Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ (МАРКОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Н. П. Бестужева, А. В. Чигарев

(Воронеж)

Рассматривается задача о поведении нестационарной поверхностной волны в случайно неоднородной линейно-деформируемой упругой среде. Исследование поверхностных волновых фронтов проводится на основе лучевых представлений о волне как линии разрыва производных от смещений, распространяющейся вдоль граничной поверхности. Система уравнений в частных производных методами теории разрывных решений с использованием динамических, кинематических и геометрических условий совместности приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно интенсивности волны, скорость которой в каждой точке неоднородной поверхности совпадает с релеевской. К этому уравнению присоединяется система соотношений, характеризующих изменение геометрических параметров поверхностного фронта при распространении. Рассмотрены конкретные модели стохастических сред, для которых исследуемые процессы являются марковскими и описываются методами теории многомерных марковских случайных процессов. Установлены условия относительно характера распределения поверхностной неоднородности, допускающие применение марковского приближения.

При распространении волн в случайно неоднородных средах наличие свободных границ приводит к ряду краевых эффектов, достаточно хорошо выраженных в некоторой граничной зоне [1–4]. Появление волн, распространяющихся вдоль свободной поверхности, связано с возможностью существования неоднородных волн вблизи границы [5–7]. Поверхностные гармонические волны в случайно неоднородных средах рассматривались на основе приближений геометрической оптики (короткие волны) [8] и в рамках метода эффективных параметров (длинные волны) [1]. В работе [9] предложен подход, основанный на использовании марковских приближений при изучении процессов распространения объемных волн.

1. Пусть неоднородная изотропная среда, упругие модули которой зависят от координат случайным образом, ограничена произвольной достаточно гладкой границей S. В системе координат x^n, связанной с поверхностью S, соотношения динамики запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\nabla^j \sigma_{ij} - \rho u_i^{\cdot\cdot} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ &\sigma_{ij} = \lambda \nabla_k u^k G_{ij} + \mu\,(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \\ &\sigma_{ij} n^j = 0, \quad x^n \in S. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь u_i — вектор смещения, σ_{ij} — тензор напряжений, $\lambda\,(x^n)$, $\mu\,(x^n)$, $\rho\,(x^n)$ — упругие модули и плотность среды, G_{ij} — метрический тензор системы x^n, выбранной следующим образом: x^1, x^2 — криволинейные координаты на S, x^3 — расстояние по нормали в глубь тела, ∇^j, ∇_j — знаки тензорного дифференцирования в метрике x^n (соответственно контра- и ковариантного).

Наличие граничной поверхности допускает существование в средах неоднородных волн. Под неоднородной волной первого порядка будем понимать однопараметрическое семейство ориентированных комплексных поверхностей Σ, на которых перемещения непрерывны, а их производные могут претерпевать разрыв. На Σ выполняются динамические, кинематические и геометрические условия совместности. В каждой точке рассматриваемой среды продольные и поперечные поверхности разрыва $\Sigma^{(k)}$ ($k = 1, 2$) распространяются в направлении своих нормалей со скоростями

$$c_{(1)} = \{(\lambda + 2\mu) / \rho\}^{1/2}, \quad c_{(2)} = (\mu / \rho)^{1/2}$$

Выведем условия, при выполнении которых на S могут существовать поверхностные волны первого порядка. Под поверхностной волной понимается однопараметрическое семейство действительных кривых l, на которых перемещения, определенные на S, непрерывны, а их первые производные при переходе через l претерпевают разрыв. Обозначим $[f]_{(k)}$ ($k = 1, 2$) скачок функции f на поверхности $\Sigma^{(k)}$, $[f]_s$ — разрыв f на линии l. Индекс (1) здесь и далее относится к соотношениям на продольной волне, (2) — на поперечной. Поверхностные волны строятся в виде линейной комбинации продольной и поперечной неоднородных волн, вследствие чего скачок на поверхности S ищем в виде суммы

$$[f]_s = [f]_{(1)} + [f]_{(2)} \tag{1.2}$$

Из последних двух уравнений (1.1) получаем

$$[\sigma_{ij}]_s n^j = 0 \tag{1.3}$$

$$[\sigma_{ij}]_s = \lambda [\nabla_k u^k]_s G_{ij} + \mu ([\nabla_j u_j]_s + [\nabla_j u_i]_s)$$

Соотношения (1.3) с учетом (1.2) и условий совместности первого порядка [10]

$$[\nabla_j u_i] = \omega_i \nu_j |_{(k)}, \quad \omega_i^{(k)} = [\nabla_n u_i]\, \nu^n |_{(k)}$$

где $\nu_i^{(k)}$ — компоненты нормали к $\Sigma^{(k)}$, записываются в форме

$$\lambda \omega^k \nu_k n^i + \mu (\omega_j \nu^i + \omega^i \nu_j) n^j |_{(1)} + \mu (\omega_j \nu^i + \omega^i \nu_j) n^j |_{(2)} = 0 \tag{1.4}$$

Систему координат x^n расположим так, чтобы вектор нормали $\mathbf{n}$ имел контравариантные составляющие (0, 0, 1), а выбор параметрической сетки на S осуществим таким образом, чтобы координата x^1 определяла время распространения вдоль поверхностного луча, а x^2 характеризовала точку на l. Тогда в точках S имеем

$$\nu_2^{(k)} = \nu^{2(k)} = 0 \tag{1.5}$$

На поперечной волне $\omega_i \nu^i |_{(2)} = 0$ и, следовательно, для ко- и контравариантных компонент волнового вектора получаем

$$\omega_1 = -k\nu_3^{(2)} c, \quad \omega_3 = k\nu_1^{(2)} / c \tag{1.6}$$

$$\omega^1 = -k\nu^3_{(2)} / c, \quad \omega^3 = k\nu^1_{(2)} c, \quad k = (\omega_i \omega^i)^{1/2}_{(2)}$$

На продольной волне

$$\omega_i = \omega\nu_i^{(1)}, \quad \omega^i = \omega\nu^i_{(1)}, \quad \omega = (\omega_i\omega^i)^{1/2}_{(1)} \tag{1.7}$$

Здесь k, ω — интенсивности объемных волн, определяемые как модули волновых векторов $\omega_i^{(k)}$.

При получении (1.6) учитывалось, что в точках S

$$G_{11} = c^2, \quad G_{33} = 1, \quad G_{13} = 0$$

где c — скорость распространения фронта l вдоль луча на S.

Принимая во внимание (1.5) — (1.7), преобразуем (1.4) к виду

$$\begin{gathered} 2\omega\,(\nu^1\nu_3)_{(1)} + k\,(\nu^1\nu_1 - \nu^3\nu_3)_{(2)}\,/\,c = 0 \\ \omega\,(\lambda + 2\mu\nu^3\nu_3)_{(1)} + 2k\mu\,(\nu^3\nu_1)_{(2)}\,/\,c = 0 \end{gathered} \tag{1.8}$$

Физические $N_{i(k)}$ и тензорные составляющие вектора нормали $\nu_{(k)}$ связаны соотношениями

$$\begin{gathered} \nu^i_{(k)} = N_{i(k)}(G_{ii})^{-1/2}, \quad \nu_{i(k)} = N_{i(k)}(G_{ii})^{1/2}, \quad k = 1, 2 \\ N_{1(k)} = c_{(1)}/c, \quad N_{3(k)} = i\,\{(c_{(1)}/c)^2 - 1\}^{1/2}, \quad N_{2(k)} = 0, \quad c < c_{(k)} \end{gathered} \tag{1.9}$$

С учетом (1.9) условие существования ненулевых решений системы (1.8) представим в форме

$$\left(\frac{1}{c^2_{(2)}} - \frac{2}{c^2}\right)^2 - \frac{4}{c^2}\left(\frac{c^2_{(1)}}{c^2} - 1\right)^{1/2}\left(\frac{c^2_{(2)}}{c^2} - 1\right)^{1/2} = 0 \tag{1.10}$$

Уравнение (1.10) для определения скорости c в каждой точке поверхности совпадает с уравнением Релея. Аналогичный результат для неоднородной среды получен в работе [6], где в несколько иной форме использованы представления высокочастотной асимптотики.

Общее решение системы (1.8) при условии (1.10) запишем в виде

$$\omega = -(\nu^1\nu_1 - \nu^3\nu_3)_{(2)}\chi\,/\,c, \quad k = 2\,(\nu^1\nu_3)_{(2)}\chi \tag{1.11}$$

Величину χ, которая полностью определяет разрыв на границе S, назовем интенсивностью поверхностной волны.

Исследуем изменение χ вдоль поверхностного луча. Для этого используем динамические условия совместности второго порядка и кинематические и геометрические условия совместности на поверхностях $\Sigma^{(k)}$, заданных в параметрическом виде $x^i = x^i\,(y^1_{(k)}, y^2_{(k)}, t)$

$$\begin{gathered} [\sigma_{ij}^{\cdot}]_s n^j = 0, \quad [\sigma_{ij}^{\cdot}]_s = \sum_{k=1}^{2} [\sigma_{ij}^{\cdot}]_{(k)} \\ [\sigma_{ij}^{\cdot}]_{(k)} = \lambda\,[\nabla_n u^{\cdot n}]_{(k)} G_{ij} + \mu\,([\nabla_i u_j^{\cdot}]_{(k)} + [\nabla_j u_i^{\cdot}]_{(k)}) \end{gathered} \tag{1.12}$$

$$\begin{gathered} [\nabla^j\sigma_{ij}]_{(k)} - \rho\,[u_i^{\cdot\cdot}]_{(k)} = 0 \\ [\nabla^j\sigma_{ij}]_{(k)} = \lambda\,[\nabla^j\nabla_n u^n]_{(k)} G_{ij} + \mu\,([\nabla^j\nabla_i u_j]_{(k)} + [\nabla^j\nabla_j u_i]_{(k)}) \end{gathered} \tag{1.13}$$

$$\begin{gathered} [\nabla_i u^{\cdot}{}_j]_{(k)} = (-W_i c_{(k)} + D\omega_i\,/\,Dt)\,\nu_j - c_{(k)} g^{\alpha\beta}\omega_{i,\,\alpha} x_{j\beta} - g^{\alpha\beta} x_{j\beta}\omega_i c^{(k)}_{,\alpha}\,|_{(k)} \\ [u_i^{\cdot\cdot}]_{(k)} = W_i c^2_{(k)} - 2c_{(k)} D\omega_i\,/\,Dt - \omega_i D c_{(k)}\,/\,Dt\,|_{(k)} \\ [\nabla^j\nabla_k u_i] = W_i \nu^j \nu_k + g^{\alpha\beta}\omega_{i,\,\alpha}(\nu^j x_{k\beta} + \nu_k x_\beta{}^j) - \\ - \omega_i g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} x_\beta{}^j x_{k\tau} x^n_{\alpha\sigma} \nu_n\,|_{(k)} \\ x_\beta{}^i = \partial x^i\,/\,\partial y^\beta, \quad x_{i\beta} = G_{ik} x_\beta{}^k, \quad g_{\alpha\beta} = x_\alpha{}^i x_{i\beta} \end{gathered} \tag{1.14}$$

Здесь греческие индексы принимают значение 1, 2, латинские — 1, 2, 3, производная $D / D|_{(k)}$ определена в [10].

Из анализа (1.13), (1.14) определяются выражения для характеристических величин второго порядка $W_i^{(k)} = [\nabla_n \nabla_j u_i] \, \nu^n \nu^j$ и уравнение переноса для объемных волн

$$(1.15) \qquad W_i = W_n \nu^n \nu_i + \omega_{,\alpha} g^{\alpha\beta} x_{i\beta} - 2\rho c_{(1)} g^{\alpha\beta} x_{i\beta} c_{(1),\alpha} \omega / (\lambda + \mu) |_{(1)}$$

$$W_n \nu^n = -\overset{n}{\omega}_{,\alpha} g^{\alpha\beta} x_{n\beta} - 2\rho c_{(2)} g^{\alpha\beta} x_\beta{}^n c_{(2),\alpha} \omega_n / (\lambda + \mu) |_{(2)} -$$

$$- \mu_{,n} \overset{n}{\omega}_{(2)} / (\lambda + \mu)$$

$$(1.16) \qquad D\omega_i / Dt - c_{(k)} \Omega \omega_i + \omega_i D \ln c_{(k)} / 2Dt = 0$$

$\Omega_{(k)}$ — средняя кривизна фронта $\Sigma_{(k)}$.

Подставляя (1.14) в (1.12) и учитывая (1.15), получаем систему неоднородных уравнений относительно $W_{(1)} = (W_i W^i)^{1/2}_{(1)}$, $W_{(2)} = (W_i W^i)^{1/2}_{(2)}$ с определителем, равным нулю в силу (1.10).

Необходимое и достаточное условие существования решения этой системы имеет вид

$$(1.17) \qquad 2Q_1(\omega, k)(\nu^3 \nu_1)_{(2)} - Q_2(\omega, k)(\nu^1 \nu_1 - \nu^3 \nu_3)_{(2)} = 0$$

$$Q_1 = B^1 + (x_{3\beta} \nu^1 + x_\beta{}^1 \nu^3)_{(1)} K^\beta + \nu_{3(2)} I / \nu_{1(2)}$$

$$Q_2 = B^3 + 2(x_{3\beta} \nu^3)_{(1)} K^\beta + \lambda I$$

$$B^i = n^j \sum_{k=1}^{2} \{\lambda G_j{}^i L_n{}^n + \mu (L_j{}^i + G_k{}^i G_j{}^n L_n{}^k)\}_{(k)}$$

$$L_j{}^i = (D\omega^i / Dt) \nu_j - g^{\alpha\beta} c_{(k)} \omega_{,\alpha}{}^i x_{j\beta}$$

$$K^\beta = \mu c_{(1)} g^{\alpha\beta} \{\omega_{,\alpha} + (\lambda + 2\mu)_{,\alpha} \omega / (\lambda + \mu)\}_{(1)}$$

$$I = \mu c_{(2)} \{g^{\alpha\beta} x_\beta{}^n (\omega_{n,\alpha} + \mu_{,\alpha} \omega_n) / (\lambda + \mu) - \mu_{,n} \omega^n / (\lambda + \mu)\}_{(2)}$$

Переходя в соотношениях для Q_1, Q_2 от координат $\overset{1}{y}_{(k)}$, $\overset{2}{y}_{(k)}$ и производной $D / Dt |_{(k)}$, связанных с поверхностями $\Sigma_{(k)}$, к единой системе координат, определяемой геометрией кривой l и поверхности S, и заменяя ω, k на χ с учетом формул (1.11), (1.16), получим из (1.17) уравнение для $X = |\chi|$

$$(1.18) \qquad \frac{dX}{ds} + \frac{1}{4} \frac{d \ln g_{22}^{(s)}}{ds} X + \frac{1}{2} \frac{d \ln R}{ds} X = 0$$

$$R = c^{-4} N_{(2)1}^{-5} N_{(1)1}^{-2} (1 - N_{(2)1}^2)^{-1/2} \{-6 N_{(1)1}^2 N_{(2)3}^2 (1 + N_{(2)1}^2) +$$

$$+ 4 N_{(2)1}^2 N_{(2)3}^2 + 2 N_{(2)1}^2 (N_{(1)1}^2 - 2 N_{(2)1}^4)\}$$

Здесь $d / ds = c^{-1} D / Dt$ — производная вдоль поверхностного луча, $g_{22}^{(s)}$ — соответствующая компонента первой квадратичной формы S, характеризующая геометрию фронта поверхностной волны (расходимость поверхностных лучей).

Решение (1.18) запишем в виде

$$(1.19) \qquad X = X_0 (g_{22}^{(s)0} / g_{22}^{(s)})^{1/4} (R_0 / R)^{1/2}, \quad g_{22}^{(s)0} = g_{22}^{(s)}(0), \quad R_0 = R(0)$$

Рассмотрим случай, когда S — плоскость, тогда

$$(1.20) \qquad -d \ln g_{22}^{(s)} / ds = 4\Omega, \quad d\Omega / ds = 2\Omega^2 + g^{22} c_{,22} / c$$

$$c_{,22} / c = (\lg c)_{,22} + (\ln c)_{,2}{}^2 = N(s)$$

где Ω — средняя кривизна цилиндрической поверхности с направляющей l (см. [9]).

Система (1.18), (1.20) замкнута и при заданных начальных условиях и скорости $c(s)$ определяет решение $X(s)$, $\Omega(s)$, $g_{22}(s)$ единственным образом.

Вводя переменные

$$\zeta_2 = (X/X_0)^4 (R/R_0)^2, \quad \zeta_1 = d\zeta_2 / ds \tag{1.21}$$

получаем уравнение для ζ_1 в форме

$$\frac{d\zeta_1}{ds} = \frac{3\zeta_1}{2\zeta_2} + 4N, \quad \zeta_2(0) = 1, \quad \zeta_1(0) = \zeta_1^\circ \tag{1.22}$$

Система уравнений (1.21), (1.22) позволит определить интенсивность поверхностной волны как функцию длины луча s. Координаты точек луча удовлетворяют соотношениям

$$d\mathbf{r} / ds = \mathbf{v}, \quad dv_i / ds = -g^{22} x_{i2} (\ln c)_{,2} \tag{1.23}$$

где $\mathbf{r} = \{x_1, x_2\}$ — радиус-вектор точек на S, x_1, x_2 — декартовы координаты поверхности, $\mathbf{v}$ — нормаль к l в плоскости S.

2. Соотношения (1.18), (1.20) нелинейные, вследствие чего вероятностное описание приводит к бесконечной зацепляющейся системе моментных уравнений, требующей определенной процедуры замыкания [2,4,11].

Рассмотрим вопрос о применении марковских приближений для описания процесса распространения поверхностной волны на основе уравнений (1.21), (1.22).

Запишем соотношения (1.21), (1.22) в виде

$$d\xi_i / ds = \Phi_i(\xi_j, \eta_j), \quad i = 1, 2, \ldots, n_1 \tag{2.1}$$

Через $\eta_j(s)$ обозначены нелинейные функции от $c(s)$, $c_{(1)}(s)$, $c_{(2)}(s)$, в данном случае это $N(s)$ или $\ln R$. Считаем, что $\eta_j(s)$ — стационарные случайные функции с дробно-рациональными спектральными плотностями, тогда $\eta_j(s)$ удовлетворяют уравнениям

$$d\eta_j / ds = F_j(\eta_k) + G_j(\eta_k) q_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n_2 \tag{2.2}$$
$$\langle q_k(s) \rangle = 0, \quad \langle q_k(s) q_n(s') \rangle = \delta(s - s') A_{kn} / \pi$$

Здесь F_j, G_j — произвольные функции, $q_k(s)$ — «белый шум».

Соотношения (2.2), с помощью которых при конкретном выборе функций F_j, G_j задается модель случайно неоднородной среды, по аналогии с [12] могут быть названы уравнениями «формирующего фильтра». Этот термин понимается здесь в том смысле, что каждая формируемая модель ведет себя как фильтр определенных частот по отношению к возмущениям, распространяющимся в ней. Если $F_j \equiv 0$, $G_j \equiv 1$, то $\eta_j(s)$ — нормальный винеровский процесс [12].

Расширяя число переменных ξ_i за счет функций $\eta_i(s)$, представим соотношения (2.1), (2.2) в форме

$$d\xi_m / ds = h_m(\xi_k) + f_m(q_k, \xi_k), \quad m = 1, 2, \ldots, n_1 + n_2 \tag{2.3}$$

Для уравнений (1.21), (1.22) и винеровской модели

(2.4) $$d\zeta_3 / ds = q(s), \quad \zeta_3 = 4N$$

компоненты вектор-функций ξ_i, h_i, f_i равны

(2.5) $$\xi = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}, \quad \mathbf{h} = \left\{\frac{3\zeta_1^2}{2\zeta_2} + \zeta_3, \zeta_1, 0\right\}$$
$$\mathbf{f} = \{0, 0, q(s)\}$$

При получении системы (2.3), (2.5) было использовано предложение о δ-коррелированности вдоль луча нелинейной функции N от упругих скоростей $c(s)$, $c_1(s)$, $c_2(s)$. Известно [2,12], что случайные величины, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям первого порядка типа (2.3), являются марковскими, и распределение вероятностей этих величин описывается уравнением Фоккера—Планка—Колмогорова.

Уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова, соответствующее системе (1.22), (2.4), примет вид ($P(\zeta_i, s)$ — плотность распределения вероятностей $\zeta_i(s)$ в точке s)

(2.6) $$\frac{\partial P}{\partial s} + 3\frac{\zeta_1}{\zeta_2}P + \left(\zeta_3 + \frac{3\zeta_1^2}{2\zeta_2}\right)\frac{\partial P}{\partial \zeta_1} + \zeta_1\frac{\partial P}{\partial \zeta_2} - A\frac{\partial^2 P}{\partial \zeta_3^2} = 0$$

Аналогичным образом можно получить стохастические дифференциальные уравнения типа (2.3), исходя из соотношений (1.18), (1.20), (1.23), и выписать для этой системы уравнение для плотности распределения.

Исследуем некоторые случаи, когда решения уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова имеют простой вид. Пусть упругие свойства среды изменяются только по направлению луча на S и не меняются вдоль фронта l.

Тогда

$$\Omega(s) = \Omega_0 \varkappa(s), \quad \Omega_0 = {}^1/_2\Omega_{0l}, \quad \varkappa(s) = (1 - 2\Omega_0 s)^{-1}$$

где Ω_{0l} — кривизна l в начальный момент времени.

Рассмотрим две модели случайно неоднородной среды:

$$1)\ d(\ln R) / ds = q(s); \qquad 2)\ d(\ln R) / ds = \ln R + q(s)$$

Для модели 1) логарифм интенсивности удовлетворяет стохастическому уравнению

$$dH / ds = \Omega_0 \varkappa(s) + q(s), \quad H = \ln X$$

и решение соответствующего уравнения для плотности распределения имеет следующий вид:

(2.7) $$P(H, s) = \sqrt{\frac{1}{4\pi As}} \exp\left\{-\frac{H - H_0 - {}^1/_2 \ln \varkappa(s)}{4As}\right\}$$

Вычисление продольной корреляции H производится аналогично [9]. В результате имеем

$$\langle H(s) H(s')\rangle = 2As' + [H_0 + {}^1/_2 \ln \varkappa(s')]^2 -$$
$$- {}^1/_2 [H_0 + {}^1/_2 \ln \varkappa(s')] [\ln \varkappa(s') - \ln \varkappa(s)], \quad (s > s')$$

В силу (2.7) одномерная плотность распределения $P^{(1)}(X, s)$ представима в виде

$$P^{(1)}(X, s) = \frac{X_0}{2X\sqrt{\pi As}} \exp\left\{-\frac{[\ln(X/X_0) - {}^1/_2 \ln \varkappa(s)]^2}{4As}\right\}$$

Для модели среды, определяемой условием 2), получаем аналогичное выражение, в котором величина $2As$ должно быть заменена $\sigma^2(s)$, причем

$$\sigma^2(s) = {}^1/_2 [1 - \exp(-4As)]$$

Отметим, что для модели 2) интенсивность плоской волны имеет стационарное распределение

$$P^{(2)} = \frac{X_0}{X\sqrt{\pi}} \exp\left\{\left(\ln\frac{X}{X_0}\right)^2\right\}$$

Видно, что интенсивность поверхностного фронта, как и в случае объемных волн [9], имеет логнормальное распределение. Статистические наблюдения интенсивностей волн в случайных средах подтверждают реальность исследуемых моделей. Определяющие уравнения (2.2) содержат все классы сред, для которых плотности распределения некоторых функций от случайных скоростей $c(s)$, $c_{(1)}(s)$, $c_{(2)}(s)$ описываются кривыми Пирсона [12]. Построение соответствующих моделей и использование марковских приближений основано на введении малого параметра, выражающего отношение масштаба изменения некоторых величин, зависящих от упругих коэффициентов, к характерным масштабам динамических и геометрических параметров задачи. Математически это условие выражается в предложении о δ-коррелированности вдоль луча функций от упругих модулей. Распределение упругих параметров при этом близко к логнормальному, что имеет место, например, для горных пород. При сделанных предложениях исключено влияние статистических свойств неоднородности среды поперек луча. Для случайной поверхности S необходимо учитывать статистическую зависимость и от координат S.

Поступила 20 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чигарев А. В.* Распространение упругих волн в стохастически неоднородной среде. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4.
2. *Болотин В. В., Гольденблат И. И., Смирнов А. Ф.* Строительная механика. М., Стройиздат, 1972.
3. *Ломакин В. А.* Плоская задача теории упругости микронеоднородных тел. Инж. ж. МТТ, 1966 № 3.
4. *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М., «Наука», 1970.
5. *Keller J. B., Karal F. C.* Geometrical theory of elastic surface wave excitation and propagation. J. Acoust. Soc. America, 1964, vol. 36, No. 1.
6. *Бабич В. М., Русакова Н. Я.* О распространении волн Релея по поверхности неоднородного упругого тела произвольной формы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 4.
7. *Grimshaw R.* Propagation and surfase waves at high frequencies. J. Inst. Math. Appl., 1968, vol. 4, No. 2.
8. *Молотков И. А.* Распространение приповерхностных нормальных волн в среде, случайно и регулярно неоднородной по двум координатам. Изв. вузов. Радиофизика, 1969, т. 12 № 5.
9. *Бестужева Н. П., Чигарев А. В.* К применению марковского приближения в динамике стохастических сред. ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
10. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964
11. *Болотин В. В.* Метод моментных функций в статистической динамике нелинейных систем. Тр. Моск. энерг. ин-та, 1975, вып. 227.
12. *Пугачев В. С., Казаков И. Е., Евланов Л. Г.* Основы статистической теории автоматических систем. М., «Машиностроение», 1974.