

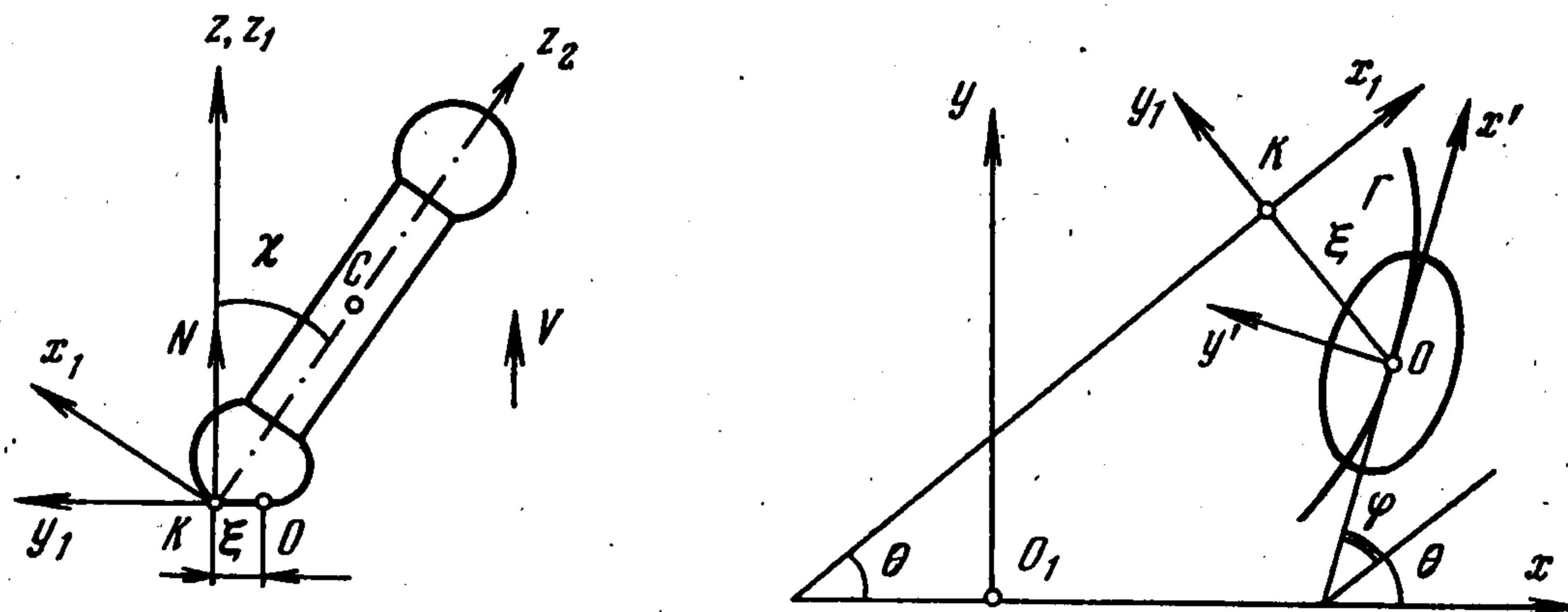
К ДИНАМИКЕ ЭКИПАЖА НА БАЛЛОННЫХ КОЛЕСАХ

Л. Г. Лобас

(Киев)

Предлагается обобщение теории М. В. Келдыша [1] качения колеса с упругим пневматиком на криволинейное движение с любой скоростью по траектории произвольной кривизны.

Для установления условий возбуждения шимми ориентирующегося колеса шасси самолета на взлетно-посадочной полосе сформулированы [1] гипотезы качения без проскальзывания и выведены соответствующие уравнения неголономных связей. Применимость теории [1] для криволинейного движения была подвергнута сомнению [2]. Считая теорию [1] пригодной для криволинейного движения, авторы работы [3] вынуждены были ограничиться изучением движений «по пути достаточно малой кривизны» с не «слишком большой» скоростью.



Фиг. 1

В данной статье предлагается подход, основанный на теории [1] с использованием результатов [3] и пригодный для изучения программного движения по траектории произвольной кривизны с любой скоростью. Под программным подразумевается движение, при котором точка K встречи прямой наибольшего наклона, проведенной в средней плоскости колеса через его центр C (фиг. 1), с плоскостью дороги движется по заданной кривой (программе) кривизны $k = R^{-1}$.

Введем обозначения: O_1xyz — инерциальная система координат; O — центр площадки смятия; x, y и x_*, y_* — абсцисса и ордината точек K и O в системе O_1xyz ; i, j и i_1, j_1 — орты осей O_1x, O_1y и Kx_1, Ky_1 ; θ — курсовой угол; χ — угол крена обода колеса, вызванный деформацией пневматика; ξ — линейная боковая деформация пневматика; φ — угловая деформация (кручения) пневматика; Γ — линия качения пневматика; s, s_K — длины дуг траекторий точек O и K ; $Ox'y'$ — система координат, направления осей которой получаются из направлений осей O_1x, O_1y поворотом на угол $\theta + \varphi$. Имеем соотношения

$$(1) \quad \begin{aligned} v_k &= ix' + jy' = i_1v + i_1U, \quad v = s_k' = x' \cos \theta + y' \sin \theta \\ U &= -x' \sin \theta + y' \cos \theta, \quad v_O = ix_*' + jy_*' = i' [x_*' \cos (\theta + \varphi) + \end{aligned}$$

$$+ y_* \dot{\sin}(\theta + \varphi)] + j'[-x_* \dot{\sin}(\theta + \varphi) + y_* \dot{\cos}(\theta + \varphi)] = i_1 (v + \xi \dot{\theta}') + j_1 (U - \xi \dot{\theta}') \\ s' = (s_K + \xi \dot{\theta}') \cos \varphi + (U - \xi \dot{\theta}') \sin \varphi, \quad x_* = x + \xi \sin \theta, \quad y_* = y - \xi \cos \theta$$

Первая гипотеза М. В. Келдыша приводит к уравнению

$$(2) \quad -x_* \dot{\sin}(\theta + \varphi) + y_* \dot{\cos}(\theta + \varphi) = 0$$

Уравнение (2) выражает, согласно (1), условие $(v_0)_y = 0$, переходящее при $\xi = 0$, $\varphi = 0$ в обычное уравнение $-x \dot{\sin} \theta + y \dot{\cos} \theta = 0$ неголономной связи абсолютно твердого тела, означающее невозможность бокового скольжения.

Вследствие деформируемости пневматика кривизна траектории точки O отлична от k . Введем гипотезу: кривизна линии Γ — аддитивная функция параметров деформации. Находясь в рамках линейной теории упругости, положим (α, β, γ) — постоянные М. В. Келдыша

$$d(\theta + \varphi) / ds = k + f(\xi, \varphi, \chi), \quad f(\xi, \varphi, \chi) = \alpha \xi - \beta \varphi - \gamma \chi$$

Уравнения неголономных связей в линеаризованном относительно деформаций виде таковы:

$$(3) \quad x \dot{\sin} \theta - y \dot{\cos} \theta + (x \dot{\cos} \theta + y \dot{\sin} \theta) \varphi + \xi \dot{\theta}' = 0 \\ \dot{\theta}' + \dot{\varphi}' - k [x \dot{\cos} \theta + y \dot{\sin} \theta + \varphi (-x \dot{\sin} \theta + y \dot{\cos} \theta) + \xi \dot{\theta}'] - \\ - (x \dot{\cos} \theta + y \dot{\sin} \theta) (\alpha \xi - \beta \varphi - \gamma \chi) = 0$$

При отсутствии деформаций ($\xi = 0$, $\varphi = 0$, $\gamma = 0$) второе уравнение (3) переходит в тождество $\dot{\theta}' = kv$.

Пусть m и $N = mg$ — масса и вес колеса; A, B — диаметральный и осевой моменты инерции; x_C, y_C, z_C — координаты центра C колеса в системе O, xyz ; r — радиус колеса; ϑ — угол собственного вращения. Кинетический потенциал определяется выражением

$$L = \frac{m}{2} (x_C \dot{}^2 + y_C \dot{}^2 + z_C \dot{}^2) + \frac{A}{2} (\dot{\chi}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \chi) + \\ + \frac{B}{2} (\dot{\vartheta} + \dot{\theta} \sin \chi)^2 - Nz_C, \quad z_C = r \cos \chi$$

Считая, как и в [1, 3, 4], переменные ξ, φ, χ малыми, получаем уравнения движения в виде

$$(4) \quad m(U + V\dot{\theta}' - r\dot{\chi}'' + r\dot{\theta}'^2 \chi) + a\xi + \sigma N\chi = 0 \\ A\dot{\theta}'' + B\omega\dot{\chi}' - b\varphi = 0 \\ A\dot{\chi}'' + [N(\rho + \sigma r - r) - (B - A)\dot{\theta}'^2]\dot{\chi}' - B\omega\dot{\theta}' + (ar + \sigma N)\xi = 0 \\ U - V\varphi - \xi \dot{\theta}' = 0, \quad \dot{\theta}' + \dot{\varphi}' - k(V + \xi \dot{\theta}') - V(\alpha \xi - \beta \varphi - \gamma \chi) = 0, \\ (F = a\xi + \sigma N\chi, \quad M_\theta = b\varphi, \quad M_\chi = -\sigma N\xi - \rho N\chi)$$

Через $V = \omega r = \text{const}$ обозначено значение переменной v в случае равномерного движения; постоянные величины a, b, σ, ρ пропорциональны частным производным боковой силы F , моментов M_θ, M_χ по соответствующим деформациям [1].

Так как $\xi \ll R$, то из последнего уравнения системы (4) следует

$$(5) \quad \dot{\theta}' = \Omega - \dot{\varphi}' + V(\alpha + R^{-2})\xi - \beta V\varphi - \gamma V\chi, \quad \Omega = V/R$$

Остальные уравнения этой системы представляются в виде

$$(6) \quad \dot{\xi}'' + [am^{-1} + V^2(\alpha + R^{-2})]\dot{\xi}' - r\dot{\chi}'' + (\sigma g + r\Omega^2 - \gamma V^2)\dot{\chi}' - \beta V^2\varphi = \\ = -V\Omega \\ \dot{\varphi}'' + \beta V\dot{\varphi}' + bA^{-1}\varphi + (\gamma V - B\omega A^{-1})\dot{\chi}' - V(\alpha + R^{-2})\dot{\xi}' + \\ + 2VR\dot{\chi}' - R^{-3}\xi = \Omega'$$

$$A\chi'' + [B\gamma\omega V + N(\rho + \sigma r - r) - (B - A)\Omega^2]\chi + B\omega\varphi' + \\ + B\beta\omega V\varphi + [ar + \sigma N - B\omega V(\alpha + R^{-2})]\xi = B\omega\Omega \\ U = \xi' + V\varphi$$

Рассмотрим частное решение системы (6), (5), соответствующее случаю движения точки K по окружности радиуса R

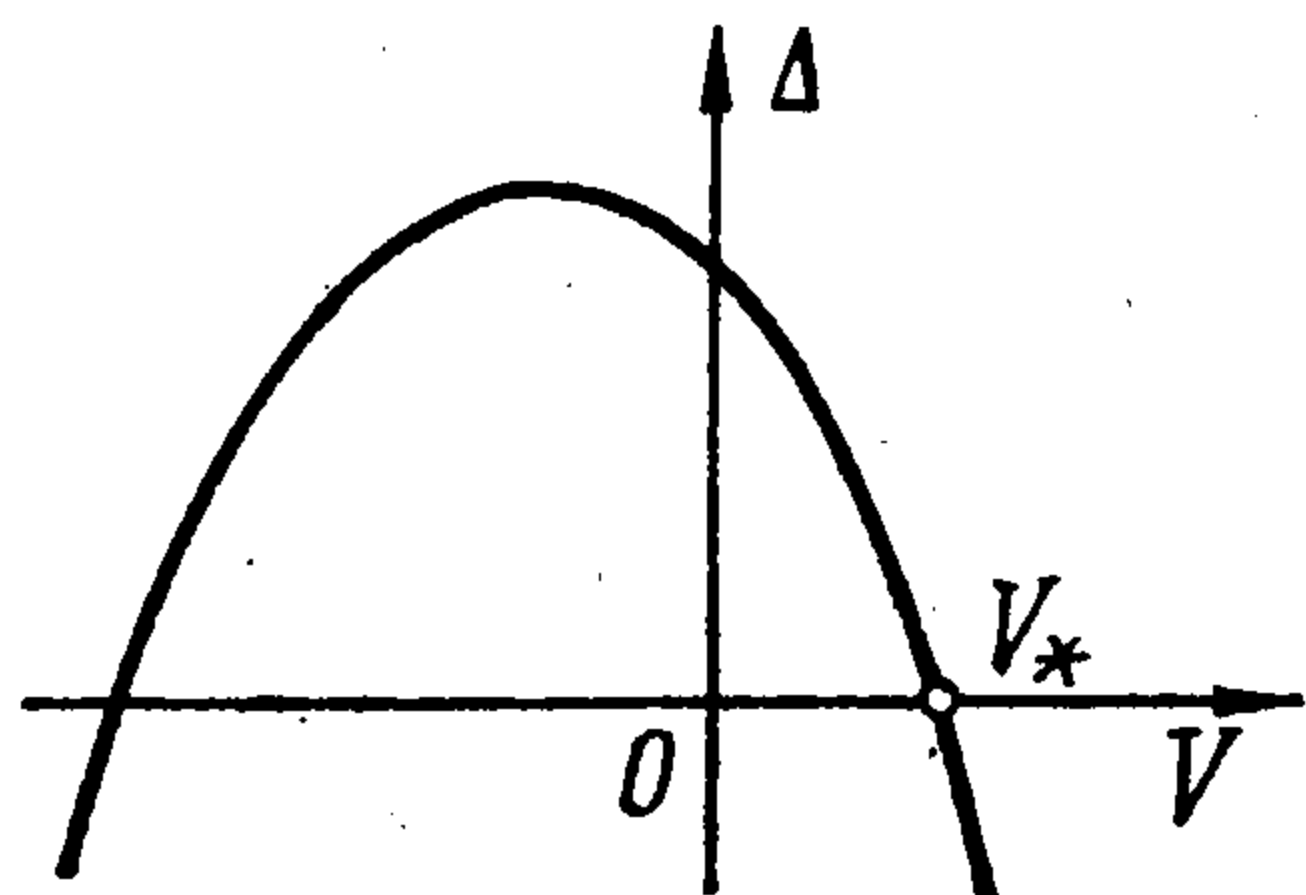
$$U_0 = 0, \varphi_0 = 0, \theta_0' = \Omega + V(\alpha + R^{-2})\xi_0 - \gamma V\chi_0 = \text{const} \\ \xi_0 = \Delta_1 / \Delta = \text{const}, \chi_0 = \Delta_2 / \Delta = \text{const} \\ \Delta_1 = mV\Omega [A\Omega^2 + B\sigma gr^{-1} - N(r - r\sigma - \rho)], \Delta_2 = -V\Omega [aBr^{-1} + \\ + m(ar + \sigma N)] \\ \Delta = -Am\Omega^4 + \Omega^2 [a(B - A + mr^2) + mN(r - \rho) - B\sigma Nr^{-1} - \\ - Am\alpha V^2] + V^2 [mN\alpha(r - r\sigma - \rho) - B\alpha\sigma Nr^{-1} - m\gamma(ar + \sigma N) - \\ - Ba\gamma r^{-1}] + N[\sigma^2 N + a(r - \rho)]$$

Назовем это решение невозмущенным. Всегда $\Delta_2 < 0$. Значения остальных величин рассмотрим применительно к следующим числовым данным:

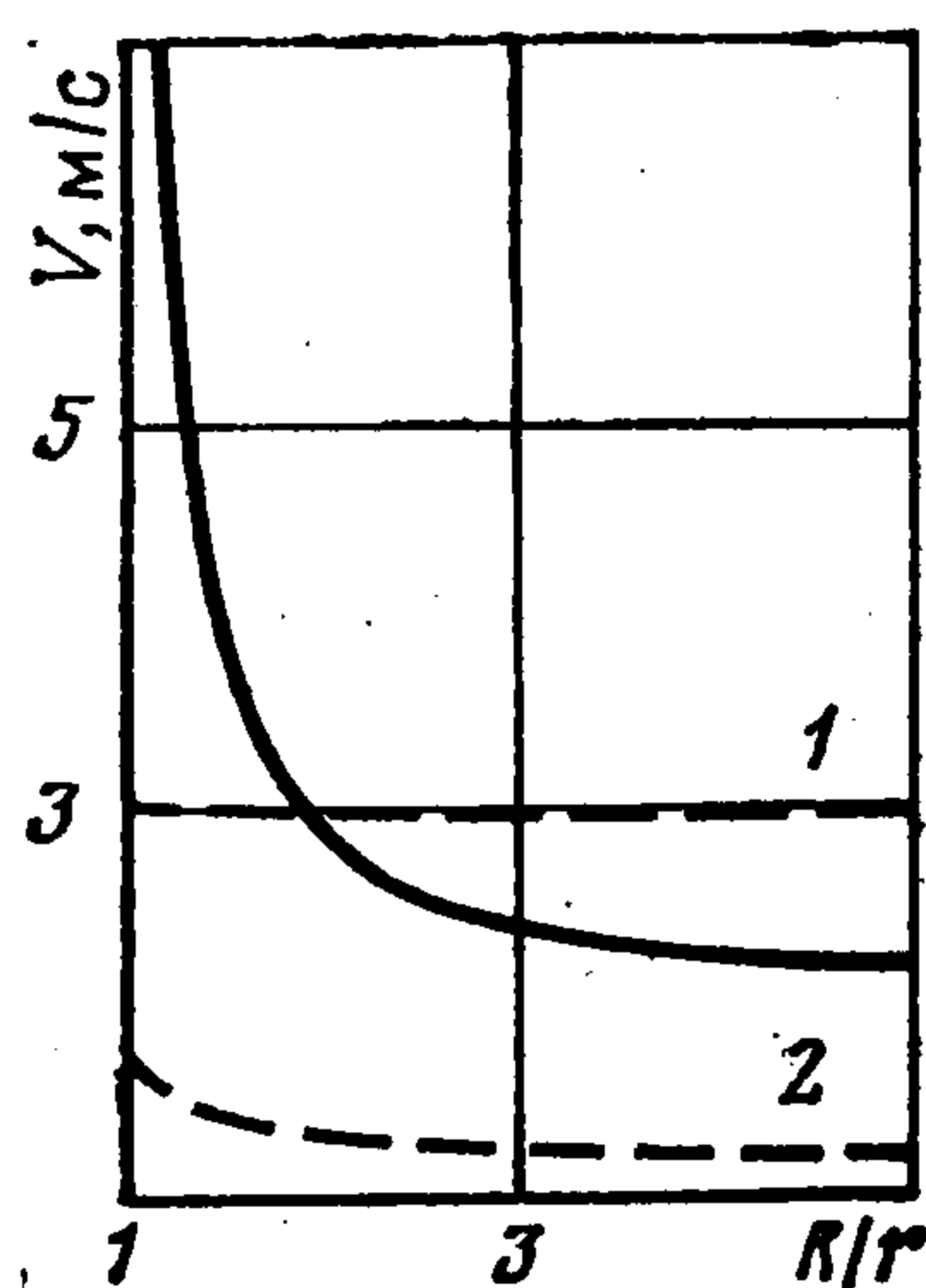
$$m = 98.1 \text{ кг}, r = 0.5 \text{ м}, A = 6.131 \text{ кгм}^2, B = 2A, a = 98100 \text{ кгс}^{-2}, \\ b = 3924 \text{ кгм}^2\text{с}^{-2}, \alpha = 20 \text{ м}^{-2}, \beta = 10 \text{ м}^{-1}, \gamma = 1 \text{ м}^{-1}, \rho = 0.1 \text{ м}, \sigma = 0.6$$

Параметры V, R варьируем. Вычисления показывают, что $\Delta_1 > 0$. Таким образом, $\xi_0\Delta > 0, \chi_0\Delta < 0$.

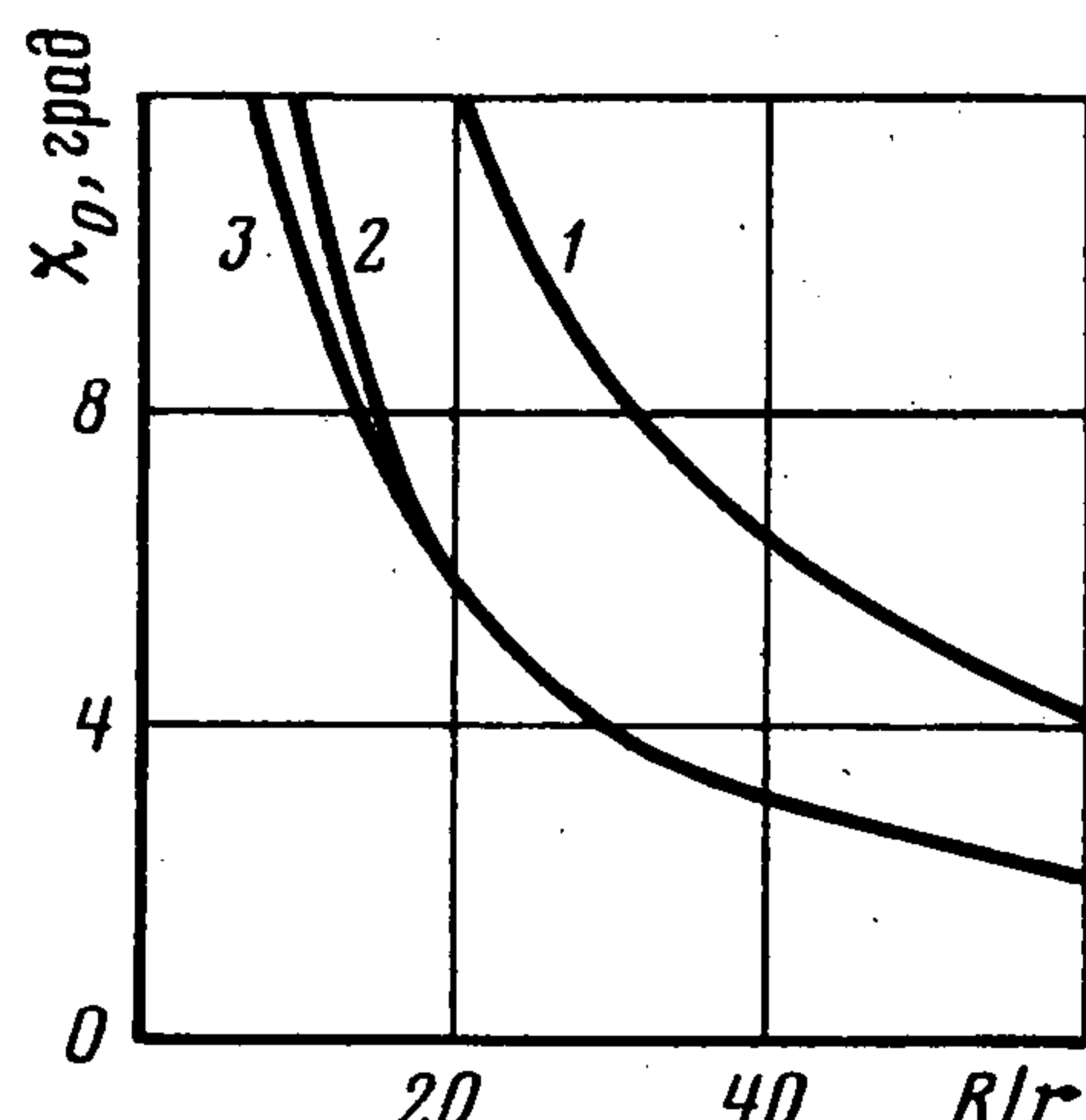
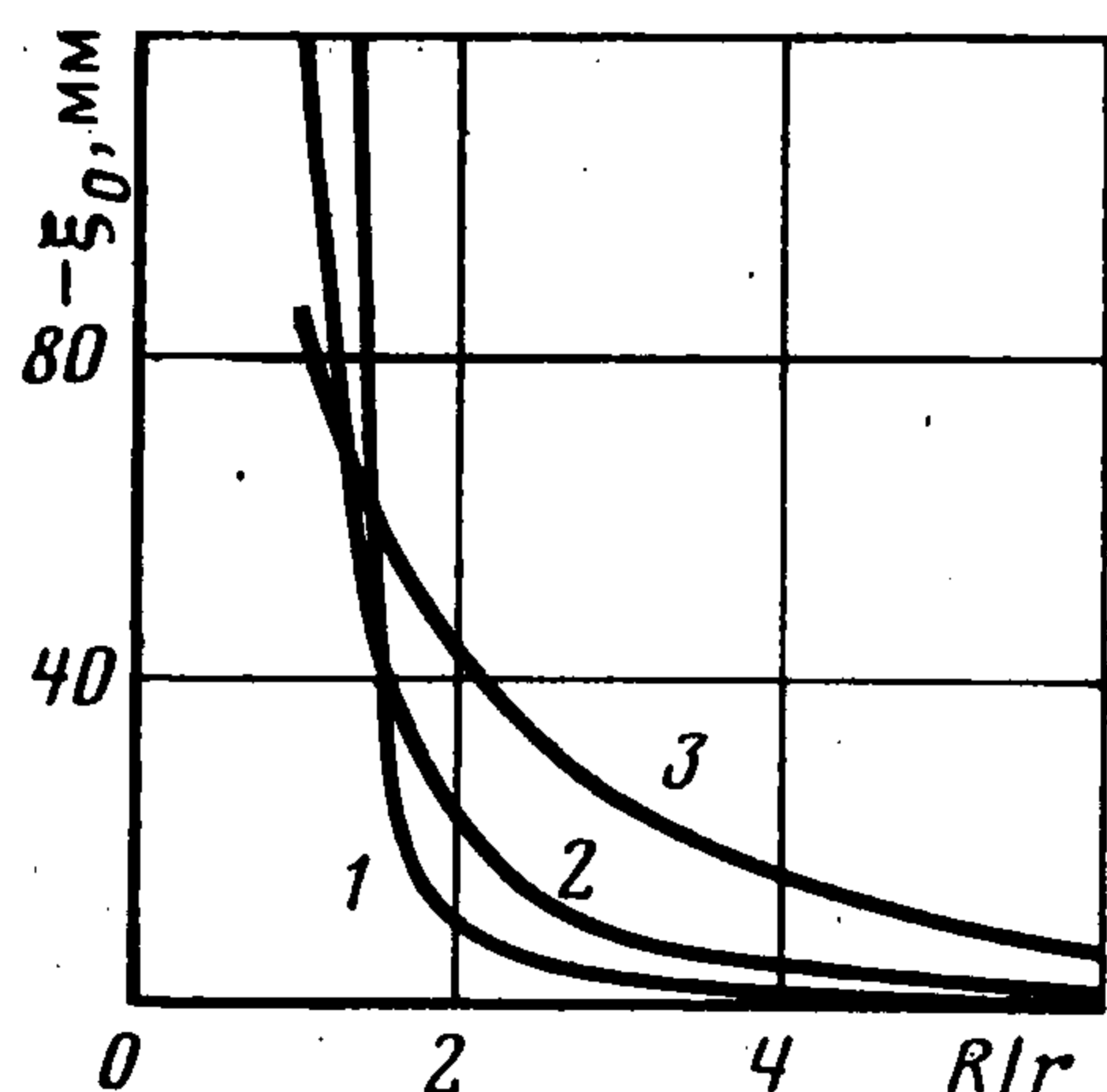
На фиг. 2 показано сечение поверхности $\Delta = \Delta(V, R)$ плоскостью $R = \text{const}$, т. е. линия $\Delta = \Delta_R(V)$ однопараметрического семейства кривых с параметром R . При $V \in (0, V_*)$ имеем $\xi_0 > 0, \chi_0 < 0$; если $V > V_*$, то $\xi_0 < 0, \chi_0 > 0$. Зависимости ξ_0, χ_0 от R при значениях V , равных 5, 15 и 50 м/с, приведены в виде кривых 1, 2, 3 на фиг. 3. Зависимость $V = V_*(R/r)$ показана сплошной кривой на фиг. 4; с увеличением параметра R величина V_* сначала быстро убывает, а потом почти не меняется.



Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3

Для суждения об устойчивости невозмущенного решения относительно переменных $U, \theta, \xi, \varphi, \chi$ рассмотрим соответствующие (5), (6) уравнения в вариациях. Разыскивая решение системы уравнений в вариациях в виде произведений постоянного множителя на $\exp(pt)$, получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}
 p^6 + a_1 p^5 + a_2 p^4 + a_3 p^3 + a_4 p^2 + a_5 p + a_6 &= 0 \\
 a_1 = \beta V, \quad a_2 = a_{31} + bA^{-1} + \alpha V^2 + \Omega^2, \quad a_{31} &= V^2 b_1^2 r^{-2} + B_1 + \\
 &+ (1 - b_1) \Omega^2 \\
 b_1 = BA^{-1}, \quad B_1 = am^{-1} + B_2 r - mN_1, \quad B_2 &= (ar + \sigma N)A^{-1}, \\
 N_1 = g(r - r\sigma - \rho)A^{-1} \\
 a_3 = a_1 a_{31}, \quad a_4 = bB_1 A^{-1} - B_3 + V^4 \alpha b_1^2 r^{-2} + V^2 [bb_1 \gamma A^{-1} r^{-1} + B_2 \gamma + \\
 &+ ab_1^2 m^{-1} r^{-2} + \alpha b(1 - b_1)A^{-1} - \alpha mN_1] + V^2 \Omega^2 [b_1^2 r^{-2} + \alpha(1 - b_1)] - \\
 &- \Omega^2 [B_5 + 2(b_1 - 1)bA^{-1} + mN_1] + (1 - b_1) \Omega^4, \quad B_3 = B_2 \sigma g + aN_1 \\
 B_4 = B_2 + ab_1 m^{-1} r^{-1}, \quad B_5 = B_2 r + a(b_1 - 1)m^{-1}, \quad N_2 &= b_1 \sigma g r^{-1} - mN_1 \\
 a_5 = a_1 (V^2 B_4 b_1 r^{-1} - \Omega^2 B_5 - B_3), \quad a_6 &= -bmA^{-2} \Delta
 \end{aligned}$$

Числовой анализ показывает, что невозмущенное движение устойчиво при выполнении единственного условия $a_6 > 0$, т. е. при $\Delta < 0$. Поэтому режим $V < V_*$, $\xi_0 > 0$, $\chi_0 < 0$ неустойчив, а режим $V > V_*$, $\xi_0 < 0$, $\chi_0 > 0$ устойчив. При устойчивом режиме движения баллонное колесо отклоняется во внешнюю относительно центра окружности сторону, что объясняется преобладающим влиянием момента $mV^2 r / R$ центробежной силы.

В той же постановке, но с использованием гипотезы увода (вместо теории М. В. Келдыша) для значений переменных в невозмущенном движении находим ($a_1 = \text{const} > 0$ — коэффициент увода)

$$\begin{aligned}
 \theta_0' = \Omega = \frac{V}{R}, \quad U_0 &= \frac{mV^2 \Omega (A\Omega^2 - Nr)}{a_1 [Nr + (B - A + mr^2) \Omega^2]}, \\
 \chi_0 &= - \frac{\Omega V (B + mr^2)}{r [Nr + (B - A + mr^2) \Omega^2]}
 \end{aligned}$$

Всегда $B > A$, $\chi_0 < 0$; U_0 — знакопеременная величина. Многообразие круговых движений колеса устойчиво при одновременном выполнении условий

$$\begin{aligned}
 V &> V_0, \quad V > V_1 \\
 V_0^2 &= ANr^3 [B(B + mr^2) - A(B - A + mr^2)r^2 / R^2]^{-1} \\
 V_1^2 &= ANr^3 [B(B - A) + A(2A - B)r^2 / R^2]^{-1}
 \end{aligned}$$

Для диска остается одно условие: $V^2 > 2gr$, при этом

$$\chi_0 = -^{3/2} V^2 (Rg + ^{5/4} V^2 r / R)$$

В случае движения вдоль окружности абсолютного твердого колеса с соблюдением классических неголономных связей качения малый угол крена определяется тем же выражением, что и в случае гипотезы увода, а условие консервативной устойчивости многообразия круговых движений имеет вид $V > V_0$.

Для диска

$$V_0^2 = gr \left[3 \left(1 - \frac{5}{12} \frac{r^2}{R^2} \right) \right]^{-1}$$

Отсюда при $R \rightarrow \infty$ получаем известное условие $V^2 > gr / 3$ устойчивости прямолинейного движения.

Сравним условия устойчивости кругового движения при различных моделях взаимодействия беговой поверхности колеса с поверхностью полотна дороги. Во всех трех случаях движение колеса по окружности возможно с любой скоростью. Область устойчивости на плоскости RV ограничена слева прямой $R = r$ и снизу кривой $V = V_*(R)$. На фиг. 4 показаны нижние границы области устойчивости: сплошная кри-

вая соответствует эластичному (по М. В. Келдышу) колесу; штриховые кривые 1 и 2 соответствуют гипотезе увода и случаю жесткого колеса.

По гипотезе увода $V_*(R) = \text{const}$ для данного колеса наибольшая область устойчивости получается для жесткой модели, кривая $V = V_*(R)$ в этом случае имеет горизонтальную асимптоту $V = (gr/3)^{1/2}$. При $R/r > 6$ функция $V_*(R)$ для эластичной и жесткой моделей убывает столь медленно, что практически ее можно принять за постоянную, при этом различие в областях устойчивости между указанными тремя моделями будет лишь количественное.

Автор благодарит В. В. Румянцева и участников руководимого им семинара за обсуждение результатов.

Поступила 20 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. Тр. ЦАГИ, 1945, № 564.
2. Метелицын И. И. Избранные труды. М., «Наука», 1977.
3. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Устойчивость криволинейного движения экипажа на балонных колесах. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
4. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.

УДК 533.6.011.72

МАЛЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ЗА ФРОНТОМ КОСОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

И. В. Симонов

(Москва)

Изучается влияние стационарных возмущений ступенчатой нагрузки, движущейся по плоской поверхности идеальной среды, на гидродинамические величины за фронтом косоугольной ударной волны. Рассматривается только случай, когда система дифференциальных уравнений для возмущений — эллиптического типа, а условия устойчивости плоской стационарной ударной волны [1] выполнены. Обсуждаются условия, при которых решение имеет логарифмическую или степенную особенность в производных.

Результаты могут оказаться полезными для ориентировки при проведении численных расчетов.

1. Рассмотрим плоское установившееся движение идеальной среды, заполняющей полупространство, под действием движущейся по ее поверхности с постоянной сверхзвуковой скоростью D нагрузки, профиль которой, близкий к «ступеньке», со временем не меняется. В системе координат $x = (x, y)$, связанной с фронтом нагрузки (фигура), давление на границе представим в виде

$$P = P_1 [1 + \varepsilon q(x)], \quad x > 0, \quad P = 0, \quad x < 0$$

Предполагается, что при $\varepsilon = 0$ имеет место решение с косоугольной ударной волной и постоянными параметрами за ней, а перед единственным фронтом разрыва решения среда невозмущена. При $\varepsilon \ll 1$ влияние возмущений учтем в линейной постановке, представляя неизвестные функции $P(x)$, $U(x) = (U, W)$ — вектор скорости точки среды, вычисляемый в лабораторной системе координат, $V(x)$ — удельный объем и $x = F(y)$ —

