Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.381

ВОЗМУЩЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКИЕ К СЛУЧАЮ ЛАГРАНЖА

Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько

(Москва, Одесса)

Исследуются возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. Приведены условия возможности усреднения уравнений движения по углу нутации, получена усредненная система уравнений. Рассмотрена конкретная механическая модель возмущений, отвечающая движению тела в среде с линейной диссипацией. Построено численное решение усредненной системы.

1. Исходные уравнения и невозмущенное движение. Рассматривается возмущенное движение относительно неподвижной точки динамически симметричного тяжелого твердого тела в случае возмущений произвольной природы. Уравнения движения имеют вид

$$
\begin{aligned}
&Ap^{\cdot} + (C-A)qr = mgl\sin\theta\cos\varphi + \varepsilon M_1\\
&Aq^{\cdot} + (A-C)pr = -mgl\sin\theta\sin\varphi + \varepsilon M_2\\
&Cr^{\cdot} = \varepsilon M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \varphi, \theta, \psi), \quad i = 1,2,3\\
&\varphi^{\cdot} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta\\
&\theta^{\cdot} = p\cos\varphi - q\sin\varphi, \quad \psi^{\cdot} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Динамические уравнения (1.1) записаны в проекциях на главные оси инерции тела. Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости на эти оси, εM_i ($i = 1, 2, 3$) — проекции вектора возмущающих моментов на те же оси; φ, θ, ψ — углы Эйлера [1]; ε — малый параметр, характеризующий величину возмущений (в частности, при $\varepsilon = 0$ система (1.1) описывает движение в случае Лагранжа [1]); m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, l — расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела, A — экваториальный, а C — осевой моменты инерции тела относительно неподвижной точки O.

Ставится задача исследовать поведение решения системы (1.1) при значениях малого параметра ε, отличных от нуля, на достаточно большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$. Для решения задачи применяется метод усреднения [2, 3].

Усреднение по движению Эйлера — Пуансо для несимметричного твердого тела было впервые проведено в [4]. В отличие от методики усреднения по движению Эйлера — Пуансо усреднение по движению Лагранжа позволяет рассматривать в качестве порождающего решения движение с немалыми по величине моментами внешних сил.

Исследованию возмущенных движений, близких к движению в случае Лагранжа, посвящены работы [5–8]. В [5] использована методика эталонных уравнений. В работе [6] метод усреднения применен для специального вида порождающего решения. В статье [7] предложено проводить процедуру численного усреднения. В [8] движение тела, мало отличающегося от гироскопа Лагранжа, изучалось с помощью теоремы о сохранении движений.

Ниже развивается процедура усреднения системы (1.1) при произвольных начальных условиях для возмущений, допускающих усреднение по углу нутации θ. Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка ε на интервале времени, за который тело совершит $\sim\varepsilon^{-1}$ оборотов.

Приведем сначала необходимые соотношения для невозмущенного движения [1], т. е. при $\varepsilon = 0$. Первыми интегралами уравнений движения для невозмущенной системы (1.1) служат

$$G_z = A\sin\theta\,(p\sin\varphi + q\cos\varphi) + Cr\cos\theta = c_1 \tag{1.2}$$
$$H = {}^1/_2\,[A\,(p^2+q^2) + Cr^2] + mgl\cos\theta = c_2,\quad r = c_3$$

Здесь G_z — проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz, H — полная энергия тела, r — проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии, $c_i\ (i = 1, 2, 3)$ — произвольные постоянные ($c_2 \geqslant -mgl$).

Известно [1] выражение для угла нутации θ в невозмущенном движении как функции времени t, интегралов движения (1.2) и произвольной фазовой постоянной β

$$u = \cos\theta = u_1 + (u_2 - u_1)\,\mathrm{sn}^2\,(\alpha t + \beta) \tag{1.3}$$
$$\alpha = [mgl\,(u_3 - u_1)\,/\,(2A)]^{1/2}$$
$$\mathrm{sn}\,(\alpha t + \beta) = \sin\,\mathrm{am}\,(\alpha t + \beta,\ k)$$
$$k^2 = (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1},\quad 0 \leqslant k^2 \leqslant 1 \tag{1.4}$$

Здесь sn — эллиптический синус [9], k — модуль эллиптических функций, через u_1, u_2, u_3 обозначены вещественные корни кубического многочлена

$$Q\,(u) = A^{-2}\,[(2H - Cr^2 - 2mglu)(1 - u^2)A - \tag{1.5}$$
$$-\,(G_z - Cru)^2],\quad -1 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant 1 \leqslant u_3 < +\infty$$

Соотношения между корнями многочлена $Q\,(u)$ из (1.5) и первыми интегралами (1.2) могут быть записаны, согласно теореме Виета, следующим образом:

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{H}{mgl} - \frac{Cr^2}{2mgl} + \frac{C^2r^2}{2Amgl} \tag{1.6}$$
$$u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = \frac{G_zCr}{Amgl} - 1$$
$$u_1u_2u_3 = -\frac{H}{mgl} + \frac{Cr^2}{2mgl} + \frac{G_z^2}{2Amgl}$$

Переменные φ и ψ получаются квадратурами из следующих уравнений [1]:

$$\varphi^\cdot = r - \frac{(G_z - Cru)\,u}{A\,(1-u^2)},\quad \psi^\cdot = \frac{G_z - Cru}{A\,(1-u^2)} \tag{1.7}$$

Функция u, задаваемая соотношением (1.3), зависит от четырех постоянных интегрирования G_z, H, r и β. Последующее интегрирование уравнений (1.7) даст еще две произвольные постоянные. Таким образом, формулы (1.2) — (1.7) описывают общее решение системы (1.1) при $\varepsilon = 0$.

2. Процедура усреднения. Приведем уравнения возмущенного движения (1.1) к виду, допускающему применение метода усреднения [2, 3]. Для этого выделим медленные и быстрые переменные. В рассматриваемой задаче первые интегралы (1.2) будут для возмущенного движения (1.1) медленными переменными. Быстрыми переменными являются углы собственного вращения φ, нутации θ, прецессии ψ.

Используя соотношения (1.2) как формулы преобразования от переменных $(p, q, r, \varphi, \theta, \psi)$ к переменным $(G_z, H, r, \varphi, \theta, \psi)$, приведем первые три уравнения (1.1) к виду

$$
\begin{aligned}
&G_z^{\cdot} = \varepsilon[(M_1 \sin\varphi + M_2 \cos\varphi)\sin\theta + M_3 \cos\theta] \\
&H^{\cdot} = \varepsilon\,(M_1 p + M_2 q + M_3 r) \\
&r^{\cdot} = \varepsilon C^{-1} M_3, \quad M_i = M_i\,(p, q, r, \varphi, \theta, \psi), \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Здесь и в трех последних (кинематических) уравнениях (1.1) подразумевается, что переменные p, q, r при помощи (1.2) выражены как функции G_z, H, r, φ, θ, ψ и подставлены в (1.1), (2.1). Начальные значения медленных переменных G_z, H, r могут быть вычислены при помощи (1.2).

Правые части уравнений (2.1) содержат три быстрые переменные, что представляет трудность для применения метода усреднения, связанную с возможностью появления нелинейных резонансов. Для исключения этой трудности потребуем, чтобы правые части уравнений (2.1) для медленных переменных зависели фактически лишь от одной быстрой переменной — угла нутации θ и были бы периодическими функциями θ с периодом 2π. Тогда уравнения (2.1) можно усреднить по θ и получить уравнения первого приближения. Оказывается, что ряд прикладных задач обладает указанным свойством и допускает усреднение по одной переменной — углу нутации θ.

Приведем некоторые достаточные условия возможности усреднения уравнений (2.1) только по углу нутации θ. При фиксированных значениях медленных переменных правые части уравнений (2.1), подлежащих усреднению, содержат комбинации следующего вида:

$$
M_1 \sin\varphi + M_2 \cos\varphi, \quad M_1 p + M_2 q, \quad M_3
$$

Потребуем, чтобы путем тождественных преобразований эти комбинации могли быть представлены как функции от медленных переменных и от угла нутации θ, периодические по θ с периодом 2π, т. е.

$$
\begin{aligned}
&M_1 \sin\varphi + M_2 \cos\varphi = M_1^*\,(G_z, H, r, \theta) \\
&M_1 p + M_2 q = M_2^*\,(G_z, H, r, \theta) \\
&M_3 = M_3^*\,(G_z, H, r, \theta)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Заметим, что из соотношений (1.2) вытекают равенства

$$
\begin{aligned}
&p \sin\varphi + q \cos\varphi = (G_z - Cr\cos\theta)\,/\,(A \sin\theta) \\
&p^2 + q^2 = [2(H - mgl\cos\theta) - Cr^2]\,/\,A
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Следовательно, комбинации вида (2.3) выражаются только через медленные переменные и угол нутации θ, причем они периодичны по θ с периодом 2π. Поэтому комбинации (2.3) приводятся к виду (2.2).

Сопоставляя соотношения (2.2) и (2.3), видим, что если возмущающие моменты M_i удовлетворяют условиям

$$M_1 = pf, \quad M_2 = qf, \quad M_3 = M_3^* \tag{2.4}$$

или условиям

$$M_1 = F \sin\varphi, \quad M_2 = F\cos\varphi, \quad M_3 = M_3^* \tag{2.5}$$

где произвольные функции f, F, M_3^* имеют вид

$$\begin{aligned} &f = f(G_z, H, r, \theta), \quad F = F(G_z, H, r, \theta) \\ &M_3^* = M_3^*(G_z, H, r, \theta) \end{aligned} \tag{2.6}$$

и периодичны по θ с периодом 2π, то налагаемые требования (2.2) выполняются.

Таким образом, достаточными условиями возможности усреднения уравнений медленных переменных (2.1) по углу нутации θ для возмущенного движения Лагранжа являются требования (2.4) или (2.5), налагаемые на моменты приложенных сил. В дальнейшем предполагаются выполненными общие (необходимые и достаточные) условия (2.2) или, в частности, достаточные условия (2.4) или (2.5) (вместе с (2.6)), что обеспечивает справедливость соотношений (2.2). Система (2.1) тогда может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} &G_z^\cdot = \varepsilon F_1(G_z, H, r, \theta), \quad F_1 = M_1^* + M_3^*\cos\theta \\ &H^\cdot = \varepsilon F_2(G_z, H, r, \theta), \quad F_2 = M_2^* + M_3^* r \\ &r^\cdot = \varepsilon F_3(G_z, H, r, \theta), \quad F_3 = C^{-1}M_3^* \end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь F_1, F_2, F_3 — 2π-периодические функции θ.

Предлагается проводить исследование возмущенного движения в медленных переменных u_i $(i = 1, 2, 3)$, связанных с G_z, H, r соотношениями (1.6) и более удобных для рассмотрения. При этом не требуется разрешать кубическое уравнение (1.5) относительно u_i. Медленные переменные G_z, H, r удается выразить через u_i из (1.6) следующим образом:

$$\begin{aligned} &G_z = (Amgl)^{1/2}(u_1 + u_2 + u_3 + u_1u_2u_3 + \delta_1 R)^{1/2} \times \\ &\quad \times \delta_2 \operatorname{sign}(1 + u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3) \\ &H = {}^1/_2\, mgl\, [(u_1 + u_2 + u_3)(1 + A/C) + (\delta_1 R - u_1u_2u_3)\times \\ &\quad \times(1 - A/C)] \\ &r = \delta_2 C^{-1}(Amgl)^{1/2}(u_1 + u_2 + u_3 + u_1u_2u_3 - \delta_1 R)^{1/2} \\ &R = [(1 - u_1^2)(1 - u_2^2)(u_3^2 - 1)]^{1/2} \\ &\delta_1 = \operatorname{sign}(G_z^2 - C^2r^2), \quad \delta_2 = \operatorname{sign} r \end{aligned} \tag{2.8}$$

Величины δ_1, δ_2 в начальный момент определяются по начальным условиям для G_z, r. Если в процессе движения одна или обе величины $G_z^2 - C^2r^2$, r проходят через нуль, то возможна смена знаков δ_1, δ_2, для определения которых можно воспользоваться исходной системой (2.7).

Соотношения (1.6) запишем в сокращенном виде

$$S_i(u_1, u_2, u_3) = \Phi_i(G_z, H, r), \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.9}$$

где S_i, Φ_i — известные функции своих аргументов (см. (1.6)). Дифференцируя по времени (2.9) и подставляя вместо $G_z^{\cdot}$, $H^{\cdot}$, $r^{\cdot}$ выражения (2.7), получим соотношения

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial S_i}{\partial u_j}u_j^{\cdot} = \varepsilon Z_i(u_1, u_2, u_3, \theta), \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.10}$$

Здесь

$$Z_i = \frac{\partial\Phi_i}{\partial G_z}F_1 + \frac{\partial\Phi_i}{\partial H}F_2 + \frac{\partial\Phi_i}{\partial r}F_3, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.11}$$

Далее требуется разрешить линейные уравнения (2.10) относительно производных $u_i^{\cdot}$. Определитель D линейной системы (2.10) равен

$$D = \det(\partial S_i / \partial u_j) = (u_1 - u_2)(u_1 - u_3)(u_2 - u_3)$$

и по предположению отличен от нуля. Частные производные, фигурирующие в (2.11), могут быть при помощи равенств (2.8) представлены в виде функций только от переменных u_i.

Таким образом, после разрешения системы (2.10) относительно производных искомая система уравнений для медленных переменных u_i принимает вид, аналогичный (2.7)

$$\begin{gathered} u_i^{\cdot} = \varepsilon V_i(u_1, u_2, u_3, \theta), \quad i = 1, 2, 3 \\ V_i = V_{i1}F_1^* + V_{i2}F_2^* + V_{i3}F_3^*, \qquad V_{ij} = V_{ij}(u_1, u_2, u_3), \\ j = 1, 2, 3 \end{gathered} \tag{2.12}$$

причем имеем

$$\begin{aligned} V_{11} &= \frac{G_z - Cru_1}{Amgl\,(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \\ V_{12} &= \frac{u_1^2 - 1}{mgl\,(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \\ V_{13} &= \frac{C}{mgl\,(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)}\left[\left(\frac{C}{A} - 1\right)ru_1^2 - \frac{G_z}{A}u_1 + r\right] \end{aligned} \tag{2.13}$$

Здесь вместо G_z, r нужно подставить соответствующие формулы (2.8). Функции V_{2j}, V_{3j} $(j = 1, 2, 3)$ получаются из соответствующих выражений (2.13) для того же значения j путем циклической перестановки индексов у величин u_i. Функции F_i^* получаются подстановкой в F_i из (2.7) выражений для интегралов (2.8). Начальные значения u_i° для переменных u_i вычисляются по начальным данным G_z°, H°, r° при помощи соотношений (1.6).

Процедура усреднения уравнений (2.12) для медленных переменных u_i первого приближения состоит в следующем [2, 3]. Подставим в правые части системы (2.12) быструю переменную θ из выражения (1.3) для невозмущенного движения

$$\theta = \arccos\left[u_1 + (u_2 - u_1)\,\mathrm{sn}^2(\alpha t + \beta)\right] \tag{2.14}$$

После подстановки (2.14) правые части системы (2.12) будут периодическими функциями t с периодом $2\mathrm{K}(k) / \alpha$, где k, α определены соотношениями (1.3), (1.4). Усредняя правые части полученной системы по t, получим в медленном времени $\tau = \varepsilon t$ усредненную систему первого приближения (штрихом обозначено дифференцирование по τ, а за усредненными переменными сохранены прежние обозначения)

$$u_i' = U_i(u_1, u_2, u_3), \quad u_i(0) = u_i^\circ, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.15}$$

Здесь

$$U_i(u_1, u_2, u_3) = \frac{\alpha}{2K(k)} \int\limits_0^{2K/\alpha} V_i(u_1, u_2, u_3, \theta(t))\, dt \tag{2.16}$$

причем в качестве $\theta = \theta(t)$ в (2.16) подставлено выражение (2.14).

Итак, согласно предлагаемой методике, исследование возмущенного движения Лагранжа проводится следующим образом. Пусть возмущающие моменты εM_i удовлетворяют условиям (2.2) или, в частности, (2.4), (2.5) (вместе с (2.6)). Вычислим последовательно функции M_i^*, F_i^*, V_i ($i = 1, 2, 3$) при помощи соотношений (2.2), (2.7), (2.12), (2.13). После этого усредним, согласно (2.16), функции V_i, используя выражения (1.3), (1.4), (2.14), и составим усредненную систему (2.15). Система (2.15) значительно проще, чем исходная система (1.1), так как она имеет меньший порядок (третий вместо шестого), автономна и не содержит быстрых осцилляций. После исследования и решения системы (2.15) для u_i исходные медленные переменные G_z, H, r восстанавливаются по формулам (2.8). Быстрые переменные φ, θ, ψ могут быть найдены при помощи соотношений (1.7), (2.14). При этом, согласно общим теоремам метода усреднения [2,3], медленные переменные u_i или G_z, H, r определяются с погрешностью порядка ε, а быстрые переменные — с погрешностью порядка единицы на интервале изменения времени t порядка ε^{-1}.

3. Возмущенное движение твердого тела при линейных диссипативных моментах. В качестве примера развитой методики исследуем возмущенное движение Лагранжа с учетом моментов, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. Будем считать, что возмущающие моменты εM_i ($i = 1, 2, 3$) имеют вид [10]

$$M_1 = -ap, \quad M_2 = -aq, \quad M_3 = -br, \quad a, b > 0 \tag{3.1}$$

где a, b — некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела. Моменты (3.1) удовлетворяют достаточным условиям (2.4), (2.6) возможности усреднения только по углу нутации θ. Система (2.1) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} G_z^{\cdot} &= -\varepsilon\,[a\,(p \sin\varphi + q\cos\varphi)\sin\theta + br\cos\theta] \\ H^{\cdot} &= -\varepsilon\,[a\,(p^2 + q^2) + br^2] \\ r^{\cdot} &= -\varepsilon\, bC^{-1} r \end{aligned} \tag{3.2}$$

Проинтегрировав третье уравнение (3.2), получим (r° — произвольное начальное значение осевой скорости вращения)

$$r = r^\circ \exp(-\varepsilon b C^{-1} t) \tag{3.3}$$

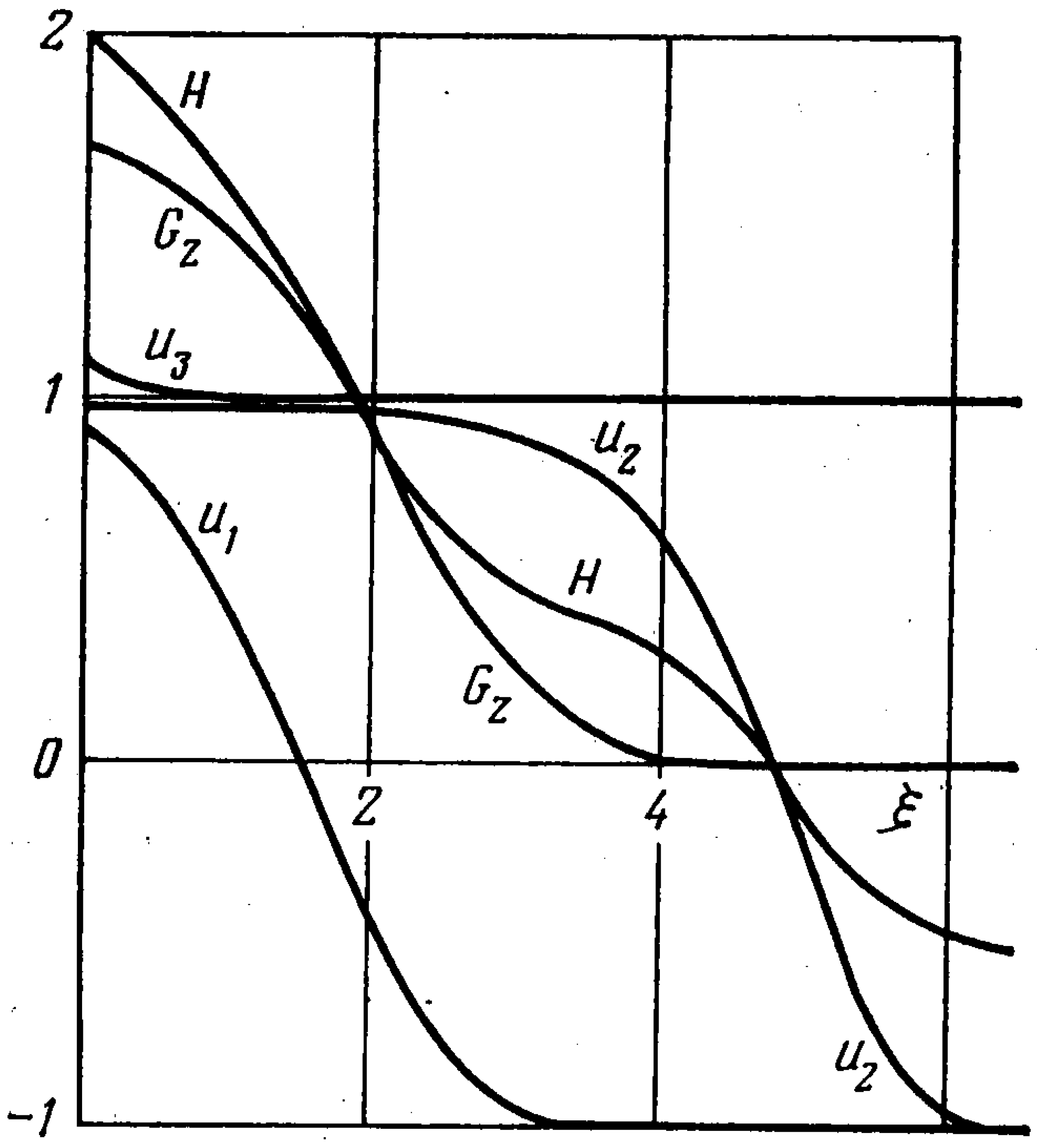
Согласно процедуре п. 2, переходим к новым медленным переменным u_i и выполняем усреднение согласно (2.16). Получаем усредненную систему (2.15) в медленном времени $\tau = \varepsilon t$ вида

$$\begin{aligned} u_1' = -\frac{1}{mgl\,(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \Big[& b\frac{C}{A} r^2 u_1^2 - a\frac{C}{A} r^2 (u_1^2 - 1) - \\ & - 2\frac{a}{A} mgl\,(u_1^2 - 1)\,v + 2\frac{a}{A} H\,(u_1^2 - 1) - \frac{C}{A}\left(b - a\frac{C}{A}\right) r^2 u_1 v - \end{aligned} \tag{3.4}$$

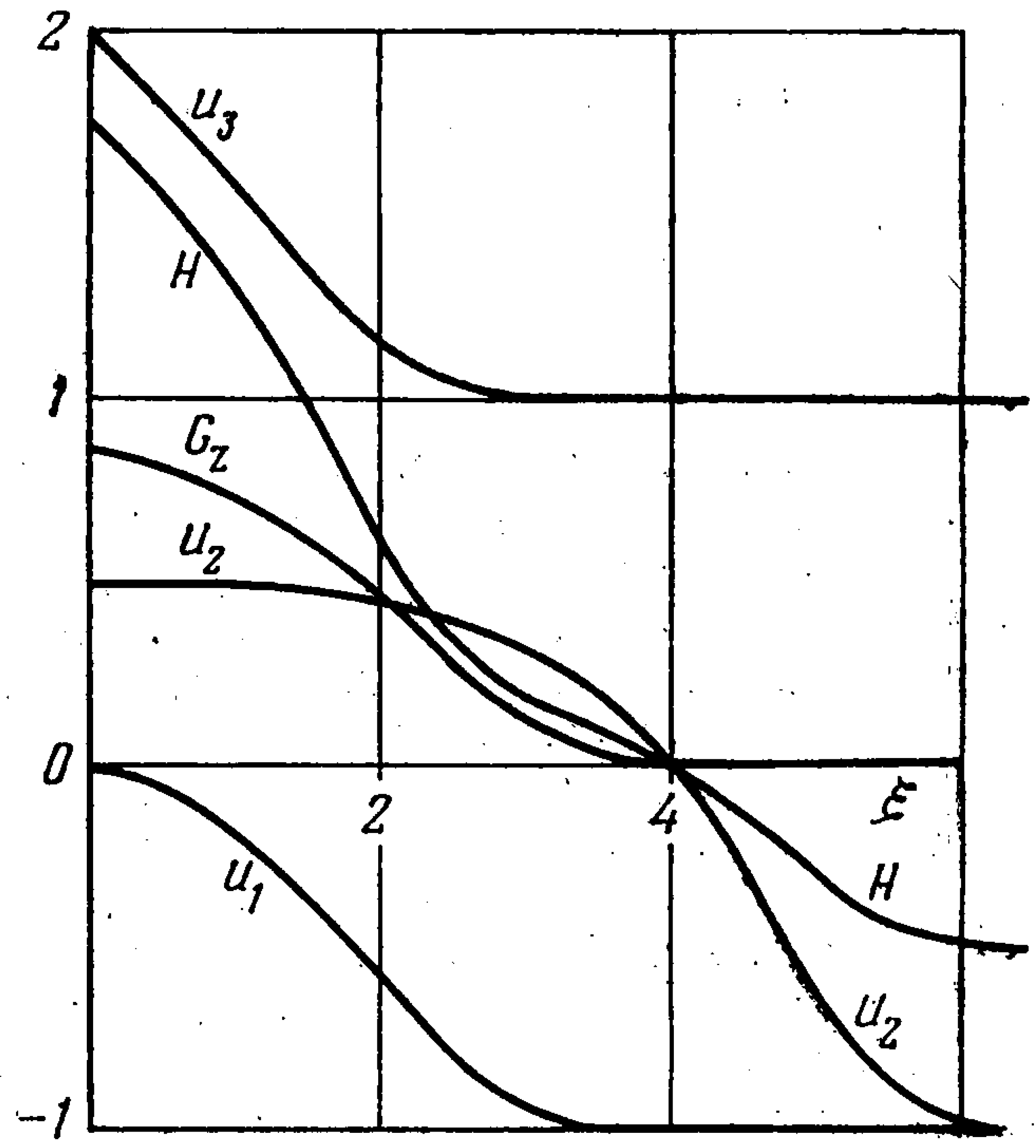
$$-\frac{C}{A}\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{C}\right)G_z r u_1+\frac{a}{A^2}G_z^2+\frac{1}{A}\left(b-a\frac{C}{A}\right)G_z r v\Big]$$

$$v = u_3 - (u_3 - u_1)\,\mathrm{E}(k)\,/\,\mathrm{K}(k)$$

Здесь вместо G_z, H, r, k подставляются их выражения (1.4), (2.8). Уравнения для u_2, u_3 получаются из (3.4) циклической перестановкой индексов у u_i. Однако при этой



Фиг. 1



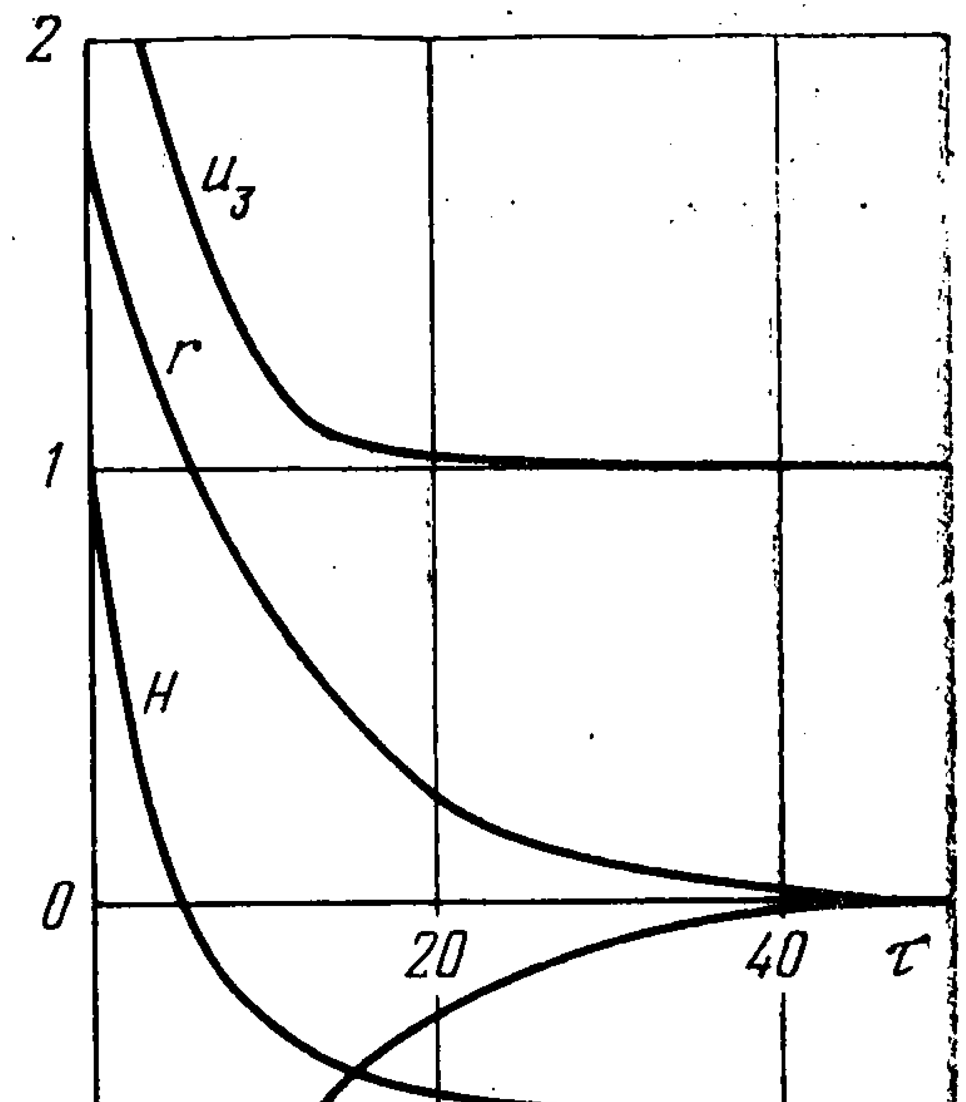
Фиг. 2

перестановке выражение v, где $\mathrm{K}(k)$, $\mathrm{E}(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, следует оставить неизменным во всех трех уравнениях.

Усредненная система (3.4) интегрировалась численно на ЭВМ для $\tau \geqslant 0$ при разных начальных условиях и параметрах задачи. Приведем результаты расчетов для трех случаев, отвечающих следующим начальным данным:

	u_1°	u_2°	u_3°	θ°
1)	0.913	0.996	1.087	5°
2)	0	0.5	2	60°
3)	−0.992	−0.985	2.992	170°

Приведенные данные соответствуют волчку, получившему в начальный момент угловую скорость вращения вокруг оси динамической симметрии, равную $r^\circ = \sqrt{3}$, и отклоненному на угол θ° от вертикали. Принимаем, кроме того, $A = 1.5$, $C = 1$, $a = 0.125$, $b = 0.1$, $mgl = 0.5$. Используя значения u_i, найденные в результате численного интегрирования, определяем переменные G_z, H, r по формулам (2.8).



Фиг. 3

На фиг. 1—3 изображены графики функций u_i $(i = 1, 2, 3)$, G_z, H, r для указанных трех случаев. Полная энергия H монотонно убывает, асимптотически приближаясь к значению $H = -mgl = -0.5$. Проекция вектора кинетического момента на вертикаль G_z в случаях *1*, *2* монотонно убывает, а в случае *3* монотонно возрастает и во всех случаях стремится к нулю. Величины u_1, u_2 монотонно убывают и стремятся к -1, а u_3 асимптотически приближается к $+1$. При этом, как следует из (1.3), имеем $\cos\theta \to -1$ $(\theta \to \pi)$.

Таким образом, под действием внешней диссипации твердое тело при любых начальных условиях стремится к единственному устойчивому (нижнему) положению равновесия. В случаях *1*, *2* убывание переменных происходит очень медленно. Поэтому в этих случаях в системе (3.4) оказалось удобным провести замену независимой медленной переменной $\xi = \ln(1 + \tau)$. Правильность счета контролировалась тем, что полученные по численным данным и формулам (2.8) значения r практически совпадают с точным решением (3.3).

Аналогичным образом можно провести процедуру усреднения для движения твердого тела в случае Лагранжа с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Соответствующие формулы для моментов вязких сил получены в [11].

Поступила 24 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.— Л., Гостехиздат, 1946.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1974.
3. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1971.
4. *Черноусько Ф. Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
5. *Кузьмак Г. Е.* Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М., «Наука», 1970.
6. *Гробов В. А., Коцюба А. В.* Нестационарное пространственное движение летательного аппарата, входящего в атмосферу с гиперзвуковой скоростью. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 12.
7. *Гольдштейн Ю. М., Пеня В. Н.* К исследованию движения асимметричного твердого тела при произвольных углах нутации с использованием метода усреднения. В сб.: Динамика и управление движением. Киев, «Наукова думка», 1978.
8. *Ковалев А. М.* Геометрическое доказательство некоторых теорем о сохранении интегралов движения. В сб.: Механика твердого тела, вып. 7. Киев, «Наукова думка», 1974.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
10. *Кошляков В. Н.* О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде. ПММ, 1953, т. 17, вып. 2.
11. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, заполненными жидкостью при малых числах Рейнольдса. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6,