

Здесь $c_{kl} = c_{kl}(\xi, \eta, \zeta)$ — упругие параметры материала, которые терпят разрыв на S ; $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ ($i, j = \xi, \eta, \zeta$) — напряжения и деформации.

Исследуемое тело можно, очевидно, рассматривать как состоящее из двух тел, спаянных по поверхности S .

Так как сцепление полное, то в зоне контакта смещения u_i и напряжения $\sigma_{i\zeta}$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$(1.2) \quad u_i^- = u_i^+, \quad \sigma_{i\zeta}^- = \sigma_{i\zeta}^+ \quad (i = \xi, \eta, \zeta)$$

Здесь и ниже верхний индекс минус означает, что рассматривается значение функции в точке M_1 , а плюс — в M_2 , причем предполагается, что между этими точками не действуют сосредоточенные силовые факторы.

Таким образом, напряжения $\sigma_{i\zeta}$ ($i = \xi, \eta, \zeta$) в точках M_1 и M_2 совпадают. Поэтому условимся в дальнейшем писать их без знаков плюс и минус. Напряжения $\sigma_{\xi\xi}, \sigma_{\eta\eta}, \sigma_{\xi\eta}$ не вошли в зависимости (1.2) и, следовательно, только они могут терпеть разрыв на S , скачкообразно изменяясь при переходе от M_1 к M_2 .

Итак, задача свелась к отысканию $\sigma_{\xi\xi}^+, \sigma_{\eta\eta}^+, \sigma_{\xi\eta}^+$, если известны компоненты тензора напряжений в точке M_1 .

Из соотношений (1.2) для смещений имеем

$$(1.3) \quad \varepsilon_{\xi\xi}^- = \varepsilon_{\xi\xi}^+, \quad \varepsilon_{\eta\eta}^- = \varepsilon_{\eta\eta}^+, \quad \varepsilon_{\xi\eta}^- = \varepsilon_{\xi\eta}^+$$

Аналогичные соотношения для $\varepsilon_{\xi\zeta}, \varepsilon_{\eta\zeta}, \varepsilon_{\zeta\zeta}$ могут и не выполняться, так как в формулы для их вычисления входят производные от u_i ($i = \xi, \eta, \zeta$) по направлению, перпендикулярному S , но очевидно, что в общем случае

$$\partial u_i^- / \partial \zeta \neq \partial u_i^+ / \partial \zeta$$

Подставляя зависимости (1.1) в (1.3), получаем систему алгебраических уравнений для отыскания $\sigma_{\xi\xi}^+, \sigma_{\eta\eta}^+, \sigma_{\xi\eta}^+$, решение которой в матричной форме имеет вид

$$(1.4) \quad \sigma = C^{-1} C_1 \sigma_1$$

$$C = \begin{vmatrix} c_{11}^+ & c_{12}^+ & c_{14}^+ \\ c_{12}^+ & c_{22}^+ & c_{24}^+ \\ c_{14}^+ & c_{24}^+ & c_{44}^+ \end{vmatrix}, \quad \sigma = \text{col} \{ \sigma_{\xi\xi}^+, \sigma_{\eta\eta}^+, \sigma_{\xi\eta}^+ \}$$

$$\sigma_1 = \text{col} \{ \sigma_{\xi\xi}^-, \sigma_{\eta\eta}^-, \sigma_{\xi\eta}^-, \sigma_{\zeta\zeta}^-, \sigma_{\xi\zeta}^-, \sigma_{\eta\zeta}^- \}$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} c_{11}^- & c_{12}^- & c_{14}^- & c_{13}^- - c_{13}^+ & c_{15}^- - c_{15}^+ & c_{16}^- - c_{16}^+ \\ c_{12}^- & c_{22}^- & c_{24}^- & c_{23}^- - c_{23}^+ & c_{25}^- - c_{25}^+ & c_{26}^- - c_{26}^+ \\ c_{14}^- & c_{24}^- & c_{44}^- & c_{34}^- - c_{34}^+ & c_{45}^- - c_{45}^+ & c_{46}^- - c_{46}^+ \end{vmatrix}$$

В частном случае, когда материал изотропен, соотношения (1.4) значительно упрощаются и могут быть записаны в виде (G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона)

$$(1.5) \quad \sigma_{\xi\xi}^+ = \beta_1 \sigma_{\xi\xi}^- + \beta_2 \sigma_{\eta\eta}^- + \beta_3 \sigma_{\zeta\zeta}^-, \quad \sigma_{\xi\eta}^+ = \beta_4 \sigma_{\xi\eta}^-$$

$$\sigma_{\eta\eta}^+ = \beta_2 \sigma_{\xi\xi}^- + \beta_1 \sigma_{\eta\eta}^- + \beta_3 \sigma_{\zeta\zeta}^-$$

$$\beta_1 = \frac{G^+ (1 - \nu^- \nu^+)}{G^- (1 - \nu^+) (1 + \nu^-)}, \quad \beta_2 = \frac{G^+ (\nu^+ - \nu^-)}{G^- (1 - \nu^+) (1 + \nu^-)}$$

$$\beta_3 = \frac{\nu^+}{1 - \nu^+} - \frac{G^+ \nu^- (1 + \nu^+)}{G^- (1 - \nu^+) (1 + \nu^-)}, \quad \beta_4 = \frac{G^+}{G^-}$$

Из формул (1.5) следует

$$(1.6) \quad \sigma_{\xi\xi}^+ - \sigma_{\eta\eta}^+ = \frac{G^+}{G^-} (\sigma_{\xi\xi}^- - \sigma_{\eta\eta}^-)$$

Если $\nu^+ = \nu^- = \nu$, то зависимости (1.5) преобразуются к виду

$$(1.7) \quad \sigma_{kk}^+ = \sigma_{kk}^- + \frac{G^+ - G^-}{G^-} \left(\sigma_{kk}^- - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{\zeta\zeta}^- \right) \quad (k = \xi, \eta), \quad \sigma_{\xi\eta}^+ = \frac{G^+}{G^-} \sigma_{\xi\eta}^-$$

В справедливости полученных формул можно убедиться на примере любой задачи о напряженном состоянии составного тела, для которой имеется строгое аналитическое решение (в частности на задаче из работы [1]). Формулы дают возможность оценить влияние каждой компоненты тензора напряжений, а также величины «скачка» упругих свойств материала на характер скачкообразного изменения напряженного состояния тела при переходе через поверхность S . Они представляют интерес и при разработке уточненной теории армирования.

Во многих задачах полученные соотношения позволяют сократить вычислительный процесс. Так, при отыскании полей напряжений в слоистых системах приходится для каждого слоя с порядковым номером n вычислять выражения вида [2-3]

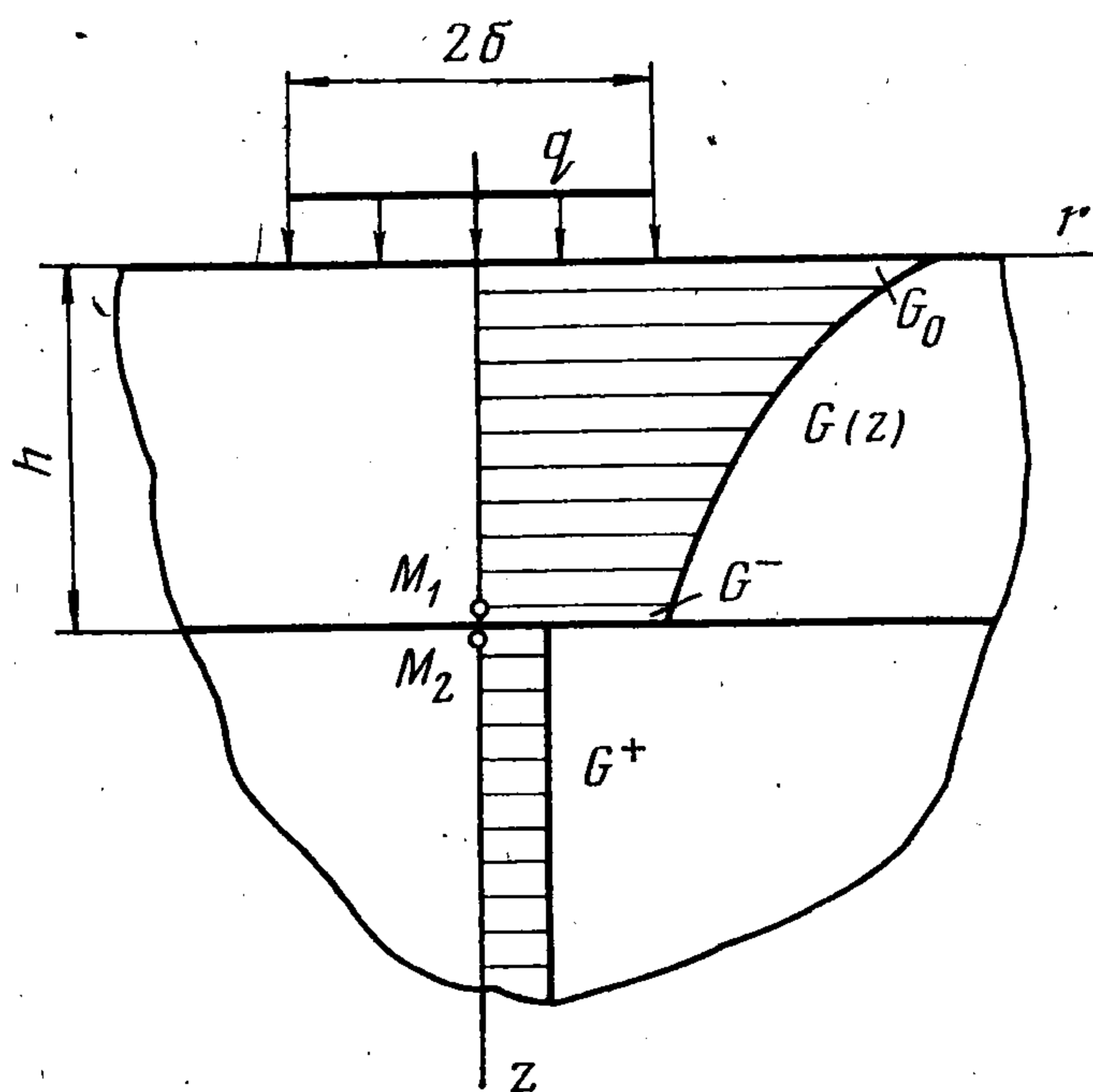
$$(1.8) \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\beta} \int_0^{\infty} J_m(\alpha r) s^{(n)}(z, \alpha, m) d\alpha$$

где r, β, z — цилиндрические координаты, $J_m(\alpha r)$ — функция Бесселя первого рода порядка m , $s^{(n)}$ — некоторая функция от z и параметров m и α , вид которой определяется характером нагружения и неоднородностью материала конструкции.

Каждая из функций $s^{(n)}$ зависит от неизвестных $C_k^{(n)} = C_k^{(n)}(\alpha, m)$ ($k = 1, 2, \dots$), которые находятся из системы алгебраических уравнений. Из-за громоздкости получаемых выражений трудно заметить существование зависимостей (1.4) или (1.5) — (1.7). Поэтому в более ранних работах, посвященных исследованию напряженного состояния слоистых тел, трудоемкие вычисления с помощью зависимостей (1.8) проводились в отдельности для каждой из точек M_1 и M_2 .

Формулы (1.4) или (1.5), (1.7) позволяют значительно уменьшить время счета. Для этого достаточно по зависимостям вида (1.8) вычислить лишь напряжения в точке M_1 , а затем по полученным выше формулам отыскать скачкообразно изменяющиеся компоненты тензора напряжений в соседней точке M_2 , которая лежит по другую сторону от плоскости сцепления слоев.

В качестве примера использования полученных результатов рассмотрим задачу, которая возникает при расчете дорожных одежд. Неоднородный слой толщиной h покоится на однородном изотропном полупространстве $z > h$, с которым он снаян.



Модуль сдвига слоя меняется с глубиной по гиперболической зависимости $G(z) = G_0(1 + cz)^b$, а модуль сдвига полупространства $G^+ = \text{const}$. Коэффициент Пуассона конструкции $\nu = 1/3$. Слой находится под воздействием нормальных к поверхности усилий q , которые равномерно распределены на площади круга радиуса δ . Необходимо найти нормальные напряжения $\sigma_r^\pm, \sigma_\beta^\pm$ и σ_z в точках M_1 и M_2 , лежащих на оси z по обе стороны от плоскости $z = h$ (фигура).

Аналитическое решение задачи приведено в работе [3]. Формулы этой работы использовались для отыскания напряжений $\sigma_r^- = \sigma_\beta^-$ и σ_z в точке M_1 слоя. Некоторые из численных результатов сведены в таблицу. Левым колонкам величин напряжений

соответствуют значения $G^+ / G^- = 0.2$, правым — значения $G^+ / G^- = 0.8$, где G^- — модуль низа слоя. Для вычисления напряжений $\sigma_r^+ = \sigma_\beta^+$ в точке M_2 применялись формулы (1.7) ($\xi = r, \eta = \beta, \zeta = z, \sigma_{\xi\xi} = \sigma_r, \sigma_{\eta\eta} = \sigma_\beta, \sigma_{\zeta\zeta} = \sigma_z$).

2. Плоская задача. Предположим, что в каждой точке линейно-упругого тела можно провести перпендикулярную оси z плоскость, обладающую тем свойством, что любые два направления, симметричные относительно этой плоскости, эквивалентны в от-

ношении упругих свойств. Кроме того, будем считать, что механические характеристики материала — функции координат x и y , а S — одна из цилиндрических поверхностей, на которой они терпят разрыв. Рассмотрим случай плоской деформации в плоскости xOy и обозначим через L кривую, по которой S пересекается с этой плоскостью.

G_0/G^-	δ/h	$\sigma_r^-/q \cdot 10^3$		$-\sigma_z/q \cdot 10^3$		$\sigma_r^+/q \cdot 10^3$	
2	0.6	404	46	179	313	9.2	5.5
2	1.0	693	25	363	573	-6.6	-37.3
2	1.4	829	-44	527	743	-45.0	-110
10	0.6	332	48	134	252	12.8	13.2
10	1.0	618	52	286	489	9.2	-7.3
10	1.4	800	9	431	665	-12.4	-59.3

Подобно тому, как это было сделано в предыдущей задаче, возьмем на L какую-нибудь точку M и введем в рассмотрение на плоскости xOy криволинейные координаты ξ, η , причем кривая $\eta(x, y) = \eta^*$ совпадет с L в точке $M(\xi^*, \eta^*)$ и некоторой ее окрестности.

Таким образом, задача состоит в отыскании напряжений в точке $M_2(\xi^*, \eta^* + 0)$, если они известны для точки $M_1(\xi^*, \eta^* - 0)$, которая лежит с ней рядом, но по другую сторону от кривой L .

Условия (1.2) в рассматриваемом случае принимают форму

$$(2.1) \quad u_i^- = u_i^+, \quad \sigma_{i\eta}^- = \sigma_{i\eta}^+ \quad (i = \xi, \eta)$$

и, следовательно, скачкообразно менять свое значение при переходе через L может только компонента $\sigma_{\xi\xi}$. Остальные компоненты — $\sigma_{\eta\eta}$ и $\sigma_{\xi\eta}$ непрерывны и поэтому верхние индексы плюс и минус ставить при них не будем.

Из соотношений (2.1) следует, что относительные деформации

$$(2.2) \quad \varepsilon_{\xi\xi}^- = \varepsilon_{\xi\xi}^+$$

Кроме того

$$(2.3) \quad \varepsilon_{\xi\xi} = c_{11}\sigma_{\xi\xi} + c_{12}\sigma_{\eta\eta} + c_{13}\sigma_z + c_{14}\sigma_{\xi\eta}$$

$$(2.4) \quad \varepsilon_z = c_{13}\sigma_{\xi\xi} + c_{23}\sigma_{\eta\eta} + c_{33}\sigma_z + c_{34}\sigma_{\xi\eta} = 0$$

Определив σ_z из выражения (2.4) и подставив его в (2.3), получаем

$$(2.5) \quad \varepsilon_{\xi\xi} = d_{11}\sigma_{\xi\xi} + d_{12}\sigma_{\eta\eta} + d_{14}\sigma_{\xi\eta}$$

$$d_{11} = c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}, \quad d_{12} = c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}, \quad d_{14} = c_{14} - \frac{c_{13}c_{34}}{c_{33}}$$

Отметим, что при обобщенном плоском напряженном состоянии $d_{kl} = c_{kl}$.

Подставляя соотношение (2.5) в зависимость (2.2), получаем уравнение для отыскания $\sigma_{\xi\xi}^+$, из которого находим

$$\sigma_{\xi\xi}^+ = \frac{d_{11}^-}{d_{11}^+} \sigma_{\xi\xi}^- + \frac{d_{12}^- - d_{12}^+}{d_{11}^+} \sigma_{\eta\eta} + \frac{d_{14}^- - d_{14}^+}{d_{11}^+} \sigma_{\xi\eta}$$

Если материал изотропен, то эта формула преобразуется к виду

$$\sigma_{\xi\xi}^+ = \frac{1 - \nu^-}{1 - \nu^+} \frac{G^+}{G^-} \sigma_{\xi\xi}^- + \frac{G^- \nu^+ - G^+ \nu^-}{(1 - \nu^+) G^-} \sigma_{\eta\eta}$$

При обобщенном плоском напряженном состоянии v^{\pm} нужно заменить на $v^{\pm} / (1 - v^{\pm})$.

Результаты работы можно обобщить на случай температурной задачи, если в соотношениях (1.1) добавить члены, учитывающие влияние температуры.

Поступила 10 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Плевако В. П. Сосредоточенная сила внутри сцепленных полупространств. Основания, фундаменты, и механика грунтов, 1969, № 3.
2. Плевако В. П. Неоднородный слой, сцепленный с полупространством, под воздействием внутренних и внешних сил. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
3. Плевако В. П., Керевич А. А. Неоднородный слой, сцепленный с полупространством, под воздействием внешних сил. Прикл. механ., 1977, т. 13, № 5.

УДК 539.375

АНАЛИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЕ С ТРЕЩИНОЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В. Г. Борисковский

(Донецк)

Определяется коэффициент при сингулярной части решения задачи о продольных колебаниях пластины с прямолинейной трещиной. Используется метод конечных элементов при введении специального конечного элемента, учитывающего наличие особенности на краю трещины.

Метод конечных элементов применялся к динамическим задачам линейной механики разрушения с неподвижной трещиной при исследовании дифракции ударной волны на трещине продольного сдвига [1], и результаты были получены с высокой погрешностью. В подобных нестационарных задачах более точные результаты достигнуты при использовании разностных схем [2]. Ниже показано, что в задачах о колебаниях применение метода конечных элементов оказывается эффективным.

1. Предположим, что на тело с трещиной, помимо гармонической составляющей, действует статическая растягивающая нагрузка, такая, что налегания берегов трещины не происходит. На части границы тела заданы смещения, и, следовательно, матрица жесткости системы невырожденная. Последнее несущественно в статике, так как перемещения тела как жесткого целого не влияют на коэффициенты интенсивности, но при нахождении форм свободных колебаний это необходимое условие. Хотя в таком случае отсутствуют аналитические решения, точность расчета, как будет показано ниже, можно оценить другим путем.

Уравнения движения упругого тела без затухания при действии гармонической нагрузки имеют вид

$$(1.1) \quad Mx'' + Kx = f \cos \omega t$$

Здесь M — матрица массы, K — матрица жесткости, x — вектор перемещений системы, f — вектор нагрузок. При $\omega = 0$ имеем уравнения равновесия

$$(1.2) \quad Kx = f$$