Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.381

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА

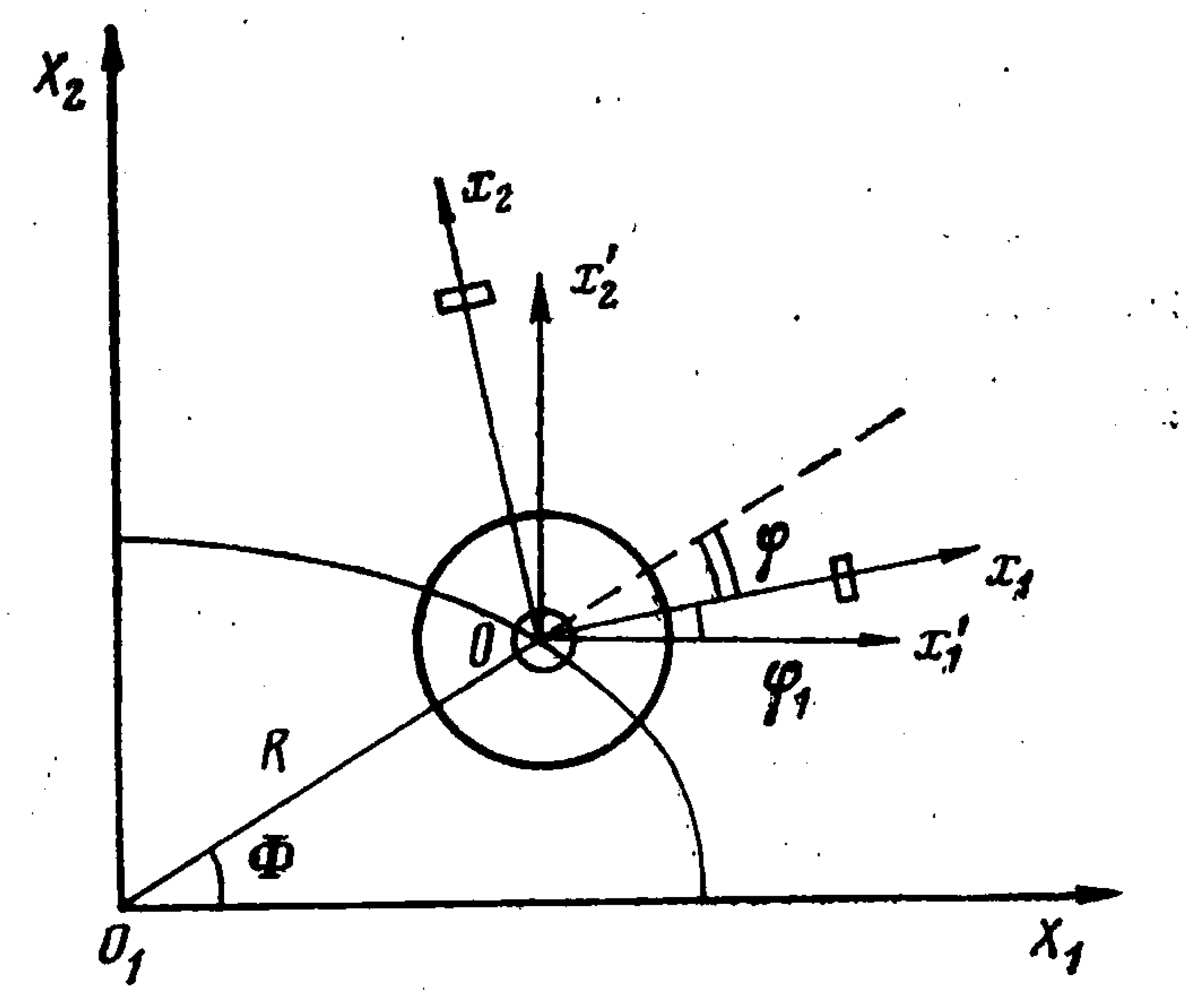
А. В. Горшков

(Свердловск)

Получено решение задачи об оптимальной стабилизации вращательного движения гиростата, центр масс которого перемещается по эллиптической орбите в центральном ньютоновском поле сил. Дано обоснование метода последовательных приближений для определения оптимального управления.

В работе [1] проведено решение задачи о стабилизации гиростата при движении центра масс по круговой орбите.

1. Рассмотрим осесимметричный гиростат с тремя маховиками, движущийся в центральном ньютоновском поле сил (O_1 — притягивающий центр, o — центр масс гиростата). Исследуем относительное движение гиростата без учета его влияния на движение центра масс, которое будем считать заданным (ограниченная задача).



Введем следующие системы координат: $ox_1x_2x_3$ — система, жестко связанная с гиростатом, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции, оси маховиков направлены по этим осям; $O_1X_1X_2X_3$ — инерциальная система, $X_1O_1X_2$ — плоскость орбиты; $ox_1'x_2'x_3'$ — оси Кенига, ось ox_3' параллельна оси ox_3 и является осью симметрии, а оси ox_1' и ox_2' лежат в плоскости x_1ox_2. В стационарном движении оси ox_1' и ox_2' параллельны осям O_1X_1 и O_1X_2. Сферическая система координат R, Φ, Ψ, где R — расстояние от точки O_1 до o, Ψ — угол, образуемый вектором O_1o с плоскостью $X_1O_1X_2$, Φ — угол между осью O_1X_1 и проекцией вектора O_1o на плоскость $X_1O_1X_2$, связана с инерциальной системой координат формулами

$$X_1 = R\cos\Phi\cos\Psi, \quad X_2 = R\sin\Phi\cos\Psi, \quad X_3 = R\sin\Psi.$$

Эти системы координат представлены на фигуре. Здесь φ_1 — угол между осями ox_1 и ox_1', φ — угол между плоскостью X_3O_1o и осью ox_1.

Главные центральные моменты инерции гиростата относительно осей $ox_1x_2x_3$ обозначим через $C_1 = C_2 = C$, C_3, а моменты инерции маховиков — $I_1 = I_2 = I$, I_3.

Будем считать, что центр масс гиростата движется по эллиптической орбите, один из фокусов которой совпадает с O_1. Тогда движение центра масс гиростата в сферических координатах описывается соотношениями

$$R=\frac{P}{1+e\cos\Phi},\quad \Phi^{\cdot}=\frac{\sqrt{\varkappa P}}{P^2}(1+e\cos\Phi)^2$$
$$\Psi\equiv\Psi^{\cdot}\equiv 0,\quad \varkappa=\mu M_1$$

Здесь P — параметр орбиты, e — эксцентриситет, μ — гравитационная постоянная, M_1 — масса притягивающего центра.

Уравнения относительного движения гиростата [1,2] допускают равномерное вращение с относительной скоростью ω вокруг оси симметрии ox_3, направленной перпендикулярно плоскости орбиты; при этом два маховика, оси которых лежат в плоскости x_1ox_2, неподвижны.

Проекции мгновенной угловой скорости тела p_1, p_2, p_3 на оси $ox_1x_2x_3$ и q_1, q_2, q_3 на оси $ox_1'x_2'x_3'$ связаны соотношениями

$$p_1=q_1\cos\varphi_1+q_2\sin\varphi_1,\quad p_2=-q_1\sin\varphi_1+q_2\cos\varphi_1$$
$$p_3=q_3+\varphi_1^{\cdot},\quad \varphi_1^{\cdot}=\varphi^{\cdot}+\Phi^{\cdot}\beta_{33}$$

Здесь β_{ij} — направляющие косинусы системы координат $ox_1'x_2'x_3'$ относительно $O_1X_1X_2X_3$.

Гравитационные силы определяются силовой функцией, приближенное выражение которой [1,2] (M — масса гиростата)

$$U=\frac{\varkappa M}{R}+\frac{1}{2}\frac{\varkappa}{R^3}(C_3-C)-\frac{3}{2}\frac{\varkappa(C_3-C)}{R^5}\left(\sum_{i=1}^{3}X_i\beta_{i3}\right)^2$$

Уравнения относительного движения гиростата, приведенные к осям Кенига, имеют вид [1,2]

$$\begin{gathered}
Cq_1^{\cdot}+(C_3-C)q_2q_3+C_3\varphi_1^{\cdot}q_2+q_2g_3-q_3g_2+g_1^{\cdot}=M_{x_1'}\\
Cq_2^{\cdot}+(C-C_3)q_1q_3-C_3\varphi_1^{\cdot}q_1+g_1q_3-g_3q_1+g_2^{\cdot}=M_{x_2'}\\
C_3(q_3+\varphi_1^{\cdot})^{\cdot}+q_1g_2-q_2g_1+g_3^{\cdot}=M_{x_3'}\\
g_1^{\cdot}+Iq_1^{\cdot}+(g_2+Iq_2)\varphi_1^{\cdot}=w_1,\\
g_2^{\cdot}+Iq_2^{\cdot}-(g_1+Iq_1)\varphi_1^{\cdot}=w_2,\quad g_3^{\cdot}+I_3(q_3+\varphi_1^{\cdot})^{\cdot}=w_3\\
\beta_{i1}^{\cdot}+q_2\beta_{i3}-q_3\beta_{i2}=0\quad(i=1,\ 2,\ 3)\\
M_{x_1'}=-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U}{\partial\beta_{i3}}\beta_{i2},\quad M_{x_2'}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U}{\partial\beta_{i3}}\beta_{i1},\quad M_{x_3'}=0
\end{gathered}\tag{1.1}$$

Здесь g_i ($i=1,\ 2,\ 3$) — относительные кинетические моменты маховиков относительно осей Кенига, w_i — управляющие моменты, $M_{x_i'}$ — моменты гравитационных сил относительно тех же осей.

Изучаемое стационарное решение имеет вид

$$\begin{gathered}
\varphi_1^{\cdot}=\omega_1+\omega,\quad \Phi^{\cdot}=\omega_1\\
q_i=0,\quad \beta_{ij}=0,\quad i\neq j;\quad \beta_{ii}=1;\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3\\
g_1=g_2=0,\quad g_3=g_3^{\circ},\quad w_1=w_2=0,\quad g_3^{\circ}=-C_3\omega_1
\end{gathered}\tag{1.2}$$

Уравнения движения (1.1) допускают первые интегралы

$$\sum_{i=1}^{3}\beta_{ij}^2=1,\quad \sum_{i=1}^{3}\beta_{1i}\beta_{2i}=\sum_{i=1}^{3}\beta_{1i}\beta_{3i}=\sum_{i=1}^{3}\beta_{2i}\beta_{3i}=0$$

и интегралы, выражающие постоянство проекций кинетического момента гиростата на оси системы $O_1X_1X_2X_3$

$$
\begin{aligned}
&L_i + (Cq_1 + g_1)\beta_{i1} + (Cq_2 + g_2)\beta_{i2} + [C_3(q_3 + \varphi_1^{\cdot}) + g_3]\beta_{i3} = h_i \\
&L_1 = MR^2 (\Psi^{\cdot} \sin\Phi - \Phi^{\cdot} \sin\Psi \cos\Psi \cos\Phi) \\
&L_2 = -MR^2 (\Psi^{\cdot} \cos\Phi + \Phi^{\cdot} \sin\Psi \cos\Psi \sin\Phi) \\
&L_3 = MR^2\Phi^{\cdot} \cos^2\Psi \\
&h_1^{\circ} = 0, \quad h_2^{\circ} = 0, \quad h_3^{\circ} = M\sqrt{\varkappa P} + C_3(\omega_1 + \omega) + g_3^{\circ}
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

Исключая из уравнений (1.1) g_i с помощью (1.3), получим уравнения относительного движения гиростата в виде

$$
\begin{aligned}
&(C - I)\, q_1^{\cdot} = -(C - I)\, q_2^{\cdot}\varphi_1^{\cdot} + (q_3 + \varphi_1^{\cdot}) \sum_{i=1}^{3} (h_i - L_i)\, \beta_{i2} - \\
&- q_2 \sum_{i=1}^{3} (h_i - L_i)\, \beta_{i3} + M_{x_1'} - w_1 \\
&(C - I)\, q_2^{\cdot} = (C - I)\, q_1\varphi_1^{\cdot} - \\
&- (q_3 + \varphi_1^{\cdot}) \sum_{i=1}^{3} (h_i - L_i)\, \beta_{i1} + q_1 \sum_{i=1}^{3} (h_i - L_i)\, \beta_{i3} + M_{x_2'} - w_2 \\
&(C_3 - I_3)(q_3 + \varphi_1^{\cdot})^{\cdot} = q_2 \sum_{i=1}^{3} (h_i - L_i)\, \beta_{i1} - q_1 \sum_{i=1}^{3} (h_i - L_i)\, \beta_{i2} - w_3
\end{aligned}
$$

Приняв движение (1.2) за невозмущенное, обозначим возмущения переменных через β_{ij}', q_i', h_i', w_i', где

$$
\begin{aligned}
&\beta_{ij} = \beta_{ij}' \ (i \neq j), \quad \beta_{ii} = 1 + \beta_{ii}', \quad q_i = q_i' \\
&h_i = h_i' \ (i = 1, 2), \quad h_3 = h_3^{\circ} - \sqrt{\varkappa P}\, M + h_3' \\
&w_i = w_i' \ (i = 1, 2), \quad w_3 = -(C_3 - I_3)\varphi_1^{\cdot\cdot} + w_3'
\end{aligned}
$$

Опуская штрихи, запишем уравнения возмущенного движения в виде

$$
\begin{aligned}
&q_1^{\cdot} = h_{12}q_3 - (h_{13} + \omega^*)\, q_2 + \omega^* \sum_{i=1}^{3} h_{1i}\beta_{i2} + \\
&+ \beta_{13}\nu \sin 2\Phi + 2\beta_{23}\nu \sin^2\Phi + v_1 + Q_1 \\
&q_2^{\cdot} = (h_{13} + \omega^*)\, q_1 - h_{11}q_3 - \omega^* \sum_{i=1}^{3} h_{1i}\beta_{i1} - \\
&- 2\beta_{13}\nu \cos^2\Phi - \beta_{23}\nu \sin 2\Phi + v_2 + Q_2 \\
&q_3^{\cdot} = h_{31}q_2 - h_{32}q_1 + v_3 + Q_3 \\
&\beta_{ii}^{\cdot} = B_{ii}, \quad i = 1, 2, 3 \\
&\beta_{12}^{\cdot} = -q_3 + B_{12}, \quad \beta_{31}^{\cdot} = -q_2 + B_{31}, \quad \beta_{23}^{\cdot} = -q_1 + B_{23} \\
&\beta_{21}^{\cdot} = q_3 + B_{21}, \quad \beta_{13}^{\cdot} = q_2 + B_{13}, \quad \beta_{32}^{\cdot} = q_1 + B_{32} \\
&B_{i1} = q_3\beta_{i2} - q_2\beta_{i3}, \quad Q_1 = \sum_{i=1}^{3} h_{1i}B_{i1} + U_{1\beta} \\
&Q_2 = \sum_{i=1}^{3} h_{1i}B_{i2} + U_{2\beta}, \quad Q_3 = \sum_{i=1}^{3} h_{3i}B_{i3} \\
&h_{1j} = h_j / (C - I), \quad h_{3j} = h_j / (C_3 - I_3), \quad j = 1, 2 \\
&h_{13} = (h^{\circ} + h_3) / (C - I), \quad h_{33} = (h^{\circ} + h_3) / (C_3 - I_3) \\
&\omega^* = \omega_1 + \omega, \quad \nu = {}^3/_2\varkappa R^{-3} (C_3 - C) / (C - I)
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

Здесь v_i — управляющие моменты, связанные с w_i соотношениями

$$(C-I)v_1 = -w_1 + \omega^* h_2$$
$$(C-I)v_2 = -w_2 - \omega^* h_1, \quad (C_3 - I_3)v_3 = -w_3$$

Отметим, что B_{ij} имеют не ниже чем второй порядок малости относительно q_i, β_{ij}. Обусловленные гравитационными моментами члены $U_{1\beta}$, $U_{2\beta}$, зависящие только от β_{ij} и обращающиеся в нуль при $\beta_{ij} = 0$, имеют также второй порядок малости.

Задача оптимальной стабилизации формулируется в следующем виде: определить управления v_i в виде функций переменных q_i, β_{ij} так, чтобы тривиальное решение системы (1.4) было асимптотически устойчиво по переменным q_i, β_{ij} и при этом выполнялось условие минимума функционала интегрального типа

$$\int_0^\infty \Omega(q_1, q_2, q_3, \beta_{11}, \ldots, \beta_{33}, v_1, v_2, v_3, \Phi)\, d\Phi$$

2. Для решения задачи стабилизации исследуем периодическое решение линейной неоднородной системы вида

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{x}d + A(t)\,\mathbf{x} + \varphi(t) \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{x}$ — вектор с компонентами x_i $(i = 1, \ldots, n)$, $d = \mathrm{const}$ — параметр, величина которого определяется в дальнейшем, $A(t)$ — периодическая матрица периода T и размерности $n \times n$, удовлетворяющая условиям теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения, $\varphi(t) = \mathrm{col}\,\{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ — периодическая вектор-функция с периодом T, имеющая ограниченную производную.

Покажем, что для периодического решения этой системы справедлива оценка

$$\|\mathbf{x}(t) + \varphi(t)/d\| < c/d^2 \tag{2.2}$$

Рассмотрим систему

$$x_i^{\cdot} = dx_i + \varphi_i(t), \quad i = 1, \ldots, n$$

Периодическое решение i-го уравнения имеет вид

$$x_i(t) = -\frac{\varphi_i(t)}{d} + d^{-1}(1 + e^{dT})^{-1} \int_0^T \varphi_i^{\cdot}(t+\xi)\, e^{d(T-\xi)} d\xi$$

Определим норму $\mathbf{x}(t)$ как

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \sum_{i=1}^n \max_t |x_i(t)|$$

Тогда

$$\|\mathbf{x}(t) + \varphi(t)/d\| < c_1/d^2, \quad c_1 = \|\varphi^{\cdot}(t)\| \tag{2.3}$$

Будем искать периодическое решение системы методом последовательных приближений. Введем малый параметр $\varepsilon = 1/d$. Уравнение k-го приближения имеет вид

$$\mathbf{x}^{\cdot k} = \mathbf{x}^k d + A(t)\,\mathbf{x}^{k-1} + \varphi(t), \quad \mathbf{x}^{\cdot 0} = \mathbf{x}^0 d + \varphi(t)$$

Покажем, что последовательность $\mathbf{x}^k(t)$ сходится к $\mathbf{x}(t)$. Обозначая $\mathbf{x}^k(t) - \mathbf{x}^{k-1}(t) = \mathbf{y}^{k-1}(t)$, для $\mathbf{y}^k(t)$ получим

$$\mathbf{y}^k(t) = (1 - e^{dT})^{-1} \int_0^T A(t+\xi)\,\mathbf{y}^{k-1}(t+\xi)\, e^{d(T-\xi)} d\xi \tag{2.4}$$

$$\|\mathbf{y}^k(t)\| \leqslant \|A(t)\|\,\|\mathbf{y}^{k-1}(t)\|/d$$

Следовательно, для сходимости последовательности необходимо $\|A(t)\| < d$. Для $\|\mathbf{y}^\circ(t)\|$ имеем оценку

(2.5) $$\|\mathbf{y}^\circ(t)\| \leqslant \|A(t)\|\,\|\varphi(t)\| / d^2$$

Используя (2.4) и (2.5), оценим разность $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^\circ(t)$

(2.6) $$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^\circ(t)\| \leqslant \|\mathbf{x}(t) - \ldots - \mathbf{x}^k(t) + \mathbf{x}^k(t) - \ldots - \mathbf{x}^\circ(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{y}^k(t)\| \leqslant \|\mathbf{y}^\circ(t)\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A(t)\|^k}{d^k} \leqslant \frac{\|A(t)\|\,\|\varphi(t)\|}{d(d - \|A(t)\|)}$$

Из (2.6) и (2.3) следует, что

(2.7) $$\|\mathbf{x}(t) + \varphi(t) / d\| \leqslant (\|A(t)\|\,\|\varphi(t)\| + \|\varphi^{\cdot}(t)\|) / d^2 + O(d^3)$$

Таким образом неравенство (2.2) доказано. Аналогично можно показать, что метод последовательных приближений сходится и при замене независимой переменной t на τ вида $d\tau / dt = \omega_1(\tau)$, где $\omega_1(\tau)$ — периодическая положительная функция с периодом T_1.

3. Рассмотрим линейную систему (1.4) без членов Q_i, имеющую нулевое решение. Подынтегральную функцию минимизируемого функционала зададим, следуя [1], в виде

(3.1) $$\Omega_1 = F_1(q_i, \Phi) + F_2(\beta_{ij}, \Phi) + n\sum_{i=1}^{3} v_i^2 + \Lambda_1(q_i, \beta_{ij}, \Phi)$$

$$F_1 = \sum_{i,j=1}^{3} e_{ij}(\Phi)\, q_i q_j$$

$$F_2 = (4n)^{-1} \sum_{l=1}^{3} \Big(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}^{(l)} \beta_{ij} \Big)^2 +$$
$$+ \Big[\omega^* \sum_{i=1}^{3} h_{1i}\beta_{i1} + \beta_{13}\nu(1 + \cos 2\Phi) + \nu\beta_{23}\sin 2\Phi\Big] \times$$
$$\times \Big(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}^{(2)}\beta_{ij} \Big) - \Big[\omega^* \sum_{i=1}^{3} h_{1i}\beta_{i2} + \nu\beta_{13}\sin 2\Phi + \nu\beta_{23} \times$$
$$\times (1 - \cos 2\Phi)\Big]\Big(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}^{(1)}\beta_{ij} \Big)$$

Здесь F_1 и F_2 — положительно-определенные квадратичные формы с неопределенными коэффициентами $e_{ij}(\Phi)$ и $a_{ij}^{(l)}(\Phi)$ у переменных q_i и β_{ij} соответственно (положительная определенность F_2 показана ниже).

Оптимальную функцию Ляпунова V° разыскиваем в виде [1]

(3.2) $$V^\circ = \sum_{i,j=1}^{3} \Big[k\beta_{ij}^2 + 2\beta_{ij} \sum_{l=1}^{3} a_{ij}^{(l)}(\Phi)\, q_l\Big] + m\sum_{i=1}^{3} q_i^2$$

На основании теорем [3,4] приходим к уравнению в частных производных для V°

$$\frac{\partial V^\circ}{\partial \Phi} - \frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial V^\circ}{\partial q_i}\Big)^2 + \sum_{i=1}^{3}\Big(H_i \frac{\partial V^\circ}{\partial q_i} + \lambda_i q_i\Big) +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial V^\circ}{\partial \beta_{ij}} B_{ij} + F_1(q_i, \Phi) + F_2(\beta_{ij}, \Phi) + \Lambda_1(q_i, \beta_{ij}, \Phi) = 0$$

$$H_1 = h_{12}q_3 - (h_{13} + \omega^*)\, q_2 + \omega^* \sum_{i=1}^{3} h_{1i}\beta_{i2} + \beta_{13}\nu \sin 2\Phi +$$
$$+ 2\beta_{23}\nu \sin^2 \Phi$$
$$H_2 = (h_{13} + \omega^*)\, q_1 - h_{11}q_3 - \omega^* \sum_{i=1}^{3} h_{1i}\beta_{i1} - 2\beta_{13}\nu \cos^2 \Phi -$$
$$- \beta_{23}\nu \sin 2\Phi, \quad H_3 = h_{31}q_2 - h_{32}q_1$$
$$\lambda_1 = (\partial V^\circ / \partial\beta_{32} - \partial V^\circ / \partial\beta_{23}), \quad \lambda_2 = (\partial V^\circ / \partial\beta_{13} - \partial V^\circ / \partial\beta_{31})$$
$$\lambda_3 = (\partial V^\circ / \partial\beta_{21} - \partial V^\circ / \partial\beta_{12})$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых членах второго порядка, получим системы линейных дифференциальных уравнений для определения $a_{ij}^{(l)}$ (Φ) и алгебраическую систему для e_{ij} как функций параметров m, n, k и Φ. В частности, для $a_{13}^{(l)}$ имеем уравнения $(d = m \,/\, (2n))$

$$\frac{da_{13}^{(1)}}{d\Phi} = a_{13}^{(1)}d - (h_{13} + \omega^*)\, a_{13}^{(2)} + h_{32}a_{13}^{(3)} - m\nu \sin 2\Phi$$
$$\frac{da_{13}^{(2)}}{d\Phi} = a_{13}^{(2)}d + (h_{13} + \omega^*)\, a_{13}^{(1)} - h_{31}a_{13}^{(3)} - k + 2m\nu \cos^2 \Phi$$
$$\frac{da_{13}^{(3)}}{d\Phi} = a_{13}^{(3)}d - h_{12}a_{13}^{(1)} + h_{11}a_{13}^{(2)}$$
$$A(\Phi) = \begin{Vmatrix} 0 & -(h_{13} + \omega^*) & h_{32} \\ h_{13} + \omega^* & 0 & -h_{31} \\ -h_{13} & h_{11} & 0 \end{Vmatrix}$$
$$\varphi\,(\Phi) = \mathrm{col}\, \{- m\nu \sin 2\Phi, - k + 2m\nu \cos^2 \Phi,\ 0\}$$

На основании оценки (2.7) получим

$$a_{13}^{(1)} \approx m\nu \sin 2\Phi \,/\, d, \quad a_{13}^{(2)} \approx (k - 2m\nu \cos^2\Phi) \,/\, d, \quad a_{13}^{(3)} \approx 0$$

Остальные $a_{ij}^{(l)}$ имеют аналогичный вид. Более точные значения можно найти, используя метод последовательных приближений, обоснованный в п. 2.

Покажем теперь положительную определенность V° и F_2. Для установления знака F_2 с точностью до первого порядка перейдем от зависимых переменных β_{ij} к независимым углам Крылова согласно соотношениям

$$\beta_{13} \approx \psi, \quad \beta_{31} \approx -\psi; \quad \beta_{32} \approx \theta, \quad \beta_{23} \approx -\theta$$
$$\beta_{12} \approx \beta_{21} \approx \beta_{11} \approx \beta_{22} \approx \beta_{33} \approx 0$$

Из выражения (3.1) для F_2 и найденных приближений $a_{ij}^{(l)}$ (Φ) получим

(3.3)
$$F_2 = n\, \{\theta^2 F_2^{(1)} + \psi^2 F_2^{(2)} - 4\nu\theta\psi\, (\omega^* h_{13} - \nu)\}$$
$$F_2^{(i)} = 4k^2 \,/\, m^2 - \omega^{*2} h_{13}^2 - 4\nu\gamma_i^2\, (\nu - \omega^* h_{13})$$
$$\gamma_1 = \sin \Phi, \quad \gamma_2 = \cos \Phi$$

Выделяя в выражении для F_2 полный квадрат, получим, что F_2 положительно определена, если

(3.4)
$$F_2^{(i)} > 0, \quad i = 1, 2$$
$$4k^2 \,/\, m^2 > \omega^{*2} h_{13}^2, \quad 4k^2 \,/\, m^2 > (\omega^* h_{13} - 2\nu)^2$$

Покажем, что первые два неравенства эквивалентны двум вторым. Пусть $\nu(\nu - \omega^* h_{13}) > 0$, тогда

$$4k^2 / m^2 - \omega^{*2} h_{13}{}^2 - 4\nu(\nu - \omega^* h_{13})\gamma_i{}^2 \geqslant$$
$$\geqslant 4k^2 / m^2 - (\omega^* h_{13} - 2\nu)^2 > 0$$

т. е. получаем четвертое неравенство. Если $\nu(\nu - \omega^* h_{13}) < 0$, то

$$4k^2 / m^2 - \omega^{*2} h_{13}{}^2 - 4\nu(\nu - \omega^* h_{13})\gamma_i{}^2 \geqslant$$
$$\geqslant 4k^2 / m^2 - \omega^{*2} h_{13}{}^2 > 0$$

В итоге для положительной определенности F_2 имеем

$$\begin{aligned} &2k / m > \max\nolimits_{\Phi\in[0,2\pi]} |\omega^* h_{13}| \\ &2k / m > \max\nolimits_{\Phi\in[0,2\pi]} |\omega^* h_{13} - 2\nu| \end{aligned} \tag{3.5}$$

Коэффициенты формы F_1 имеют вид

$$e_{11} = nd^2 + a_{23}{}^{(1)} - a_{32}{}^{(1)}, \quad e_{22} = nd^2 + a_{31}{}^{(2)} - a_{13}{}^{(2)}$$
$$e_{33} = nd^2 + a_{12}{}^{(3)} - a_{21}{}^{(3)}, \quad 2e_{12} = a_{31}{}^{(1)} - a_{13}{}^{(1)} - a_{32}{}^{(2)} + a_{23}{}^{(2)}$$
$$2e_{23} = (h_{11} - h_{31})\, m - a_{21}{}^{(2)} + a_{12}{}^{(2)} - a_{13}{}^{(3)} + a_{31}{}^{(3)}$$
$$2e_{13} = (h_{32} - h_{12}) m - a_{21}{}^{(1)} + a_{12}{}^{(1)} - a_{32}{}^{(3)} + a_{23}{}^{(3)}$$

При достаточно больших d формы V° и F_1 будут положительно-определенными.

При выполнении условий (3.4) система стабилизируется по первому приближению. Члены более высокого порядка Λ_1 выберем в виде

$$\Lambda_1 = -\sum_{i,\,j=1}^{3} \frac{\partial V^\circ}{\partial \beta_{ij}} B_{ij}$$

На основании теоремы [3] управление имеет вид

$$v_i = -(2n)^{-1} \partial V^\circ / \partial q_i$$

Рассмотрим полную систему, описывающую относительное движение гиростата. Очевидно, что построенная функция V° (3.2) решает задачу стабилизации в силу полной системы уравнений, если критерий качества принять в виде

$$\Omega^\circ = \Omega_1 - \sum_{i=1}^{3} Q_i \frac{\partial V^\circ}{\partial q_i}$$

Так как дополнительные члены имеют порядок не ниже третьего, то знакоопределенность формы Ω_1 не нарушится.

Таким образом, построенное управление

$$w_l = (C - I)\Big(dq_l + (2n)^{-1} \sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}^{(l)} \beta_{ij}\Big) - (-1)^l \omega^* h_{3-l}; \quad l = 1, 2$$
$$w_3 = (C_3 - I_3)\Big(dq_3 + (2n)^{-1} \sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}^{(3)} \beta_{ij}\Big)$$

обеспечивает при условии (3.5) оптимальную стабилизацию движения (1.2), причем подынтегральная функция имеет вид (3.1).

Автор благодарит своего научного руководителя С. Н. Шиманова за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 5 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крементуло В. В.* Об оптимальной стабилизации вращательного движения гиростата в ньютоновском поле сил. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
2. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
3. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн. Малкина И. Г.: Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
4. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.