_2 - \sqrt{3}Y_3)(1 - \alpha)$$
$$x_3 = \sqrt{3}X_2 + \beta X_3, \quad y_3 = (\sqrt{3}Y_2 + \beta Y_3)(1 - \alpha)$$

с валентностью $(\beta^2+3)(1-\alpha)$. В новых переменных уравнения движения имеют вид

$$(1.4)\qquad \frac{dX_i}{d\nu}=\frac{\partial K}{\partial Y_i},\quad \frac{\partial Y_i}{\partial \nu}=-\frac{\partial K}{\partial X_i}\quad (i=1,2,3)$$

$$(1.5)\qquad K=\frac{2}{\gamma}\left[Y_1^2+\frac{1}{X_1^2}\left(\frac{\gamma}{4}+\frac{\alpha}{4}-X_2Y_3+X_3Y_2\right)^2\right]+$$
$$+\frac{1}{2\alpha}(Y_2^2+Y_3^2)-\frac{(1-\alpha)\gamma}{4X_1}-\frac{\alpha}{2(\beta^2+3)}\left(\frac{1-\beta}{r_1}+\frac{1+\beta}{r_2}\right)$$
$$r_{1,2}^2=\frac{(1\pm\beta)^2}{4}X_1^2-(\beta\pm 1)X_1(\beta X_2-\sqrt{3}X_3)+$$
$$+(\beta^2+3)(X_2^2+X_3^2)$$

Лагранжево решение (1.3) записывается следующим образом:

$$(1.6)\qquad X_1^\circ=1,\quad X_2^\circ={}^1/_2,\quad X_3^\circ=0$$
$$Y_1^\circ=0,\quad Y_2^\circ=0,\quad Y_3^\circ=\alpha/2$$

Следуя [1,2], будем считать постоянное лагранжево решение устойчивым, если в возмущенном движении треугольник, образованный точками A_1, A_2, A_3, всегда сколь угодно мало отличается от первоначального равностороннего. В такой постановке задача об устойчивости лагранжева решения эквивалентна задаче об устойчивости положения равновесия (1.6) системы (1.4) относительно возмущений координат и импульсов.

В работах Рауса, Жуковского [3] были получены необходимые условия устойчивости лагранжевых решений в случае произвольного степенного закона притяжения. Показано [4], что эти необходимые условия не являются достаточными: при некоторых значениях параметров доказана неустойчивость.

Современный уровень развития теории устойчивости гамильтоновых систем позволяет провести более полное исследование устойчивости лагранжевых решений классической плоской круговой неограниченной задачи трех тел. Это и является целью данной работы.

2. Определим возмущенное движение в окрестности положения равновесия (1.6) с помощью координат и импульсов Q_i, P_i по формулам

$$(2.1)\qquad X_i=X_i^\circ+Q_i,\quad Y_i=Y_i^\circ+P_i\quad (i=1,2,3)$$

Функцию Гамильтона (1.5) представим в виде ряда

$$(2.2)\qquad K=K_2+\ldots+K_n+\ldots$$

где K_n — однородный полином степени n относительно Q_i, P_i $(i=1,2,3)$. Нужные в дальнейшем члены разложения (2.2) имеют вид

$$K_2=\frac{2}{\gamma}P_1^2+\frac{1}{2\alpha}P_2^2+\left(\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\gamma}\right)P_3^2+Q_3P_2+$$
$$+\left(\frac{\alpha}{\gamma}-1\right)Q_2P_3+Q_1P_3+\left(\frac{\gamma}{8}+\frac{9}{32}\alpha\gamma\right)Q_1^2+$$
$$+\left(\alpha-\frac{9}{8}\alpha\gamma\right)Q_1Q_2-\frac{3\sqrt{3}}{8}\alpha\beta\gamma Q_1Q_3+$$
$$+\left(\frac{\alpha^2}{2\gamma}-\alpha+\frac{9}{8}\alpha\gamma\right)Q_2^2+\frac{3\sqrt{3}}{4}\alpha\beta\gamma Q_2Q_3+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{8}\alpha\gamma\right)Q_3^2$$
$$K_3=-\frac{1}{\gamma}Q_1P_3^2-2Q_1Q_3P_2-2\left(\frac{\alpha}{\gamma}-1\right)Q_1Q_2P_3-\frac{3}{2}Q_1^2P_3-$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2}{\gamma} Q_3P_2P_3 - \frac{2\alpha}{\gamma} Q_2Q_3P_2 + \frac{2}{\gamma} Q_2P_3^2 + \frac{2\alpha}{\gamma} Q_2^2P_3 - \\
&-\left[\frac{(\alpha+1)\gamma}{4} + \frac{7}{128}\alpha\gamma(\beta^2+1)\right] Q_1^3 + \left[\frac{\alpha\gamma}{64}(21\beta^2+9) - \right.\\
&\left. -\frac{3}{2}\alpha\right] Q_1^2Q_2 - \left[\frac{\alpha^2}{\gamma} + \frac{3}{32}\alpha\gamma(7\beta^2-33)\right] Q_1Q_2^2 - \\
&-\frac{9\sqrt{3}}{32}\alpha\beta\gamma Q_1^2Q_3 + \frac{27\sqrt{3}}{8}\alpha\beta\gamma Q_1Q_2Q_3 + \frac{3}{32}\alpha\gamma(11\beta^2-21)\times \\
&\times Q_1Q_3^2 - \left[\frac{7}{16}\alpha(\beta^2+3) + \frac{45}{8}\alpha\gamma - \frac{15}{4}\alpha\right] Q_2^3 - \\
&-\frac{45\sqrt{3}}{8}\alpha\beta\gamma Q_2^2Q_3 - \left[\frac{3}{4}\alpha(\beta^2+3) - \frac{45}{16}\alpha\gamma(3-\beta^2)\right] Q_2Q_3^2 + \\
&+\frac{15\sqrt{3}}{8}\alpha\beta\gamma Q_3^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_4 &= \frac{2}{\gamma} Q_3^2P_2^2 + \frac{2}{\gamma} Q_2^2P_3^2 + \frac{3}{2\gamma} Q_1^2P_3^2 + 3Q_1^2Q_3P_2 + \\
&+3\left(\frac{\alpha}{\gamma}-1\right) Q_1^2Q_2P_3 + 2Q_1^3P_3 - \frac{4}{\gamma} Q_2Q_3P_2P_3 + \\
&+\frac{4}{\gamma} Q_1Q_3P_2P_3 + \frac{4\alpha}{\gamma} Q_1Q_2Q_3P_2 - \frac{4}{\gamma} Q_1Q_2P_3^2 - \frac{4\alpha}{\gamma} Q_1Q_2^2P_3 + \\
&+\left[\frac{3}{8}\gamma + \frac{\alpha\gamma}{4} + \frac{37}{2048}\alpha\gamma(3\beta^2+1)\right] Q_1^4 + \left[2\alpha + \frac{\alpha\gamma}{256}\times\right. \\
&\left.\times(\beta^2+75)\right] Q_1^3Q_2 + \frac{\sqrt{3}}{256}\alpha\beta\gamma(25\beta^2+99) Q_1^3Q_3 + \\
&+\left[\frac{3\alpha^2}{2\gamma} - \frac{\alpha\gamma}{256}(339\beta^2+369)\right] Q_1^2Q_2^2 - \frac{3\sqrt{3}}{128}\alpha\beta\gamma(25\beta^2+3)\times \\
&\times Q_1^2Q_2Q_3 + \frac{\alpha\gamma}{256}(327\beta^2+333) Q_1^2Q_3^2 + \frac{45}{64}\alpha\gamma(5\beta^2-9)\times \\
&\times Q_1Q_2^3 + \frac{15\sqrt{3}}{64}\alpha\beta\gamma(5\beta^2-57) Q_1Q_2^2Q_3 - \frac{45}{64}\alpha\gamma(19\beta^2-15)\times \\
&\times Q_1Q_2Q_3^2 + \frac{\alpha}{128}(337\beta^2+2520\gamma-849) Q_2^4 - \\
&-\frac{15\sqrt{3}}{64}\alpha\beta\gamma(3\beta^2-15) Q_1Q_3^3 - \frac{5\sqrt{3}}{32}\alpha\beta\gamma(5\beta^2-153) Q_2^3Q_3 + \\
&+\frac{3\alpha}{64}[64(\beta^2+3) + 105\gamma(5\beta^2-9)] Q_2^2Q_3^2 + \frac{15\sqrt{3}}{32}\alpha\beta\gamma\times \\
&\times(3\beta^2-47) Q_2Q_3^3 - \left[\frac{3}{8}\alpha(\beta^2+3) + \frac{45}{128}\alpha\gamma(13\beta^2-17)\right] Q_3^4
\end{aligned}
$$

Определяющее уравнение имеет вид

$$
(\sigma^2+1)(\sigma^4+\sigma^2+k) = 0 \tag{2.3}
$$

$$
k = \frac{27}{4}\left[\alpha(1-\alpha) + (1-\alpha)^2\frac{1-\beta^2}{4}\right] = \frac{27}{4}\frac{m_1m_2+m_2m_3+m_3m_1}{(m_1+m_2+m_3)^2}
$$

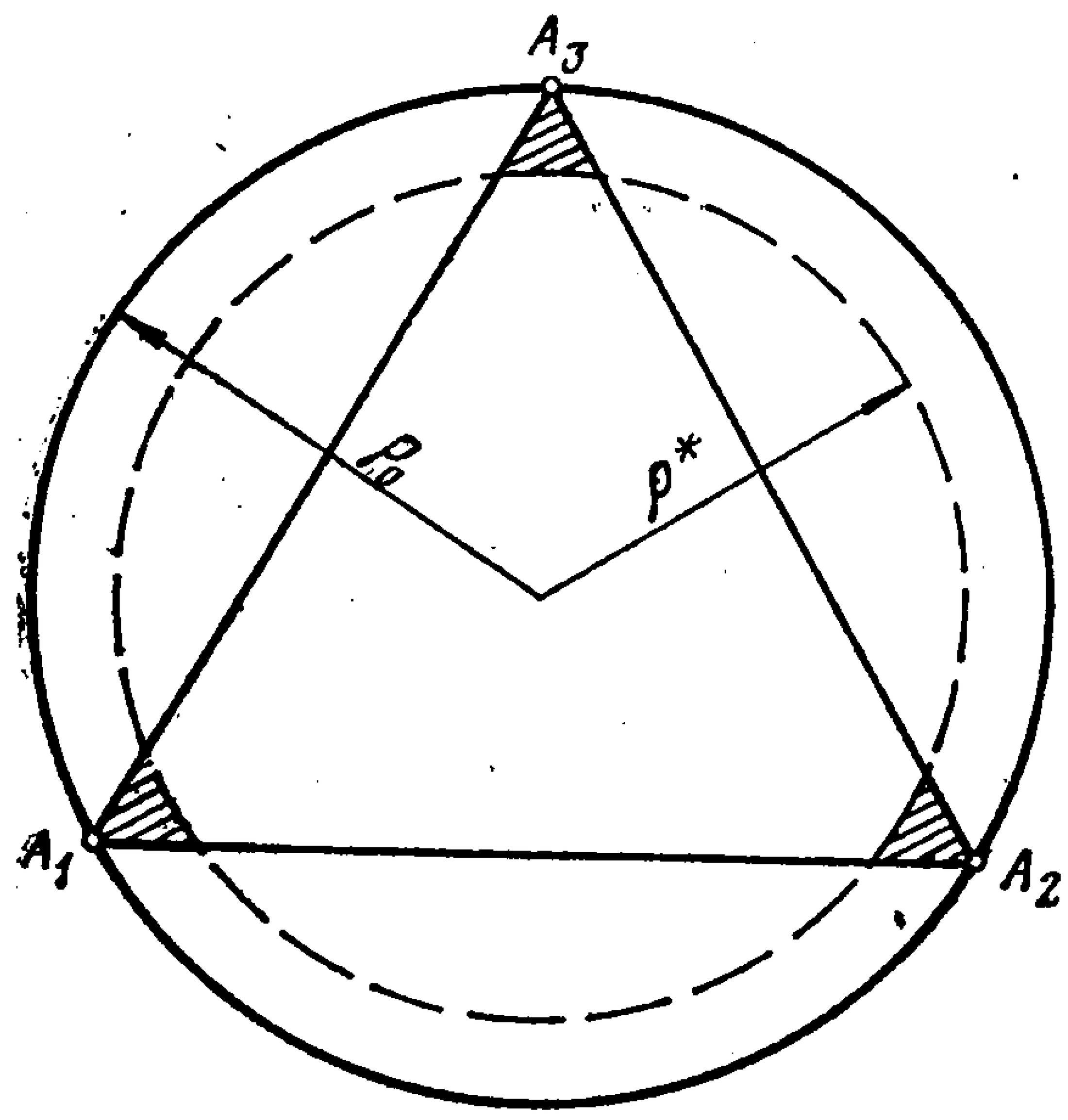
и необходимое условие устойчивости будет таким:

$$
k < 1/4 \tag{2.4}
$$

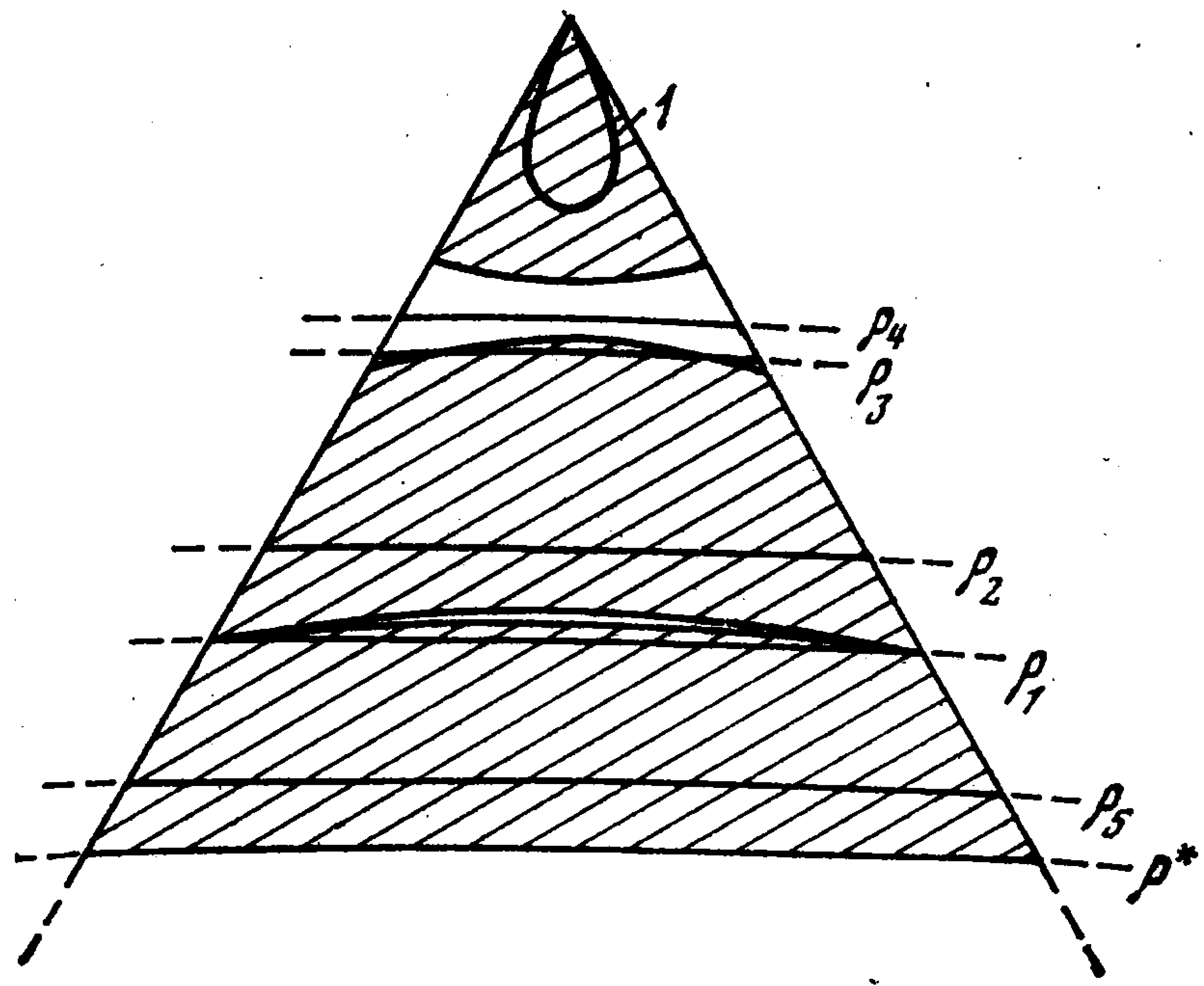
Дадим условию (2.4), следуя [5], следующую геометрическую интерпретацию (фиг. 2). В плоскости равностороннего треугольника, образованного точками A_1, A_2, A_3, каждой тройке значений m_1, m_2, m_3 будет соответствовать единственная точка, обозначающая центр масс системы. Последний лежит на окружности радиуса ρ (k), центр которой совпадает с геометрическим центром треугольника, и

(2.5) $$\rho(k) = \rho_0 \sqrt{1-4k/9}$$

где ρ_0 — радиус описанной окружности. Условию (2.4) на фиг. 2 соответствует положение центра масс в одной из трех областей, лежащих



Фиг. 2



Фиг. 3

вне окружности радиуса ρ^*, где

$$\rho^* = \rho(^1/_4) = \rho_0 \sqrt{8/9}$$

Параметр α пропорционален расстоянию от центра масс до прямой A_1A_2, положению центра масс в точке A_3 (т. е. $m_1 = m_2 = 0$) соответствует значение $\alpha = 1$.

Линейное каноническое нормализующее преобразование

$$(Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2, P_3) = (Q_1^*, Q_2^*, Q_3^*, P_1^*, P_2^*, P_3^*)\, N$$

найдем с помощью алгоритма, изложенного в [6]. Для строк N_i симплектической матрицы N получаем следующие выражения:

$$N_1 = \frac{c_1}{\lambda_1}(2, 1, 0, 0, 0, -\alpha), \quad N_4 = c_1\left(0, 0, 0, \frac{\gamma}{2}, \alpha, 0\right)$$

$$N_j = \frac{c_j}{\lambda_j}\left(\frac{\varkappa_j}{\gamma}, -\frac{\varkappa_j}{2\alpha}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\beta\frac{(\alpha+\gamma)^2}{\alpha\gamma}, 0, \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \right.$$
$$\left. \times \beta\frac{(\alpha+\gamma)^2}{\gamma}, \frac{\varkappa_j}{2} - 9\alpha - 9\gamma\right)$$

$$N_{3+j} = c_j\left(0, 0, -\frac{4}{\alpha} - \frac{4}{\gamma}, \frac{\varkappa_j}{4}, 4 + \frac{4\alpha}{\gamma} - \frac{\varkappa_j}{2}, \right.$$
$$\left. -\frac{3\sqrt{3}}{2}\beta(\alpha+\gamma)\right)$$

$$c_j^2 = \frac{\lambda_j}{2}\frac{\alpha\gamma}{(\alpha+\gamma)(\lambda_j^2 - {}^1/_2)\varkappa_j}, \quad \varkappa_j = 9\alpha + 9\gamma + 4\lambda_j^2 \quad (j = 2, 3)$$

$$c_1^2 = \frac{1}{\alpha+\gamma}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - k}}$$

В переменных Q_i^*, P_i^* $(i = 1, 2, 3)$ гамильтониан (2.2) имеет вид

$$K^* = \frac{\lambda_1}{2}(Q_1^{*2} + P_1^{*2}) + \frac{\lambda_2}{2}(Q_2^{*2} + P_2^{*2}) + \frac{\lambda_3}{2}(Q_3^{*2} + P_3^{*2}) + \ldots$$
$$\ldots + K_n^* + \ldots$$

Переходя к «полярным» координатам по формулам

$$Q_i^* = \sqrt{2r_i}\sin\varphi_i, \quad P_i^* = \sqrt{2r_i}\cos\varphi_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

получим

$$K^* = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3 + \ldots + K_n^* + \ldots \tag{2.6}$$

где K_n^* — однородная относительно r_i $(i = 1, 2, 3)$ функция порядка $n / 2$.

3. Для исследования устойчивости проведем дальнейшую (нелинейную) нормализацию системы с гамильтонианом (2.6). Будем в основном придерживаться схемы исследования, изложенной в [6].

Процесс нелинейной нормализации существенно зависит от наличия в системе резонансов, т. е. соотношений вида

$$n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + n_3\lambda_3 = 0 \tag{3.1}$$

где n_1, n_2, n_3 — целые числа. Величина $|n_1| + |n_2| + |n_3|$ называется порядком резонанса. В случае отсутствия резонансов до четвертого порядка включительно посредством нелинейного канонического преобразования $\varphi_i, r_i \to \Phi_i, R_i$ $(i = 1, 2, 3)$ функцию Гамильтона (2.6) можно привести к виду

$$\begin{aligned} &K^* = K_2^* + K_4^* + \ldots \\ &K_2^* = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 \\ &K_4^* = c_{200}R_1^2 + c_{110}R_1R_2 + c_{101}R_1R_3 + c_{020}R_2^2 + c_{011}R_2R_3 + \\ &+ c_{002}R_3^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

причем коэффициенты формы K_4^* зависят от параметров задачи k, α, но не зависят от способа приведения гамильтониана к нормальной форме (3.2).

В области линейной устойчивости рассматриваемой задачи возможны следующие резонансные соотношения до четвертого порядка включительно:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0, \quad k = k_1 = 0.1875 \\ &\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \quad k = k_2 = 0.16 \\ &\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0, \quad k = k_3 = 8/81 = 0.09876\ldots \\ &\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \quad k = k_4 = 0.09 \\ &\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \quad k = k_5 = 0.2304 \end{aligned} \tag{3.3}$$

На фиг. 3 кривые, на которых выполняются резонансные соотношения (3.3), построены в одной из трех симметричных областей, изображенных на фиг. 2. Так как частоты λ_i $(i = 1, 2, 3)$ зависят только от параметра k, то эти кривые представляют собой дуги окружностей, радиусы которых $\rho_j = \rho(k_j)$ $(j = 1, \ldots, 5)$ вычисляются по формуле (2.5).

Для канонической системы с гамильтонианом (3.2) имеет место теорема Арнольда — Мозера [7]: если хотя бы один из определителей

$$D_3 = \det\left\| \frac{\partial^2 K_4^*}{\partial R_i \partial R_j} \right\|, \quad D_4 = \det\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 K_4^*}{\partial R_i \partial R_j} & \lambda_i \\ \lambda_j & 0 \end{matrix} \right\| \tag{3.4}$$

отличен от нуля, то положение равновесия устойчиво для большинства начальных условий.

Коэффициенты нормальной формы (3.2) и определители (3.4) были вычислены вне резонансных кривых (3.3) на ЭВМ с помощью известных алгоритмов[1]. На фиг. 3 построена замкнутая кривая *1*, в точках которой $D_4 = 0$, причем внутри этой кривой $D_4 < 0$, а вне ее $D_4 > 0$. Как показали расчеты, во всех точках этой кривой $D_3 \neq 0$, следовательно, для всех $k < 0.25$, за исключением $k = k_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$, имеет место устойчивость для большинства начальных условий.

4. В данной работе исследовался еще один тип устойчивости — формальная устойчивость [8], означающая, что неустойчивость не может быть обнаружена при учете любого конечного числа членов разложения функции Гамильтона.

Для системы с гамильтонианом (3.2) формальная устойчивость будет иметь место [6] в случае, если система

$$K_2^* = 0, \qquad K_4^* = 0$$

в области $R_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, 3)$ не имеет нетривиальных решений. Так как $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, то это означает, что форма

$$K_4^*\left(R_1, R_2, -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}R_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}R_2\right) = AR_1^2 + BR_1R_2 + CR_2^2 \tag{4.1}$$

$$A = c_{200} - \frac{\lambda_1}{\lambda_3}c_{101} + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_3^2}c_{002}, \quad C = c_{020} - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}c_{011} + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3^2}c_{002}$$

$$B = c_{110} - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}c_{101} - \frac{\lambda_1}{\lambda_3}c_{001} + 2\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3^2}c_{002}$$

знакоопределена в области $R_1 \geqslant 0$, $R_2 \geqslant 0$, что возможно, если $B^2 - 4AC < 0$ либо A, B и C имеют одинаковые знаки. Можно убедиться, что

$$B^2 - 4AC = \lambda_3^{-2}D_4$$

поэтому внутри кривой *1* (фиг. 3) имеет место формальная устойчивость, а вне ее для знакоопределенности формы (4.1) необходимо, чтобы A, B, C имели одинаковые знаки. Результаты проведенного численного исследования приведены на фиг. 3. Формальная устойчивость имеет место в заштрихованных областях, за исключением резонансных кривых.

5. Проведем исследование устойчивости положения равновесия (1.6) системы (1.4) в резонансных случаях (3.3).

Сначала рассмотрим первые четыре случая (3.3), для которых в соотношении (3.1) $n_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Если $n_1 + n_2 + n_3 = 3$, то нормальная форма гамильтониана (2.6) имеет вид

$$K^* = K_2^* + a_{n_1n_2n_3}\sin(n_1\Phi_1 + n_2\Phi_2 + n_3\Phi_3)\,R_1^{n_1/2}R_2^{n_2/2}R_3^{n_3/2} + \ldots \tag{5.1}$$

[1] См. *Маркеев А. П., Сокольский А. Г.* Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем. Препринт Ин-та проблем механики, 1976, № 31.

где K_2^* имеет вид (3.2). При этом, если $a^*_{n_1n_2n_3} \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво по Ляпунову.

В результате проведенных расчетов оказалось, что $a_{102} \neq 0$ при $k = k_1$ и $a_{012} \neq 0$ при $k = k_2$ для всех α из области линейной устойчивости, следовательно, при $k = k_1$ и при $k = k_2$ положение равновесия (1.6) неустойчиво по Ляпунову.

При выполнении соотношения (3.1) для $n_1 + n_2 + n_3 = 4$ нормальная форма гамильтониана (2.6) имеет вид

$$K^* = K_2^* + W(R_1, R_2, R_3) + a_{n_1n_2n_3} \sin(n_1\Phi_1 + \\ + n_2\Phi_2 + n_3\Phi_3) R_1^{n_1/2} R_2^{n_2/2} R_3^{n_3/2} + \ldots$$

где K_2^* имеет вид (3.2), а $W(R_1, R_2, R_3)$ — квадратичная форма от R_1, R_2, R_3. При этом, если

$$|a_{n_1n_2n_3}| (n_1^{n_1} n_2^{n_2} n_3^{n_3})^{1/2} > |W(n_1, n_2, n_3)| \tag{5.2}$$

то положение равновесия неустойчиво по Ляпунову, при обратном знаке неравенства имеет место устойчивость «укороченной» системы.

Проведенное численное исследование показало, что при резонансах, определяемых третьей и четвертой системой равенств (3.3), имеет место неравенство (5.2), для всех α из области линейной устойчивости, следовательно, при $k = k_3$ и при $k = k_4$ положение равновесия (1.6) неустойчиво.

Последний из резонансов (3.3) отличается от уже рассмотренных тем, что для него в ряде чисел n_1, n_2, n_3 имеет место перемена знака. При этом система с укороченным до членов второго относительно R_i $(i = 1, 2, 3)$ порядка включительно гамильтонианом

$$K^* = K_2^* + W(R_1, R_2, R_3) + a_{121} \sin(\Phi_1 - 2\Phi_2 - \Phi_3) \times \\ \times R_1^{1/2} R_2 R_3^{1/2}$$

обладает знакоопределенным интегралом

$$L = 3R_1 + R_2 + R_3$$

Однако, что будет при учете членов более высокого порядка, неизвестно, так как при $k = k_5$ имеем $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.8$, $\lambda_3 = -0.6$, и система наряду с указанным резонансом допускает и другие резонансные соотношения, например два резонанса пятого порядка

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \quad 2\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$

Следовательно, при $k = k_5$ можно утверждать лишь наличие устойчивости положения равновесия (1.6) при учете членов разложения функции Гамильтона (2.2) не выше четвертого порядка относительно координат и импульсов возмущенного движения.

Проведенные рассмотрения позволяют сформулировать основной вывод данной работы в виде следующих утверждений.

В области $k < 0.25$ устойчивости в первом приближении постоянных лагранжевых решений плоской неограниченной задачи трех тел имеются четыре кривые, соответствующие резонансным значениям параметра k.

на которых имеет место неустойчивость по Ляпунову. На пятой резонансной кривой имеет место устойчивость в конечном порядке.

Вне пяти резонансных кривых в области устойчивости в первом приближении имеет место устойчивость для большинства начальных условий.

В области устойчивости в первом приближении найдены области, в которых постоянные лагранжевы решения формально устойчивы. Вне этих областей (разумеется, внутри области устойчивости в первом приближении) также можно утверждать наличие формальной устойчивости лагранжевых решений (за исключением, быть может, конечного числа кривых и точек в плоскости параметров), проведя исследование устойчивости с учетом форм K_5, K_6 в разложении (2.2) (см. [6]). Однако указанное исследование, учитывающее члены пятого, шестого (а возможно, и более высокого) порядка, можно не проводить, поскольку описанные выше результаты дают достаточно полное представление о формальной устойчивости лагранжевых решений.

Автор благодарит А. П. Маркеева за постановку задачи и ряд ценных советов и А. Г. Сокольского за постоянное внимание к работе.

Поступила 2 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. М., «Наука», 1971.
2. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., «Наука», 1964.
3. *Жуковский Н. Е.* О прочности движения. Собр. соч., т. 1. М., Гостехиздат, 1937.
4. *Куницын А. Л.*, *Тхай В. Н.* О неустойчивости лапласовых решений неограниченной задачи трех тел. Письма в Астрон. ж., 1977, т. 3, № 8.
5. *Куницын А. Л.* Геометрическая интерпретация необходимых условий устойчивости треугольных точек либрации общей задачи трех тел. Celest. Mech., 1971, vol. 3, No. 2, p. 222—226.
6. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., «Наука», 1978.
7. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 6.
8. *Moser I.* New aspects in the theory of stability of hamiltonian systems. Commun. Pure Appl. Math., 1958, vol. 11, No. 1, p. 81—114.