

вая соответствует эластичному (по М. В. Келдышу) колесу; штриховые кривые 1 и 2 соответствуют гипотезе увода и случаю жесткого колеса.

По гипотезе увода  $V_*(R) = \text{const}$  для данного колеса наибольшая область устойчивости получается для жесткой модели, кривая  $V = V_*(R)$  в этом случае имеет горизонтальную асимптоту  $V = (gr/3)^{1/2}$ . При  $R/r > 6$  функция  $V_*(R)$  для эластичной и жесткой моделей убывает столь медленно, что практически ее можно принять за постоянную, при этом различие в областях устойчивости между указанными тремя моделями будет лишь количественное.

Автор благодарит В. В. Румянцева и участников руководимого им семинара за обсуждение результатов.

Поступила 20 III 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. Тр. ЦАГИ, 1945, № 564.
2. Метелицын И. И. Избранные труды. М., «Наука», 1977.
3. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Устойчивость криволинейного движения экипажа на балонных колесах. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
4. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.

УДК 533.6.011.72

### МАЛЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ЗА ФРОНТОМ КОСОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

И. В. Симонов

(Москва)

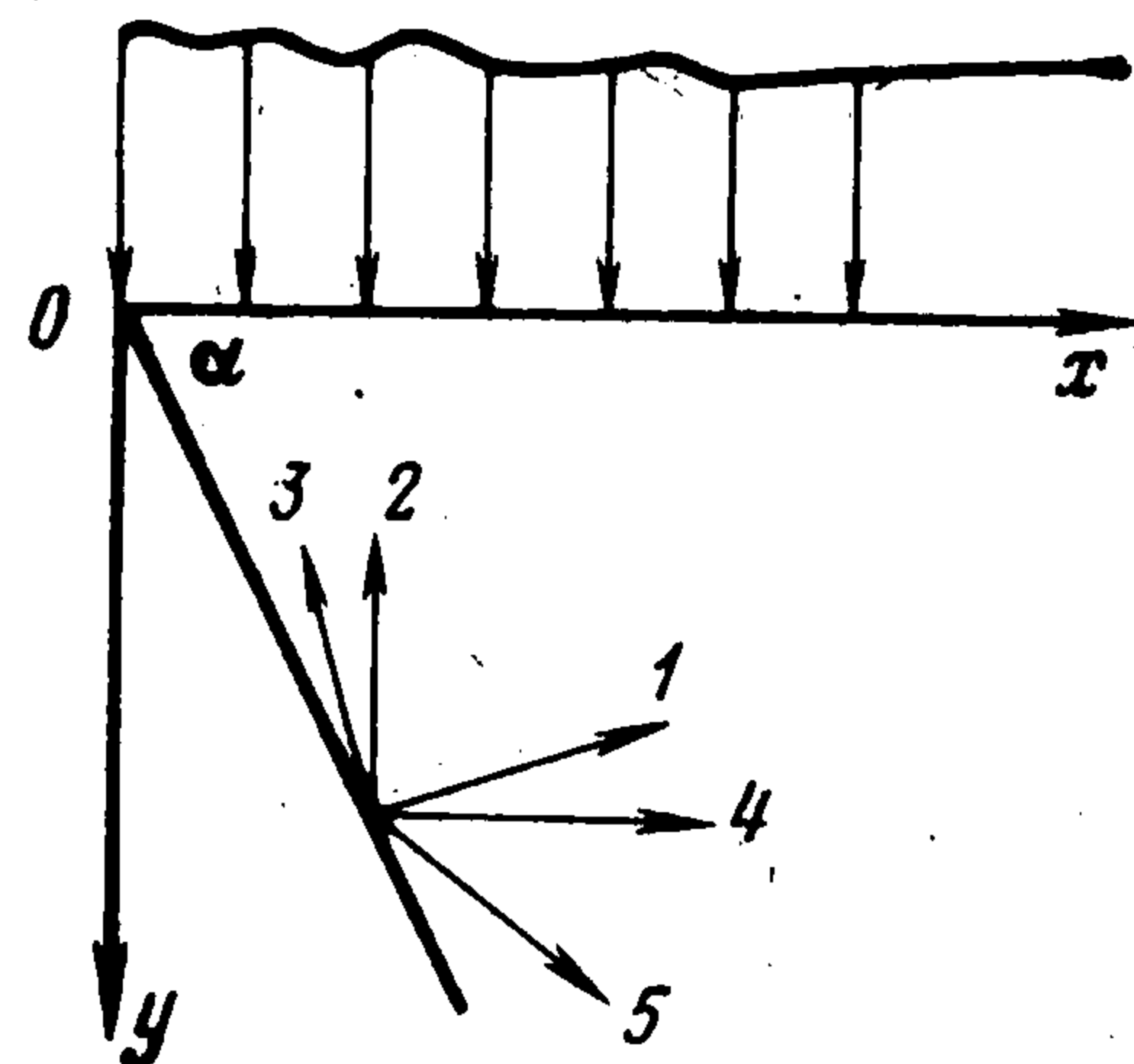
Изучается влияние стационарных возмущений ступенчатой нагрузки, движущейся по плоской поверхности идеальной среды, на гидродинамические величины за фронтом косоугольной ударной волны. Рассматривается только случай, когда система дифференциальных уравнений для возмущений — эллиптического типа, а условия устойчивости плоской стационарной ударной волны [1] выполнены. Обсуждаются условия, при которых решение имеет логарифмическую или степенную особенность в производных.

Результаты могут оказаться полезными для ориентировки при проведении численных расчетов.

1. Рассмотрим плоское установившееся движение идеальной среды, заполняющей полупространство, под действием движущейся по ее поверхности с постоянной сверхзвуковой скоростью  $D$  нагрузки, профиль которой, близкий к «ступеньке», со временем не меняется. В системе координат  $x = (x, y)$ , связанной с фронтом нагрузки (фигура), давление на границе представим в виде

$$P = P_1 [1 + \varepsilon q(x)], \quad x > 0, \quad P = 0, \quad x < 0$$

Предполагается, что при  $\varepsilon = 0$  имеет место решение с косоугольной ударной волной и постоянными параметрами за ней, а перед единственным фронтом разрыва решения среда невозмущена. При  $\varepsilon \ll 1$  влияние возмущений учтем в линейной постановке, представляя неизвестные функции  $P(x)$ ,  $U(x) = (U, W)$  — вектор скорости точки среды, вычисляемый в лабораторной системе координат,  $V(x)$  — удельный объем и  $x = F(y)$  —



уравнение линии фронта в форме

$$P \approx P_1 (1 + \varepsilon p), \quad U \approx U_1 (1 + \varepsilon u), \quad W \approx U_1 (-b + \varepsilon w) \\ V \approx V_0 (V_1 / V_0 + \varepsilon v), \quad x = F(y) \approx b [y + \varepsilon f(y)]$$

Индексы нуль, единица относятся к величинам перед фронтом и за фронтом соответственно.

Из условий на невозмущенном фронте следует

$$U_1 = V_0 P_1 / D, \quad b^2 = \theta_0 D^2 / (V_0 P_1) - 1 \quad (\theta_0 = 1 - V_1 / V_0)$$

Запишем уравнения установившегося движения для возмущений внутри угла  $\alpha$  (фигура)

$$(g\nabla) \mathbf{u} = \nabla p, \quad \nabla \mathbf{u} = (1 - k^2) g \nabla p \\ \mathbf{u} = (u, w), \quad \mathbf{g} = (1 - \theta_1, b\theta_1) V_0 / V_1 \\ \theta_1 = \theta_0 / (1 + b^2), \quad k^2 = 1 - [V_1 D / (V_0 c)]^2$$

( $c$  — скорость звука за фронтом). При условии  $b\theta_0 \ll 1$ ,  $V_0 / V_1 \sim 1$  они существенно упрощаются

$$(1.1) \quad \partial u / \partial x = \nabla p, \quad \partial w / \partial y = -k^2 \partial p / \partial x$$

Из законов сохранения на разрыве получим краевые условия при  $x = by$

$$(1.2) \quad u = p = Cf', \quad w = -b(1 + C)f', \quad p = -jv \\ C = \frac{2b^2}{[j-1](1+b^2)}, \quad j = \frac{P_1}{V_1 - V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_H \Big|_{P=P_1}$$

Штрих и индекс  $H$  означают дифференцирование по  $y$  и вдоль кривой Гюгонио соответственно.

При  $b\theta_0 \ll 1$  условие на поверхности среды сносится на плоскость  $y = 0$

$$(1.3) \quad p = q(x), \quad x > 0 \quad (q(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty)$$

При  $x \rightarrow \infty$ ,  $y > 0$  условия нулевые.

Задачу (1.1) — (1.3) будем решать в предположении  $k^2 > 0$ , т. е.

$$D_0 < D < cV_0 / V_1, \quad D_0 = (P_1 V_0 / \theta_0)^{1/2}$$

( $D_0$  — скорость ударной волны в точке  $O$ ). Тогда система уравнений (1.1) — эллиптического типа и задача аналогична задаче [2].

2. Из первого уравнения (1.1) и первого условия (1.2) следует  $u(x) = p(x)$ . Остальные уравнения (1.1) удовлетворяются, если  $Q(z) = p + iw/k$  ( $z = x +iky$ ) — аналитическая функция  $z$ , регулярная внутри угла  $0 < \arg z < \alpha_0$  ( $\operatorname{tg} \alpha_0 = k \operatorname{tg} \alpha = k/b$ ).

На луче  $\arg z = 0$  задана действительная часть  $Q(z)$ , на луче  $\arg z = \alpha_0$  — соотношение между действительной и мнимой частями, следующее из (1.2)

$$(2.1) \quad \operatorname{Re} Q = \operatorname{tg} \beta \operatorname{Im} Q, \quad \beta = \beta_0 + m\pi \\ \beta_0 = \operatorname{arctg}(kA/b), \quad A = C/(1+C), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В отличие от [2] здесь  $\beta_0 \neq \alpha_0$ .

На бесконечности функция  $Q(z)$  должна обращаться в нуль.

Переведем внутренность угла  $\alpha_0$  в верхнюю полуплоскость при помощи конформного отображения

$$\zeta = z^\nu \quad (\nu = \pi / \alpha_0, \quad \zeta = \xi + i\eta)$$

Условие при  $\eta = 0$ ,  $\xi < 0$ , следующее из (2.1)

$$\operatorname{Im} i e^{i\beta} Q(\zeta) = 0$$

позволяет совершить аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость через гра-

виду  $\xi < 0, \eta = 0$ . Условие для предельных значений  $Q(\zeta)$  сверху и снизу оси  $\xi > 0$  примет вид

$$Q_+(\xi) = e^{2i\beta} Q_-(\xi) + 2q(\xi^{1/\nu})$$

Единственное решение этой задачи, равное нулю на бесконечности и ограниченное в начале координат, имеет вид [3]

$$Q(\zeta) = \frac{\zeta^\gamma}{\pi i} \int_0^\infty \frac{q(\xi^{1/\nu}) d\xi}{\xi^\gamma (\xi - \zeta)}, \quad \gamma = \begin{cases} 1 - \beta_0/\pi, & \beta_0 > 0 \\ -\beta_0/\pi, & \beta_0 < 0 \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной  $z$ , получим

$$Q(z) = \frac{i}{\alpha_0 z^\mu} \int_0^\infty \frac{q(x) dx}{x^{1-\mu} (1 - x^\nu/z^\nu)}, \quad \mu = \begin{cases} \nu(1-\gamma) = \beta_0/\alpha_0, & \beta_0 > 0 \\ (\pi + \beta_0)/\alpha_0, & \beta_0 < 0 \end{cases}$$

3. Можно показать, что

$$Q'(z) = \frac{i}{\alpha_0 z^{1+\mu}} \int_0^\infty \frac{x^\mu q'(x) dx}{1 - x^\nu/z^\nu}$$

Поведение  $Q'(z)$  при  $|z| \rightarrow 0$  зависит от знака  $\nu - \mu - 1 = \nu(\gamma - 1/\nu)$ . Если  $\gamma > 1/\nu$ , то  $Q'(z)$  непрерывна в нуле. В случае  $\gamma = 1/\nu$  и  $\gamma < 1/\nu$  функция  $Q'(z)$  имеет логарифмическую и степенную особенность соответственно, а кривизна фронта обращается в бесконечность в точке  $O$ . Это означает неустойчивость решения в метрике  $C^{(2)}$ .

Можно доказать, что неравенство  $\gamma \leq 1/\nu$  эквивалентно системе неравенств  $-1 \leq A < 0$ . Решим эту систему относительно  $b^2$  с учетом условий устойчивости плоской ударной стационарной волны [1], которые можно переписать так:

$$(3.1) \quad -(1+B) \leq j < 1 \quad (B = 2[(1-k^2)/(1+b^2)]^{1/2} < 2).$$

Получим

$$(3.2) \quad b^2 \leq (1-j)/(3+j)$$

При выполнении (3.1) величина в правой части (3.2) неотрицательна, поэтому всегда существует значение  $\alpha_* = \text{arctg} [(1-j)/(3+j)]^{1/2}$ , такое, что  $0 < \alpha_* < \pi/2$  и при  $\alpha_* \leq \alpha < \pi/2$  имеется особенность у  $Q'(z)$ . Интервал таких значений  $\alpha$  расширяется от  $j=1$  ( $\alpha_* = \pi/2$ ): наклон ударной адиабаты в точке  $V = V_1$  совпадает с наклоном, определяющим скорость  $D_0$ , к  $j=0$  ( $\alpha_* = \pi/3$ ): ударная адиабата вертикальна и далее к случаям отрицательных значений  $j$ : ударная адиабата имеет аномальный ход.

4. Вместо задачи для  $Q(z)$  можно было бы рассмотреть задачу для  $Q'(z) = \partial p / \partial x - ik^{-1} \partial p / \partial y$ . Условие для  $Q'(z)$  на фронте получается путем дифференцирования условий (1.2) вдоль фронта и исключения лишних производных с привлечением (1.1). Оно имеет вид

$$a \nabla p = 0, \quad a = (b^2 - k^2 A, \quad b(A+1)) = (a_1, a_2)$$

Вектор  $a$  указывает на направление изобар, отходящих от фронта, а условие перехода к решению с особенностью совпадает с условием  $a_2 = 0$ . Обозначим угол между вектором  $a$  и направлением оси  $x$  через  $\varphi$ . Имеем следующие возможные случаи направления изобар (фигура):

- 1)  $-\pi/2 < \varphi < 0$  при  $-\infty < A < -1$  и  $b^2/k^2 < A < \infty$
- 2)  $\varphi = -\pi/2$  при  $A = b^2/k^2$  ( $a_1 = 0$ )
- 3)  $-\pi/2 - \alpha < \varphi < -\pi/2$  при  $0 < A < b^2/k^2$
- 4)  $\varphi = 0$  при  $A = -1$  ( $a_2 = 0$ )
- 5)  $0 < \varphi < \alpha$  при  $-1 < A < 0$

