

При обобщенном плоском напряженном состоянии v^{\pm} нужно заменить на $v^{\pm} / (1 - v^{\pm})$.

Результаты работы можно обобщить на случай температурной задачи, если в соотношениях (1.1) добавить члены, учитывающие влияние температуры.

Поступила 10 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Плевако В. П. Сосредоточенная сила внутри сцепленных полупространств. Основания, фундаменты, и механика грунтов, 1969, № 3.
2. Плевако В. П. Неоднородный слой, сцепленный с полупространством, под воздействием внутренних и внешних сил. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
3. Плевако В. П., Керевич А. А. Неоднородный слой, сцепленный с полупространством, под воздействием внешних сил. Прикл. механ., 1977, т. 13, № 5.

УДК 539.375

АНАЛИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЕ С ТРЕЩИНОЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В. Г. Борисковский

(Донецк)

Определяется коэффициент при сингулярной части решения задачи о продольных колебаниях пластины с прямолинейной трещиной. Используется метод конечных элементов при введении специального конечного элемента, учитывающего наличие особенности на краю трещины.

Метод конечных элементов применялся к динамическим задачам линейной механики разрушения с неподвижной трещиной при исследовании дифракции ударной волны на трещине продольного сдвига [1], и результаты были получены с высокой погрешностью. В подобных нестационарных задачах более точные результаты достигнуты при использовании разностных схем [2]. Ниже показано, что в задачах о колебаниях применение метода конечных элементов оказывается эффективным.

1. Предположим, что на тело с трещиной, помимо гармонической составляющей, действует статическая растягивающая нагрузка, такая, что налегания берегов трещины не происходит. На части границы тела заданы смещения, и, следовательно, матрица жесткости системы невырожденная. Последнее несущественно в статике, так как перемещения тела как жесткого целого не влияют на коэффициенты интенсивности, но при нахождении форм свободных колебаний это необходимое условие. Хотя в таком случае отсутствуют аналитические решения, точность расчета, как будет показано ниже, можно оценить другим путем.

Уравнения движения упругого тела без затухания при действии гармонической нагрузки имеют вид

$$(1.1) \quad Mx'' + Kx = f \cos \omega t$$

Здесь M — матрица массы, K — матрица жесткости, x — вектор перемещений системы, f — вектор нагрузок. При $\omega = 0$ имеем уравнения равновесия

$$(1.2) \quad Kx = f$$

Обозначив ω_i^2 собственные числа в порядке возрастания, $x^{(i)}$ — собственные векторы обобщенной задачи на собственные значения

$$(1.3) \quad Kx = \omega^2 Mx, \quad x^{(i)T} Mx^{(j)} = \delta_{ij}$$

запишем при $\omega \neq \omega_i$ и $x^*(0) = 0$ общее решение уравнения (1.1) (β_i — неопределенные коэффициенты)

$$(1.4) \quad x(t) = \sum x^{(i)} \left[\frac{(x^{(i)T} f)}{\omega_i^2 - \omega^2} \cos \omega t + \beta_i \cos \omega_i t \right]$$

Для проверки достаточно подставить (1.4) в (1.1), умножить последовательно на $x^{(i)T} M$ (индекс T означает транспонирование) и воспользоваться (1.3) [3].

Аналогично найдем, что статическое решение

$$(1.5) \quad x_* = \sum \frac{(x^{(i)T} f)}{\omega_i^2} x^{(i)}$$

Вектор перемещений упругого тела линейным функционалом однозначно определяет коэффициенты интенсивности.

Обозначим K_* статический коэффициент интенсивности, соответствующий x_* , $K^{(i)}$ — коэффициенты интенсивности, соответствующие $x^{(i)}$. Размерность $K^{(i)}$ определяется с учетом (1.3).

Введем безразмерные коэффициенты

$$(1.6) \quad \alpha_i = \frac{K^{(i)} (x^{(i)T} f)}{K_* \omega_i^2}, \quad K_* = \sum K^{(i)} \frac{(x^{(i)T} f)}{\omega_i^2}$$

Из (1.4), (1.5) получим ($K(t)$ — динамический коэффициент интенсивности)

$$(1.7) \quad x(t) = \frac{K(t)}{K_*} = \sum \left(\alpha_i \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega^2} \cos \omega t + \beta_i' \cos \omega_i t \right)$$

при условии

$$(1.8) \quad \sum \alpha_i = 1$$

Условие (1.8) может служить критерием точности расчета динамического коэффициента интенсивности, если входящий в выражение для α_i (1.6) статический коэффициент интенсивности K_* рассчитывать не по формуле (1.5) и второй формуле (1.6), а непосредственно из статической системы уравнений равновесия (1.2). Кроме того, в области частот $\omega < \omega_1$ условие (1.8) показывает необходимое число учитываемых в (1.7) форм колебаний.

Таким образом, погрешность нахождения динамических коэффициентов интенсивности будет оцениваться разностью $|\sum \alpha_i - 1|$. Иначе говоря, для оценки погрешности нахождения $K(t)$ сравниваются динамический коэффициент интенсивности при нулевой частоте и статический коэффициент интенсивности, вычисленный из уравнений равновесия. Это следует из эквивалентности второго равенства (1.6) и (1.8). Проведенные численные эксперименты показали достаточность учета в области малых частот восьми первых форм колебаний, указанная погрешность вычисления динамического коэффициента интенсивности составила не более 6%. Для случаев нагружения, соответствующих нормальному разрыву трещины, оказывается, что всегда имеются два достаточно больших положительных коэффициента α_i , $i < 3$, а отрицательные α_i малы по модулю и встречаются лишь при $i \geq 3$, следовательно, величина

$$\left| \sum \alpha_i \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega^2} \right| > 1$$

и возрастает при возрастании ω от нуля до ω_1 .

При учете возбуждаемых свободных колебаний амплитуда коэффициента интенсивности может еще более повыситься. Например, пусть $x(0) = 0$, тогда

$$\beta_i' = -\alpha_i \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega^2}$$

Поскольку ω_i , как правило, велики, то функции $\cos \omega_i t$ могут за короткий промежуток времени достичь экстремума одновременно, причем так, что знаки их совпадут со знаками β_i' . Тогда максимум $x(t)$ будет дополнительно характеризоваться суммой

$$\sum |\alpha_i| \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega^2} > \left| \sum \alpha_i \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega^2} \right| > 1$$

Для нахождения сингулярных полей напряжений у трещины необходимо значительное уменьшение диаметра конечных элементов вблизи трещины, и, следовательно, увеличение порядка рассматриваемых систем уравнений, что делает расчет неэффективным. Этого можно избежать, если поместить в вершину трещины сингулярный конечный элемент, поле перемещений в котором аппроксимируется на основании аналитических решений для области с трещиной. В данной работе при построении сингулярного элемента использованы разложения полей перемещений в окрестности вершины трещины [4]. Универсальность этих разложений показана в [5]. Вывод матрицы жесткости сингулярного элемента и примеры применения его к плоским статическим задачам описаны в работе [6]. Точность использования такого конечного элемента достаточно высокая, несмотря на несовместность перемещений на границе при стыковке с обычными конечными элементами. При сравнении с аналитическими статическими решениями для коротких длин трещин погрешность вычисления коэффициентов интенсивности не превышает 2%. Аналогичный метод применялся к задачам изгиба [7,8].

2. Обобщенную задачу на собственные значения (1.3) при больших порядках матриц нельзя свести к обычной задаче с одной матрицей (обращение матриц сопряжено с большой погрешностью) и невозможно редуцирование порядка матриц из-за необходимости точного определения собственных векторов. Методы, использующие специфику проблемы (ленточность матриц, возможность нахождения только части спектра), появились недавно (методы одновременных итераций) [9]. Сначала (1.3) приводится к эквивалентной задаче с одной матрицей.

Пусть

$$K = LL^T, \quad \lambda = 1/\omega^2, \quad x = L^T p$$

тогда имеем вместо (1.3)

$$(2.1) \quad Ax = \lambda x, \quad A = L^{-1}ML^{-T}$$

Умножение $L^{-1}ML^{-T}x$ выполняется в три этапа

$$\begin{aligned} L^T u &= x, & u &= L^{-T}x \\ y &= Mu, & y &= ML^{-T}x \\ Lv &= y, & v &= L^{-1}ML^{-T}x \end{aligned}$$

Пусть собственные числа из (2.1) $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Если необходимо найти m первых собственных чисел, то вычисления проводятся с матрицей $U = [u_1, u_2, \dots, u_q]$ ($m < q \leq n$).

Итерационный процесс состоит из шести этапов: $U^T U = I$ (ортогонализация), $V = AU$, $B = U^T V$, $Bt^* = \lambda t^*$ (точное или приближенное нахождение собственных векторов t_1^*, \dots, t_q^* матрицы B), $W = VT^*$ ($T^* = [t_1^*, t_2^*, \dots, t_q^*]$), $U = W$.

3. Для иллюстрации методики рассмотрим прямоугольную пластину с краевой трещиной при плоском напряженном состоянии. Один край пластины длины b закреплён, а к противоположному приложено растяжение — сжатие равномерной интенсив-

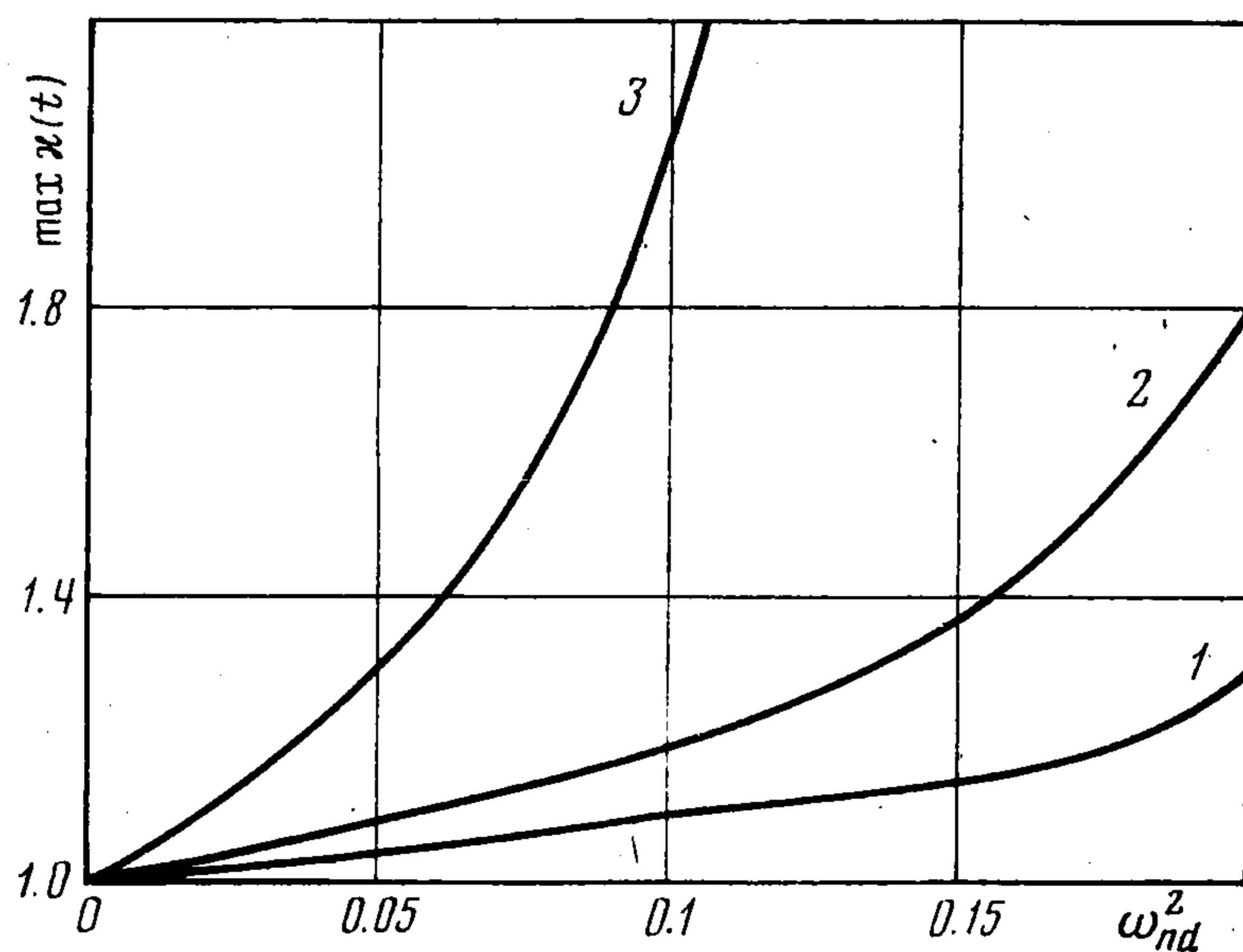
	$l/b=0.183$	0.167	0.250	0.333	0.417
1	0.32	0.30	0.26	0.25	0.16
2	2.05	1.69	1.27	1.12	0.25
3	2.54	2.40	2.39	2.36	2.36
4	9.02	8.40	7.71	7.19	5.76
5	9.29	9.26	8.95	8.75	8.57
6	11.54	11.41	11.26	11.23	10.74
7	14.74	13.70	12.90	12.44	11.44
8	18.88	18.05	15.66	14.08	13.54

ности σ по гармоническому закону. Трещина длины l параллельна этим сторонам и находится на средней линии пластины, размер другой стороны a .

Для ряда относительных длин трещин в таблице приведены квадраты безразмерных частот свободных колебаний $\omega_{nd}^2 = \omega^2 \rho a b / E$, где ρ — плотность пластины, E — модуль Юнга. Коэффициент Пуассона равен 0.3. Вычисления проводились при равномерной разбивке на элементы. Число узлов в зависимости от длины трещины изменялось от 58 до 66. Всего определялось 16 форм колебаний.

На фигуре показаны кривые роста максимума $\kappa(t) = K(t) / K_*$ из (1.7) в зависимости от ω_{nd}^2 для относительных длин трещин 0.167, 0.25, 0.417 (кривые 1—3 соответственно).

Величину динамического коэффициента интенсивности для заданной амплитуды приложенного напряжения σ можно вычислить при помощи этих кривых и статического коэффициента интенсивности K_* , который представляется в виде $K_* = \sigma \sqrt{\pi l} F(l/b, a/b)$. В использованном при проведении расчетов случае отношения



сторон пластины $a/b = 1.17$ и при перечисленных выше относительных длинах трещины функция $F(l/b, a/b)$ равна соответственно 1.40, 1.65, 2.53.

Из вида кривых 1—3 следует, что с ростом частоты нагрузки опасность хрупкого разрушения возрастает. Аналогичный вывод сделан в [10] в результате решения задач о колебаниях плоскости с системой трещин и бесконечной полосы с трещиной. Таким образом, при проектировании элементов конструкций, работающих при высокочастотных воздействиях, следует стремиться к увеличению частот их свободных колебаний. Некоторые выводы относительно величин частот можно сделать на основе следствий из теоремы Куранта — Фишера [3]. Так, пусть пластина с трещиной имеет частоты колебаний $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots$, а пластина с трещиной меньшей длины, которую при конечно-элементной дискретизации можно трактовать как первую пластину с r наложенными

связями, имеет частоты $\omega_1' \leq \omega_2' \leq \dots$. Тогда из этой теоремы следует $\omega_i \leq \omega_i' \leq \omega_{i+r}$.

Таким образом, для оценки границ частот свободных колебаний достаточно найти частоты в пластине с трещиной или системой трещин максимальной длины. На основании теоремы Куранта — Фишера можно утверждать, что увеличить частоты колебаний можно при уменьшении длин трещин, закреплении части границы, уменьшении пластических зон, уменьшении массы и увеличении жесткости (например, за счет ребер жесткости) и т. д.

Автор благодарит В. З. Партона, В. Н. Москаленко и Е. М. Дашевского за внимание к работе.

Поступила 18 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Bazant Z. P., Glazik J. L., Achenbach J. D. Finite element analysis of wave diffraction by a crack. J. Engng Mech. Div., 1976, vol. 102, No. 6.
2. Chen Y. M., Wilkins M. L. Stress analysis of crack problems with a three-dimensional, time-dependent computer program. Internat. J. Fracture, 1976, vol. 12, No. 4.
3. Ланкастер П. Теория матриц. М., «Наука», 1978.
4. Williams M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, No. 1.
5. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
6. Дашевский Е. М. Решение плоской задачи линейной механики разрушения численным методом дискретных элементов. В сб.: Численные методы, алгоритмы и программы, вып. 20. Тр. ЦНИИСК им. Кучеренко, 1971.
7. Дашевский Е. М., Борисковский В. Г. Определение поля напряжений у сквозных трещин в изгибаемых пластинах. Проблемы прочности, 1976, № 10.
8. Борисковский В. Г., Дашевский Е. М. О напряженном состоянии у трещины в пластине на упругом основании. Прикл. механ., 1977, т. 13, № 9.
9. Corr R. B., Jennings A. A simultaneous iteration algorithm for symmetric eigenvalue problems. Internat. J. Numerical Methods Engng, 1976, vol. 10, No. 3.
10. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М., «Наука», 1974.

Технический редактор З. В. Филипова

Сдано в набор 24.05.79 Подписано к печати 26.07.79 Т-13620 Формат бумаги 70×108^{1/16}
 Высокая печать Усл. печ. л. 16,8 Уч.-изд. л. 15,9 Бум. л. 6 Тираж 2825 экз. Зак. 1882

Издательство «Наука». 103717, ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
 2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10