

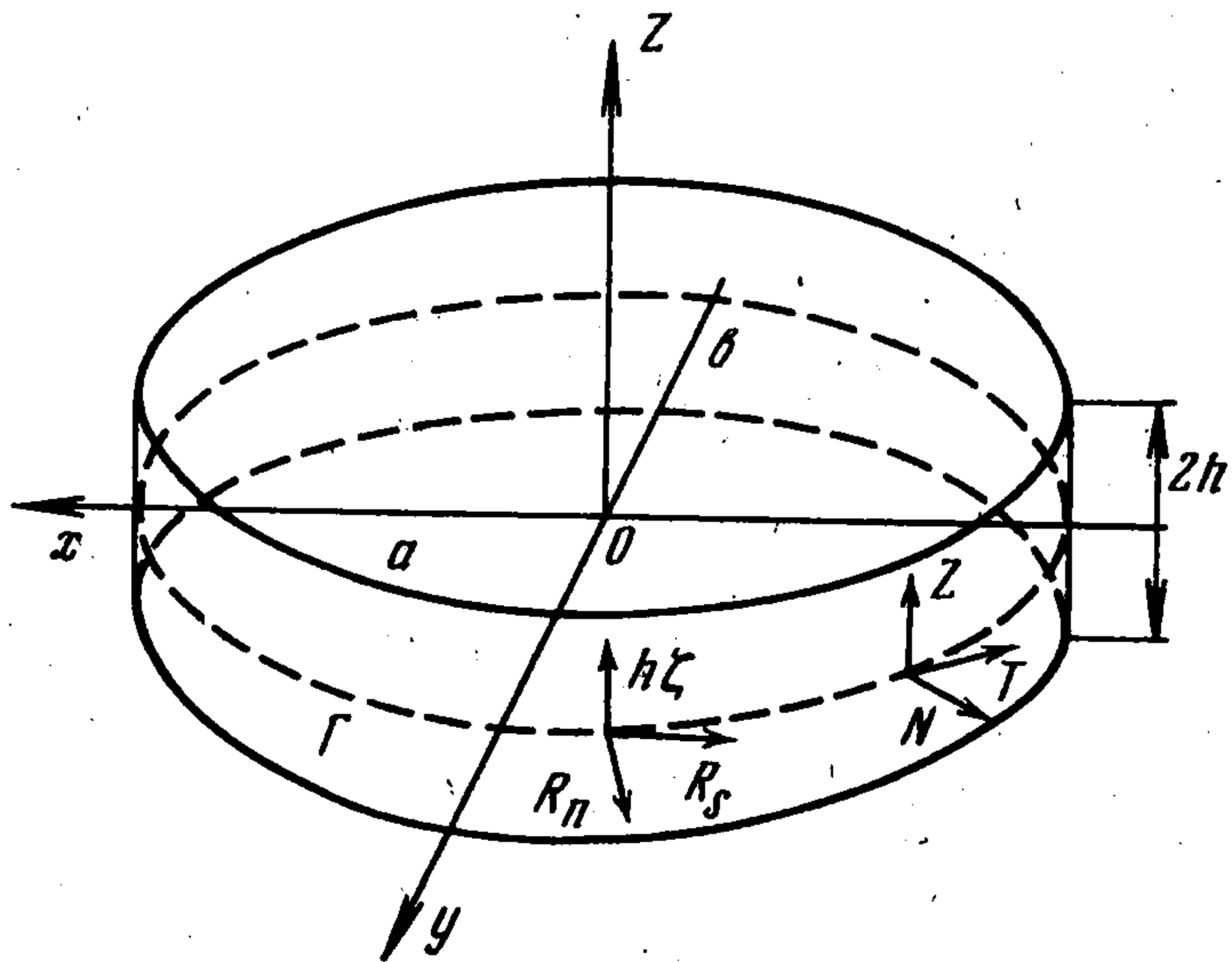
УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛИТЫ

О. К. Аксентян, Т. Н. Селезнева

(Ростов-на-Дону)

Предлагается асимптотический метод построения напряженно-деформированного состояния эллиптической плиты при динамическом нагружении в трехмерной постановке. Исследования проводятся для случая кососимметричных (изгибных) относительно срединной поверхности колебаний плиты, хотя метод применим и к симметричным колебаниям плиты.

Рассмотрим вынужденные установившиеся колебания изотропной однородной эллиптической плиты с полуосями a, b толщиной $2h$ (фиг. 1). Предполагаем, что плоские грани плиты свободны от усилий, а нагрузка приложена лишь к боковой цилиндрической поверхности. Вектор перемещений ищем в виде $\mathbf{a}_t = \mathbf{a}(x, y, z)e^{i\omega t}$, ω — частота вынужденных колебаний. Удовлетворяя системе дифференциальных уравнений Ляме и граничным условиям на плоских гранях, с помощью символического метода А. И. Лурье [1], получим, что напряженно-деформированное состояние плиты складывается из двух состояний. Одно из них определяется вектором амплитудных функций перемещений



Фиг. 1

$$(1) \quad u_n^{(1)} = R \sum_{m=1}^{\infty} \Lambda_m \frac{\partial \Psi_m}{\partial n}, \quad u_s^{(1)} = R \sum_{m=1}^{\infty} H^{-1} \Lambda_m \frac{\partial \Psi_m}{\partial s}$$

$$w^{(1)} = R \sum_{m=1}^{\infty} [2\mu_m \cos \lambda \alpha_m \zeta \cos \lambda \beta_m - (\mu_m + \alpha_m^2) \cos \lambda \beta_m \zeta \cos \lambda \alpha_m] \Psi_m$$

$$\Lambda_m = 2\alpha_m \sin \lambda \alpha_m \zeta \cos \lambda \beta_m - (\mu_m + \alpha_m^2) \cos \lambda \alpha_m \frac{\sin \lambda \beta_m \zeta}{\beta_m}$$

$$\lambda = h/R, \quad \zeta = z/h, \quad \alpha_m^2 = \mu_m + \Omega^2, \quad \beta_m^2 = \mu_m + (1 - 2\nu)\Omega^2 / [2(1 - \nu)]$$

$$\Omega^2 = \omega^2 R^2 \rho_1 G^{-1}, \quad H = 1 + nR\rho^{-1}$$

$$(2) \quad \Delta \Psi_m = \mu_m \Psi_m$$

$$(3) \quad (\mu_m + \alpha_m^2)^2 \cos \lambda \alpha_m \frac{\sin \lambda \beta_m}{\beta_m} - \\ - 4\mu_m \alpha_m \sin \lambda \alpha_m \cos \lambda \beta_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Здесь s, n — местная система безразмерных ортогональных координат, связанных с контуром плиты Γ в плоскости x, y (фиг. 1), ρ — радиус кривизны контура Γ , R — характерный размер плиты в плоскости x, y (наименьший радиус кривизны эллипса), G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, ρ_1 — плотность материала плиты, μ_m — корни уравнения Релея — Лэмба (3).

Второе напряженно-деформированное состояние плиты определяется вектором амплитудных функций перемещений

$$(4) \quad u_n^{(2)} = R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda \chi_k}{\chi_k} \frac{1}{H} \frac{\partial B_k}{\partial s}, \quad u_s^{(2)} = -R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda \chi_k}{\chi_k} \frac{\partial B_k}{\partial n} \\ w^{(2)} = 0, \quad \Delta B_k - \sigma_k^* B_k = 0 \\ (5) \quad \cos \lambda \chi_k = 0, \quad \chi_k^2 = \sigma_k^* + \Omega^2 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

В рассматриваемой области изменения Ω ($\Omega \lambda < 4.7$) уравнение Лэмба (3) в случае изгибных колебаний имеет два действительных корня (порядка $1/\lambda$) и счетное множество комплексных корней (порядка $1/\lambda^2$), асимптотические разложения которых приведены в [2].

Обозначим комплексные корни уравнения Лэмба через γ_p^2/λ^2 , а решения уравнения (2), им соответствующие, — через $C_p(n, s)$, $p = 1, 2, \dots$. В [3] получено асимптотическое представление этих решений через значения функций C_p на границе Γ . Решение это — типа пограничного слоя. В дальнейшем понадобятся асимптотические выражения нормальных производных функций C_p на контуре Γ

$$(6) \quad \frac{\partial C_p}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i S_{pi} c_p(s), \quad \frac{\partial^2 C_p}{\partial n^2} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=0}^{\infty} Q_{pi} c_p(s) \lambda^i \\ c_p(s) = C_p(n, s) \Big|_{\Gamma}$$

Операторы S_{pi} , Q_{pi} приведены ниже.

Обозначив корни уравнения (5) $\sigma_k^* = \sigma_k^2/\lambda^2$, имеем

$$\sigma_k^2 = \frac{\pi^2 (2k-1)^2}{4} - \lambda^2 \Omega^2 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

и при $\lambda \Omega < \pi/2$ для $B_k(s, n)$ справедливы представления (6) с заменой C_p на B_k , C_p на b_k и γ_p на σ_k . При $\lambda \Omega \geq \pi/2$ в рассматриваемой области изменения Ω величина σ_1 становится чисто мнимой и решение, соответствующее σ_1 , уже не будет пограничным слоем [4]. В этом случае оно строится через функции Матье аналогично тому, как это делается ниже для действительных корней уравнения Лэмба.

Решения уравнения Гельмгольца, соответствующие действительным корням уравнения Лэмба (в дальнейшем будем называть их проникающим), запишем в эллиптических координатах ξ, η через функции Матье [5]. Связь между безразмерными декартовыми и эллиптическими координата-

ми дается формулами (ε — эксцентриситет эллипса, $\xi = \xi_0$ соответствует контуру плиты Γ)

$$x_1 = \frac{x}{R} = \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y_1 = \frac{y}{R} = \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \operatorname{sh} \xi \sin \eta$$

$$R = a(1 - \varepsilon^2), \quad 0 \leq \eta \leq \pi, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0$$

Решение уравнения (2), записанного в эллиптических координатах с учетом физического смысла задачи, имеет вид [5]

$$\Psi_i = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(i)} \operatorname{Ce}_m(q_i, \xi) \operatorname{ce}_m(q_i, \eta) + \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(i)} \operatorname{Se}_m(q_i, \xi) \operatorname{se}_m(q_i, \eta)$$

$$q_i = \mu_i \varepsilon^2 [4(1 - \varepsilon^2)]^{-1} \quad (i = 1, 2)$$

Будем считать, что на цилиндрической поверхности плиты задана система усилий (фиг. 1)

$$\sigma_n = 2GN(\zeta, s) e^{i\omega t}, \quad \tau_{ns} = 2GT(\zeta, s) e^{i\omega t},$$

$$\tau_{nz} = 2GZ(\zeta, s) e^{i\omega t}$$

Ради простоты изложения рассмотрим колебания, симметричные относительно осей эллипса, т. е. $B_m^{(i)} = 0$; $i = 1, 2$; $m = 0, 1, 2, \dots$

Напряженно-деформированное состояние в плите построим как сумму трех состояний: проникающего, потенциального и вихревого. Тогда на боковой поверхности плиты имеем

$$(7) \quad N = \sum_{i=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(i)} \left\{ J_0^{-2} \Lambda_i \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta} \left(\operatorname{sh} 2\xi_0 \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\Omega^2 \nu}{2(1 - \nu)} (\mu_i + \alpha_i^2) \frac{\sin \lambda \beta_i \zeta}{\beta_i} \cos \lambda \alpha_i \right\} \times$$

$$\times \operatorname{Ce}_{2m}(q_i, \xi) \Big|_{\xi=\xi_0} \operatorname{ce}_{2m}(q_i, \eta) + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} Q_p(\zeta) \frac{\partial^2 C_p}{\partial n^2} \Big|_{n=0} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} M_p(\zeta) c_p(s) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \theta_k \zeta}{\theta_k} \left(\frac{\partial^2 B_k}{\partial n \partial s} \Big|_{n=0} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial b_k(s)}{\partial s} \right)$$

$$T = \sum_{i=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(i)} J_0^{-2} \Lambda_i \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta} \left(\sin 2\eta \frac{\partial}{\partial \xi} + \operatorname{sh} 2\xi_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] \operatorname{Ce}_{2m}(q_i, \xi) \Big|_{\xi=\xi_0} \operatorname{ce}_{2m}(q_i, \eta) +$$

$$+ \lambda \sum_{p=1}^{\infty} Q_p(\zeta) \left(\frac{\partial^2 C_p}{\partial n \partial s} \Big|_{n=0} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial c_p}{\partial s} \right) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \theta_k \zeta}{\theta_k} \left(\frac{\partial^2 b_k}{\partial s^2} + \frac{R}{\rho} \frac{\partial B_k}{\partial n} \Big|_{n=0} - \frac{\partial^2 B_k}{\partial n^2} \Big|_{n=0} \right)$$

$$Z = \sum_{i=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(i)} (\mu_i + \alpha_i^2) (\cos \lambda \alpha_i \zeta \cos \lambda \beta_i - \cos \lambda \beta_i \zeta \cos \lambda \alpha_i) J_0^{-2} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\partial}{\partial \xi} \text{Ce}_{2m}(q_i, \xi) \Big|_{\xi=\xi_0} \text{ce}_{2m}(q_i, \eta) + \sum_{p=1}^{\infty} F_p(\zeta) \frac{\partial C_p}{\partial n} \Big|_{n=0} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \theta_k \zeta \frac{\partial b_k}{\partial s} \\
Q_p(\zeta) &= \lambda^{-2} \left[2\kappa_p \sin \kappa_p \zeta \cos \delta_p - (\gamma_p^2 + \kappa_p^2) \frac{\sin \delta_p \zeta}{\delta_p} \cos \kappa_p \right] \\
M_p(\zeta) &= \frac{\Omega^{2\nu}}{2(1-\nu)} (\gamma_p^2 + \kappa_p^2) \frac{\sin \delta_p \zeta}{\delta_p} \cos \kappa_p \\
F_p(\zeta) &= \lambda^{-2} (\gamma_p^2 + \kappa_p^2) (\cos \kappa_p \zeta \cos \delta_p - \cos \delta_p \zeta \cos \kappa_p) \\
J_0^2 &= \frac{\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon^2)} (\text{ch } 2\xi_0 - \cos 2\eta), \\
s &= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \int_0^\eta [2 - \varepsilon^2 - \varepsilon^2 \cos 2\eta]^{1/2} d\eta \\
\theta_k^2 &= \sigma_k^2 + \lambda^2 \Omega^2, \quad \kappa_p^2 = \gamma_p^2 + \lambda^2 \Omega^2, \quad \delta_p^2 = \gamma_p^2 + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \lambda^2 \Omega^2
\end{aligned}$$

Легко установить, что функции $M_p(\zeta)$, $Q_p(\zeta)$, $F_p(\zeta)$ — нулевого порядка относительно λ .

Таким образом, поставленная задача сводится к определению постоянных $A_m^{(i)}$ и граничных значений функций C_p и B_k через заданные на боковой поверхности напряжения.

Бесконечную систему уравнений для определения $A_m^{(i)}$, $c_p(s)$, $b_k(s)$ строим, разлагая заданные напряжения (7) в ряды Фурье по ξ . Имеем

$$\begin{aligned}
(8) \quad & \sum_{i=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(i)} \left\{ R_i^{(r)} J_0^{-2} \left[a_{2m} + \mu_i \frac{2-\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon^2)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\text{ch } 2\xi_0 - \cos 2\eta} \left(\text{sh } 2\xi_0 \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] + P_i^{(r)} \right\} \text{Ce}_{2m}(q_i, \xi) \Big|_{\xi=\xi_0} \times \\
& \times \text{ce}_{2m}(q_i, \eta) + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} G_p^{(r)} \frac{\partial^2 C_p}{\partial n^2} \Big|_{n=0} + \frac{1}{\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} L_p^{(r)} c_p(s) + \\
& + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(r)} \left(\frac{\partial^2 B_k}{\partial n \partial s} \Big|_{n=0} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial b_k(s)}{\partial s} \right) = N_r \\
& \sum_{i=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(i)} R_i^{(r)} J_0^{-2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{\text{ch } 2\xi_0 - \cos 2\eta} \left(\sin 2\eta \frac{\partial}{\partial \xi} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \text{sh } 2\xi_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] \text{Ce}_{2m}(q_i, \xi) \Big|_{\xi=\xi_0} \text{ce}_{2m}(q_i, \eta) + \\
& + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} C_p^{(r)} \left(\frac{\partial^2 C_p}{\partial n \partial s} \Big|_{n=0} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial c_p}{\partial s} \right) + \\
& + \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(r)} \left(\frac{\partial^2 b_k}{\partial s^2} + \frac{R}{\rho} \frac{\partial B_k}{\partial n} \Big|_{n=0} - \frac{\partial^2 B_k}{\partial n^2} \Big|_{n=0} \right) = T_r \\
& \lambda \sum_{i=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(i)} V_i^{(r)} \frac{\partial}{\partial \xi} \text{Ce}_{2m}(q_i, \xi) \Big|_{\xi=\xi_0} \text{ce}_{2m}(q_i, \eta) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{p=1}^{\infty} K_p^{(r)} \frac{\partial C_p}{\partial n} \Big|_{n=0} + \sum_{k=1}^{\infty} W_k^{(r)} \frac{\partial b_k}{\partial s} = Z_r \quad (r = 1, 2, \dots) \\
 R_i^{(r)} & = 4(-1)^r \pi r \Omega^2 \frac{[\lambda^2(\sigma - 1)\mu_i + \lambda^2\sigma\alpha_i^2 - r^2\pi^2] \alpha_i \sin \lambda\alpha_i \cos \lambda\beta_i}{(\lambda^2\alpha_i^2 - r^2\pi^2)(\lambda^2\beta_i^2 - r^2\pi^2)(\mu_i + \alpha_i^2)} \\
 P_i^{(r)} & = (-1)^r \pi r \Omega^2 (1 - 2\sigma) \frac{(\mu_i + \alpha_i^2) \cos \lambda\alpha_i \sin \lambda\beta_i}{\beta_i (\lambda^2\beta_i^2 - r^2\pi^2)} \\
 V_i^{(r)} & = 2(-1)^r \Omega^2 \frac{\{\lambda^2\beta_i^2\Omega^2 + (r-1)^2\pi^2 [4\mu_i(\sigma-1) - \Omega^2]\} \alpha_i \sin \lambda\alpha_i \cos \lambda\beta_i}{[\lambda^2\alpha_i^2 - (r-1)^2\pi^2][\lambda^2\beta_i^2 - (r-1)^2\pi^2](\mu_i + \alpha_i^2)} \\
 G_p^{(r)} & = 4(-1)^r r \pi \Omega^2 \frac{[(\sigma - 1)\gamma_p^2 + \sigma\kappa_p^2 - r^2\pi^2] \kappa_p \sin \kappa_p \cos \delta_p}{(\kappa_p^2 - r^2\pi^2)(\delta_p^2 - r^2\pi^2)(\gamma_p^2 + \kappa_p^2)} \\
 L_p^{(r)} & = (-1)^r r \pi \Omega^2 (1 - 2\sigma) \frac{(\gamma_p^2 + \kappa_p^2) \sin \delta_p \cos \kappa_p}{\delta_p (\delta_p^2 - r^2\pi^2)} \\
 K_p^{(r)} & = 2(-1)^r \Omega^2 \frac{\{\delta_p^2\lambda^2\Omega^2 + (r-1)^2\pi^2 [4\gamma_p^2(\sigma-1) - \lambda^2\Omega^2]\} \kappa_p \sin \kappa_p \cos \delta_p}{[\kappa_p^2 - (r-1)^2\pi^2][\delta_p^2 - (r-1)^2\pi^2](\gamma_p^2 + \kappa_p^2)} \\
 U_k^{(r)} & = \frac{2(-1)^{r+k+1} r \pi}{\theta_k (\theta_k^2 - r^2\pi^2)}, \quad W_k^{(r)} = \frac{(-1)^{r+k+1} \theta_k}{\theta_k^2 - (r-1)^2\pi^2}, \quad \sigma = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}
 \end{aligned}$$

Здесь a_{2m} — собственные значения функций Матье; $N_r(s)$, $T_r(s)$, $Z_r(s)$ — коэффициенты Фурье разложений граничных функций $N(\zeta, s)$, $T(\zeta, s)$, $Z(\zeta, s)$.

Предположим, что все функции $X(s) = N_r(s)$, $T_r(s)$, $Z_r(s)$, $c_p(s)$, $b_k(s)$ представимы в виде рядов по степеням λ

$$(9) \quad X(s) = X_0(s) + \lambda X_1(s) + \lambda^2 X_2(s) + \dots$$

Согласно [3]

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \frac{\partial C_p}{\partial n} \Big|_{n=0} & = \frac{1}{\lambda} \left\{ \gamma_p c_{p0} + \lambda \left(\gamma_p c_{p1} - \frac{R}{2\rho} c_{p0} \right) + \lambda^2 \left[\gamma_p c_{p2} - \frac{R}{2\rho} c_p - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(\frac{R^2}{8\gamma_p \rho^2} c_{p0} + \frac{1}{2\gamma_p} \frac{\partial^2 c_{p0}}{\partial s^2} \right) \right] + \dots \right\} \\
 \frac{\partial^2 C_p}{\partial n^2} \Big|_{n=0} & = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \gamma_p^2 c_{p0} + \lambda \left(\gamma_p^2 c_{p1} - \frac{\gamma_p R}{\rho} c_{p0} \right) + \right. \\
 & \left. + \lambda^2 \left[\gamma_p^2 c_{p2} - \frac{\gamma_p R}{\rho} c_{p1} + \left(\frac{R^2}{2\rho^2} c_{p0} - \frac{\partial^2 c_{p0}}{\partial s^2} \right) \right] + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

Выражения производных по нормали для функций $B_k(n, s)$ на контуре Γ получим заменой в (10) соответственно γ_p на σ_k и $c_{pi}(s)$ на $b_{ki}(s)$.

Подставляя асимптотические разложения (9), (10) в (8) и приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях λ , получим на первом этапе бесконечную систему линейных уравнений для определения $c_{p0}(s)$, $b_{k0}(s)$

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \sum_{p=1}^{\infty} [G_p^{(r)} \gamma_p^2 + L_p^{(r)}] c_{p0}(s) & = 0, \quad -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(r)} \sigma_k^2 b_{k0}(s) = 0 \\
 \sum_{p=1}^{\infty} K_p^{(r)} \gamma_p c_{p0}(s) & = 0 \quad (r = 1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

Исследование системы (11) показывает, что она имеет только нулевое решение: $c_{p0}(s) \equiv 0$, $b_{k0}(s) \equiv 0$.

На втором этапе асимптотического процесса получаем систему для определения $A_m^{(i)}$, $c_{p1}(s)$, $b_{k1}(s)$

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & \sum_{i=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(i)} \left\{ R_i^{(r)} J_0^{-2} \left[a_{2m} + \mu_i \frac{2 - \varepsilon^2}{2(1 - \varepsilon^2)} - \frac{1}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta} \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \left(\operatorname{sh} 2\xi_0 \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + P_i^{(r)} \right\} \operatorname{Ce}_{2m}(q_i, \xi) \Big|_{\xi=\xi_0} \operatorname{ce}_{2m}(q_i, \eta) + \\
 & + \sum_{p=1}^{\infty} (G_p^{(r)} \gamma_p^2 + L_p^{(r)}) c_{p1}(s) = N_{r0} \\
 & \sum_{p=1}^{\infty} K_p^{(r)} \gamma_p c_{p1}(s) = Z_{r0} \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_r^{(k)} \sigma_k^2 b_{k1}(s) = \\
 & = T_{r0} - \sum_{i=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(i)} R_i^{(r)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta} \left(\sin 2\eta \frac{\partial}{\partial \xi} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \operatorname{sh} 2\xi_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] \operatorname{Ce}_{2m}(q_i, \xi) \Big|_{\xi=\xi_0} \operatorname{ce}_{2m}(q_i, \eta) \quad (r = 1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

На третьем этапе определяем $c_{p2}(s)$, $b_{k2}(s)$

$$\begin{aligned}
 (13) \quad & \sum_{p=1}^{\infty} (G_p^{(r)} \gamma_p^2 + L_p^{(r)}) c_{p2} = N_{r1} + \sum_{p=1}^{\infty} G_p^{(r)} \frac{R \gamma_p}{\rho} c_{p1} - \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(r)} \sigma_k b'_{k1} \\
 & \sum_{p=1}^{\infty} K_p^{(r)} \gamma_p c_{p2} = Z_{r1} - \sum_{i=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(i)} V_i^{(r)} \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{Ce}_{2m}(q_i, \xi) \Big|_{\xi=\xi_0} \operatorname{ce}_{2m}(q_i, \eta) + \\
 & + \sum_{p=1}^{\infty} K_p^{(r)} \frac{R}{2\rho} c_{p1} - \sum_{k=1}^{\infty} W_k^{(r)} b'_{k1} \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(r)} \sigma_k^2 b_{k2} = T_{r1} - \sum_{p=1}^{\infty} G_p^{(r)} \gamma_p c_{p1} - \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(r)} \frac{R}{\rho} \sigma_k b_{k1} \quad (r = 1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

и т. д. Этот процесс можно продолжить сколь угодно далеко при достаточной гладкости нагрузки.

Теперь можно провести асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния плиты внутри области и на границе. Имеем

$$\begin{aligned}
 (14) \quad & \sigma_s = 2G \left\{ \sigma_s^{(0)} + \sum_{p=1}^{\infty} M_p(\zeta) H^{-1/2} c_{p1}(s) \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} + \right. \\
 & + \lambda \left[\sum_{p=1}^{\infty} M_p(\zeta) (H^{-1/2} c_{p2}(s) + S c_{p1}(s)) \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} + \right. \\
 & \left. + \sum_{p=1}^{\infty} Q_p(\zeta) H^{-3/2} \frac{R}{\rho} \gamma_p c_{p1}(s) \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \theta_k \zeta}{\theta_k} H^{-3/2} \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sigma_k b_{k1}(s) \exp \frac{\sigma_k n}{\lambda} \Big] + \dots \Big\} e^{i\omega t} \\ \tau_{nz} = & 2G \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} F_p(\zeta) H^{-1/2} \gamma_p c_{p1}(s) \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} + \lambda \left[\tau_{nz}^{(0)} + \sum_{p=1}^{\infty} F_p(\zeta) \times \right. \right. \\ & \times \left(H^{-1/2} \gamma_p c_{p2}(s) + \gamma_p S c_{p1}(s) - H^{-3/2} \frac{R}{2\rho} c_{p1}(s) \right) \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} + \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} H^{-3/2} \cos \theta_k \zeta b'_{k1}(s) \exp \frac{\sigma_k n}{\lambda} \right] + \dots \right\} e^{i\omega t} \\ W = & \left\{ w^{(0)} + R\lambda \sum_{p=1}^{\infty} D_p(\zeta) H^{-1/2} c_{p1}(s) \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} + \dots \right\} e^{i\omega t} \\ S = & \frac{1}{\sqrt{H}} \left\{ -\frac{1}{2\gamma_p} \left(\frac{l^2}{4} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \frac{n}{H} + \frac{1}{2\gamma_p} \left(\frac{l''}{4} + l' \frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{n^2}{H^2} - \right. \\ & \left. - \frac{5l'^2}{24\gamma_p} \frac{n^3}{H^3} \right\}, \quad l = \frac{R}{\rho} \\ D_p(\zeta) = & [2\gamma_p^2 \cos \kappa_p \zeta \cos \delta_p - (\gamma_p^2 + \kappa_p^2) \cos \delta_p \zeta \cos \kappa_p] \lambda^{-2} \end{aligned}$$

В формулах (14) $w^{(0)}$, $\tau_{nz}^{(0)}$, $\sigma_s^{(0)}$ соответствуют проникающему решению, выраженному через функции Матье. Отсюда следует, что поправка в определении W , вносимая погранслоями, имеет более высокий порядок по λ , чем само W во всей области, занятой плитой. То же можно сказать относительно перемещений U_n , U_s . Несколько иначе обстоит дело с напряжениями. Если рассмотреть напряжение σ_s (σ_n , τ_{ns}) вдали от края, то здесь влиянием погранслоев можно пренебречь. На боковой поверхности плиты ($n = 0$) поправка, вносимая погранслоем, имеет, вообще говоря, тот же порядок относительно λ , что и проникающее решение. В напряжении τ_{nz} (τ_{sz}) погранслои играют на границе основную роль.

Бесконечная система (12) урезается до конечной системы, содержащей $2L$ уравнений. Каждое уравнение записывается в конечном числе точек контура Γ ; L — число коэффициентов в разложении в ряды Фурье граничных функций. Число определяемых коэффициентов $A_m^{(i)}$ совпадает с числом точек разбиения дуги s ($0 \leq \eta \leq \pi/2$). Исследовалась практическая сходимость процесса определения коэффициентов $A_m^{(i)}$ и рядов, содержащих $A_m^{(i)}$. Число удержанных погранслоев в (12), (13) равно $L - 1$. Число L выбиралось так, чтобы граничные условия на боковой поверхности плиты удовлетворялись с погрешностью, не превосходящей 1%.

В качестве примера, иллюстрирующего возможности предложенного метода, рассматривались установившиеся вынужденные колебания эллиптической плиты при следующих значениях граничных функций:

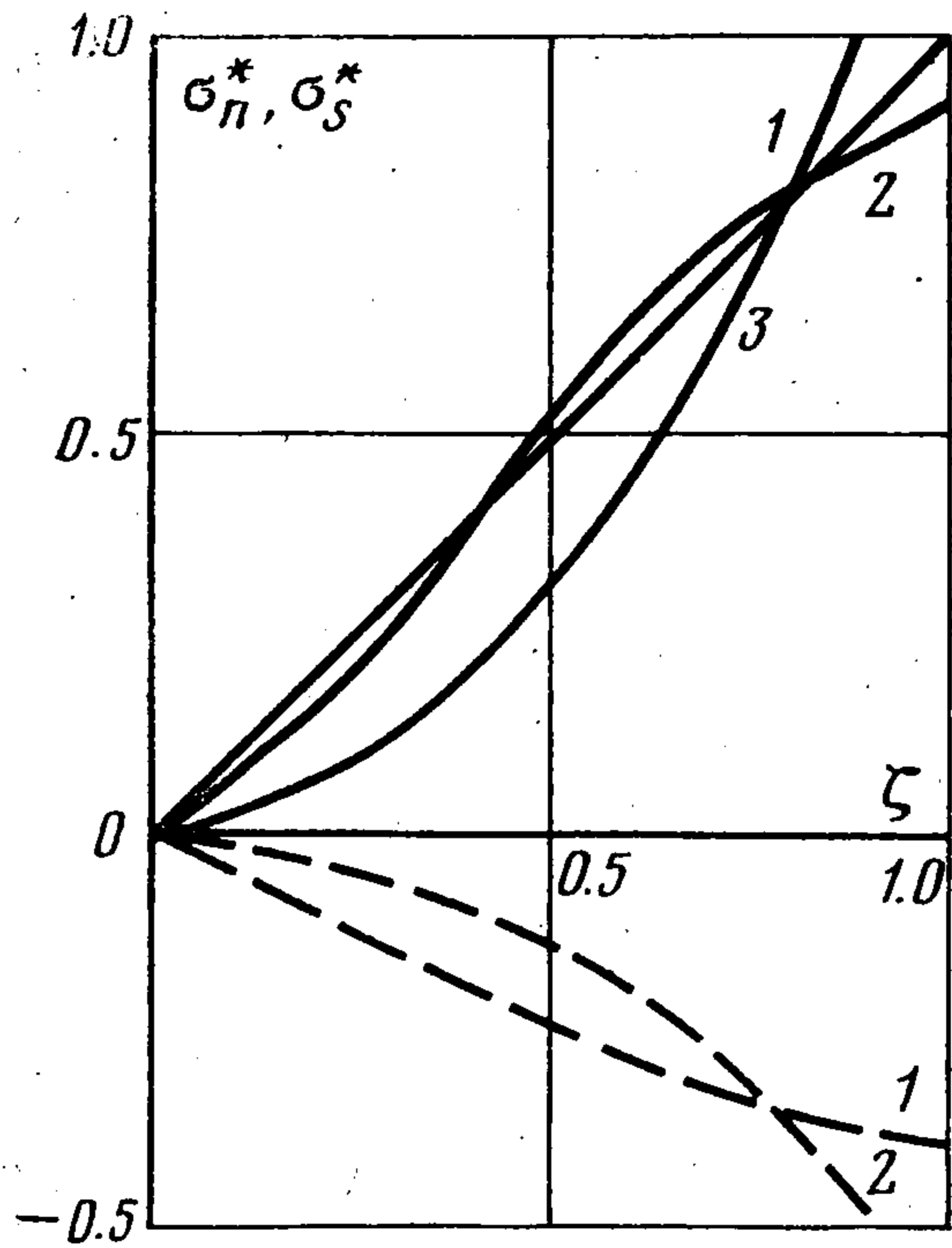
$$(15) \quad N = \alpha \zeta, \quad T = 0, \quad Z = 0$$

Амплитудная функция поперечного перемещения в случае деформаций, кососимметричных относительно срединной плоскости плиты, имеет вид

$$\begin{aligned} w = & R \sum_{i=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(i)} [2\mu_i \cos \lambda \alpha_i \zeta \cos \lambda \beta_i - (\mu_i + \alpha_i^2) \cos \lambda \beta_i \zeta \cos \lambda \alpha_i] \times \\ & \times \text{Ce}_{2m}(q_i, \xi) \text{ce}_{2m}(q_i, \eta) + \lambda R \sum_{p=1}^{\infty} D_p(\zeta) H^{-1/2} c_{p1}(s) \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} + \dots \end{aligned}$$

Вычисления проводились на ЭЦВМ «Одра-1204» при $\nu = 1/3$. Проверялась степень удовлетворения граничным условиям на боковой поверхности плиты на первом этапе асимптотического процесса с учетом различного числа погранслоев при изменении параметров λ , Ω , ε .

На фиг. 2 сплошными линиями нанесены графики амплитудной функции напряжения σ_n ($\sigma_n^* = (2G\alpha)^{-1}\sigma_n e^{-i\omega t}$) при $\lambda = 0.3$, $\Omega = 2.2$, $\varepsilon = 0.3$. Цифрами обозначено:



Фиг. 2

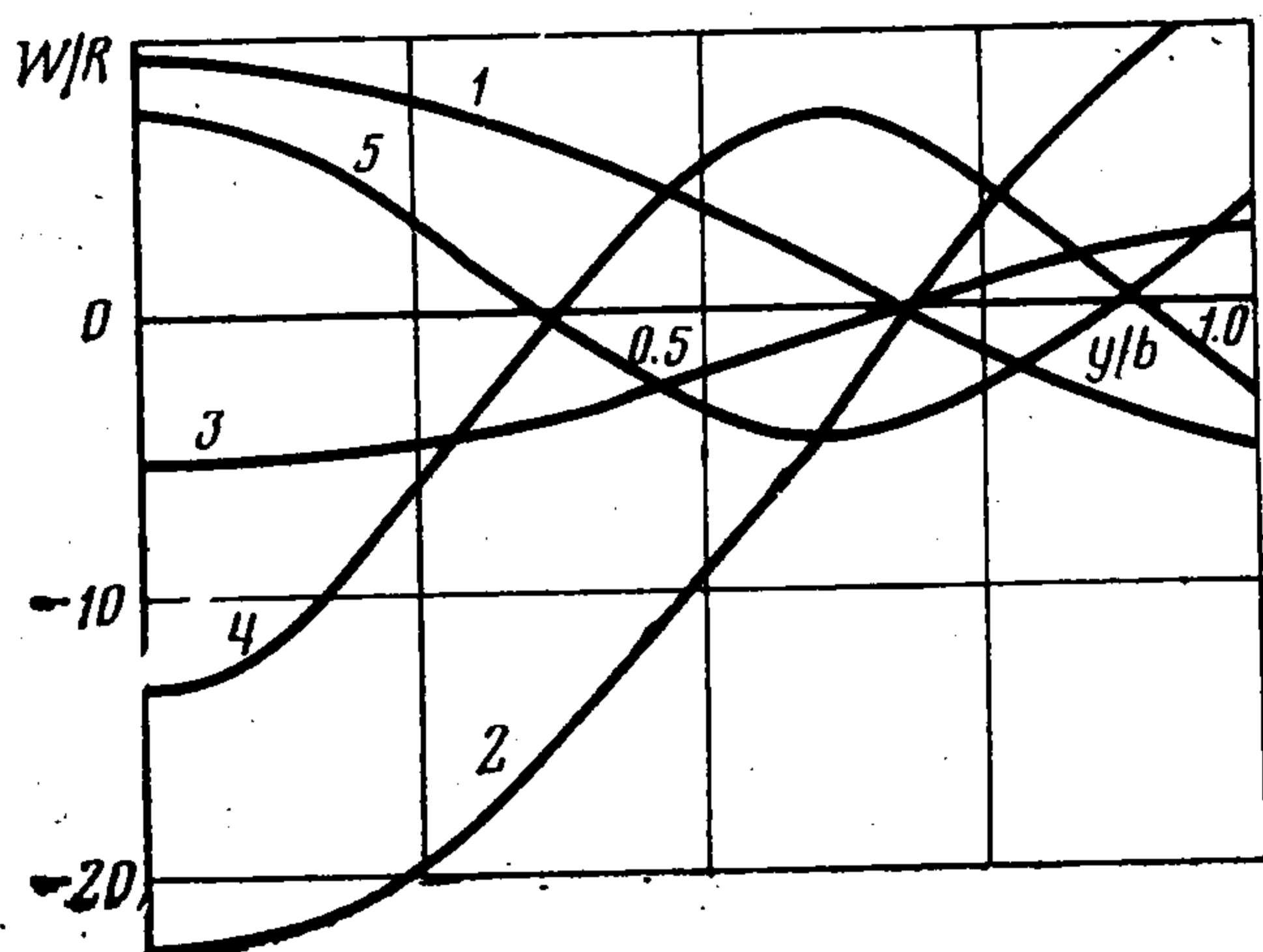
1 — проникающее решение, 2 — с учетом первого погранслоя, 3 — с тремя погранслоями, практически совпадающее с N . Как показал численный анализ, существенный вклад вносит первый погранслой, учет остальных погранслоев дает возможность удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности плиты с наперед заданной точностью.

Чтобы проанализировать практическую сходимость асимптотических рядов по λ , производилось сравнение амплитудной функции напряжения σ_s на границе эллиптической плиты с малым эксцентриситетом ($\varepsilon = 0.01$) с соответствующим напряжением для круглой плиты, представленным в рядах по функциям Бесселя [2,6]. На фиг. 2 штриховыми линиями нанесены графики амплитудной функции напряжения σ_s ($\sigma_s^* = (2G\alpha)^{-1}\sigma_s e^{i\omega t}$) на границе при $\lambda = 0.3$, $\Omega = 2.2$, $\varepsilon = 0.01$, подсчитанные на первом этапе асимптотического процесса. Цифрами 1, 2 соответственно обозначены проникающее решение и решение с учетом трех погранслоев, практически совпадающее с соответствующим напряжением для круглой плиты.

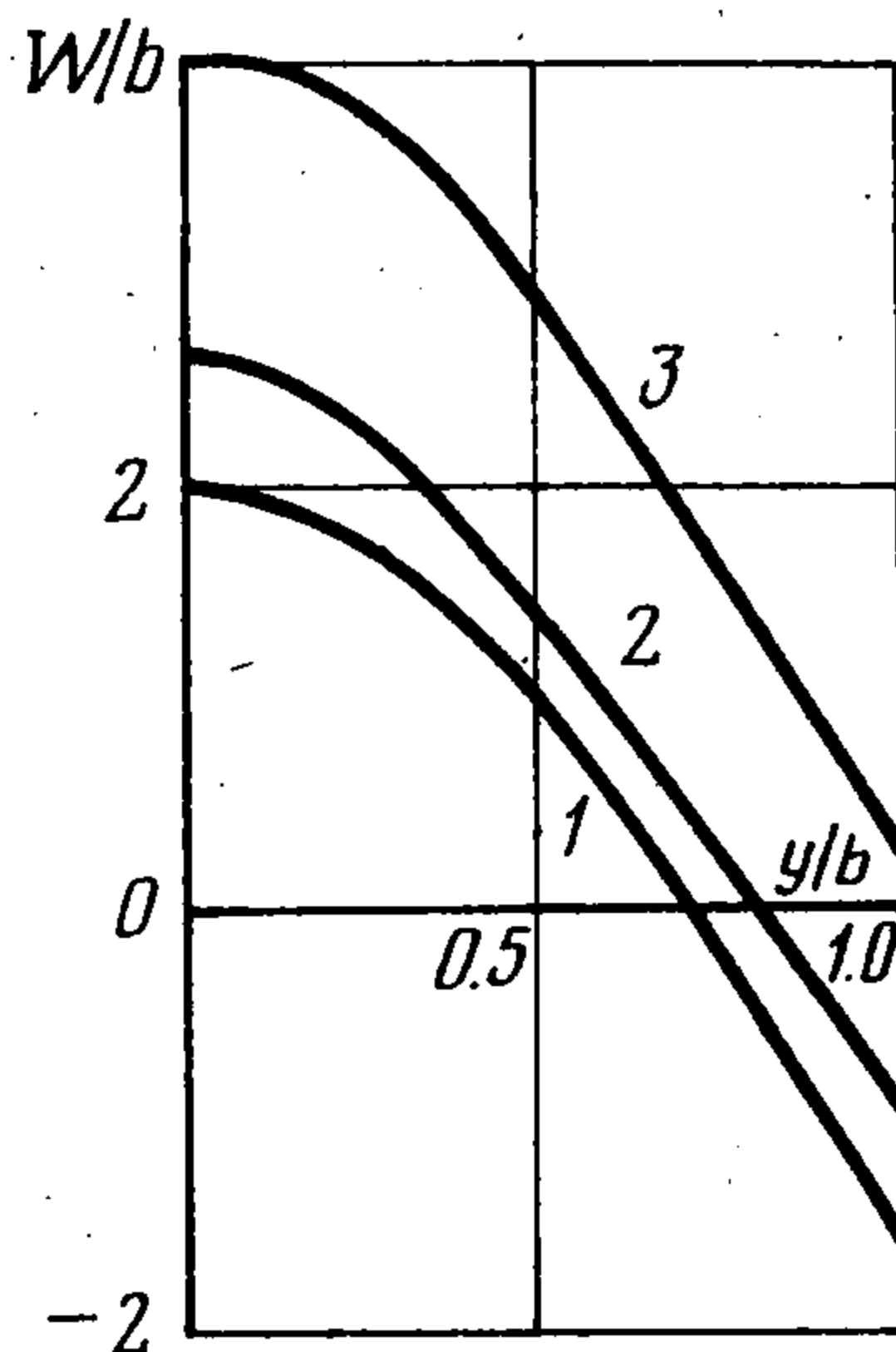
Предложенный метод позволяет вычислить собственные частоты эллиптической плиты. А именно, предлагается рассматривать совокупность задач со следующими граничными условиями:

$$(16) \quad \begin{aligned} N &= c e_m(\eta), & T &= 0, & Z &= 0 \\ N &= s e_{m+1}(\eta), & T &= 0, & Z &= 0 \\ N &= 0, & T &= c e_m(\eta), & Z &= 0 \\ N &= 0, & T &= s e_{m+1}(\eta), & Z &= 0, \end{aligned} \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

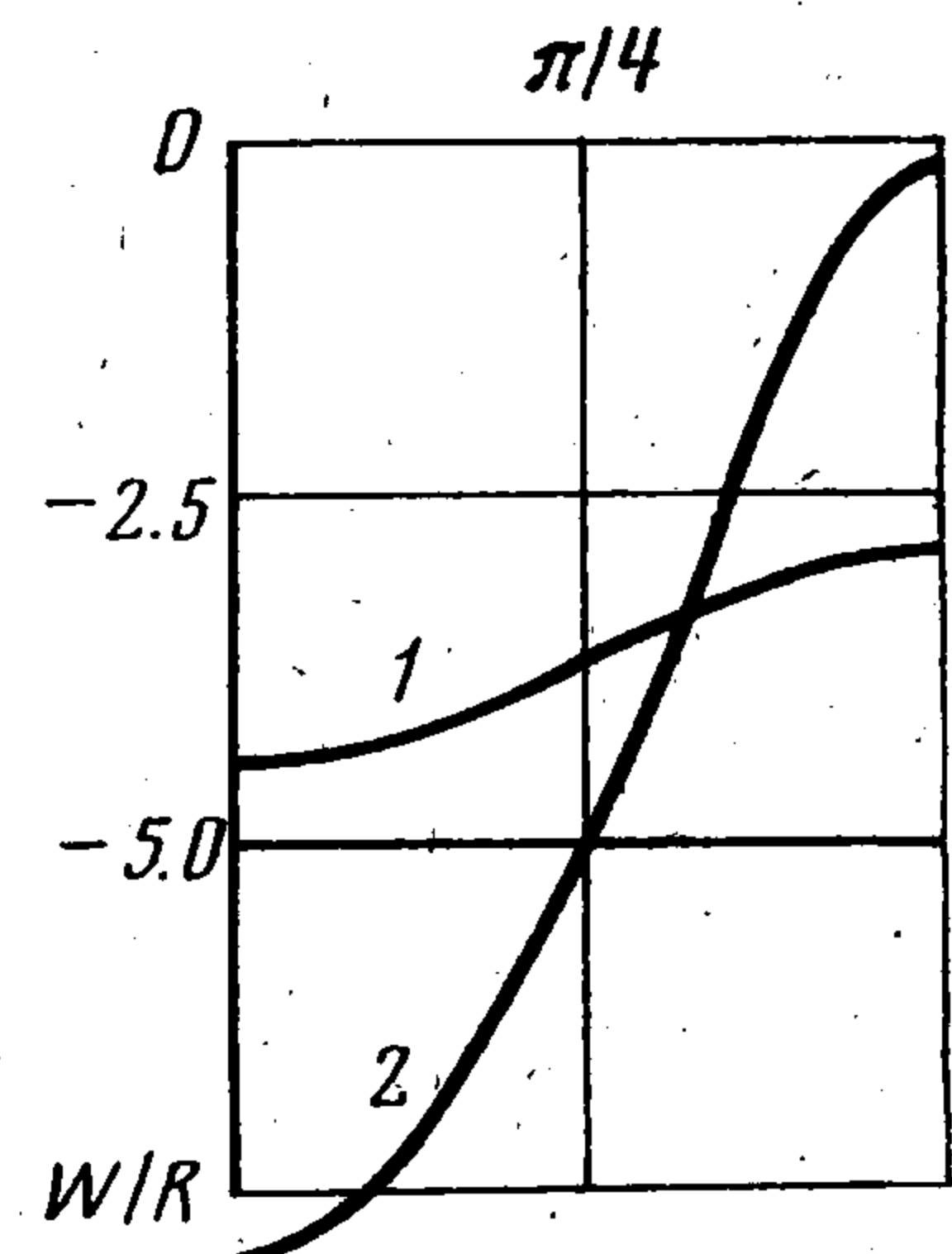
и т. д. Очевидно, суперпозицией решений этих задач может быть получено решение задачи с произвольными граничными условиями на боковой поверхности плиты [7].



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Для каждой отдельной задачи (16) собственные частоты в заданном интервале изменения Ω определяются так же, как это сделано ниже для граничных условий (15).|

Собственные частоты определяются как те значения частоты вынужденных колебаний, при которых поставленная граничная задача не имеет конечного решения. Фактическое определение интервалов для собственных частот эллиптической плиты проводится на основе анализа зависимости функции $w(0, y, 0)$ от частоты Ω . На фиг. 3 приведены графики этой функции при $\lambda = 0.3$, $\varepsilon = 0.3$, обозначенные 1—5 соответственно для частот 1.8, 1.9, 2.0, 4.8, 4.9, позволяющие выделить интервалы собственных частот: $\Omega_1 \in (1.8; 1.9)$, $\Omega_2 \in (4.8; 4.9)$. Соответствующие собственные частоты для круглой плиты ($\lambda = 0.3$) $\Omega_1 = 1.95$, $\Omega_2 = 4.96$.

Анализировалось поведение функций $w(0, y, 0)$ и $w(x, 0, 0)$ при деформации круга в эллипсы, описанные и вписанные в него. Как показал численный анализ, перемещения w эллиптической плиты при малом эксцентриситете (от 0.01 до 0.1) практически совпадают с поперечным перемещением круглой плиты, рассчитанным по методу [2,6]. Графики функций $w(0, y, 0)$ при $h/b = 0.1$, $\Omega = 0.5$ [приведены на фиг. 4 для $\varepsilon = 0.01$, 0.5, $\varepsilon = 0.6$ (кривые 1, 2, 3 соответственно)].

Исследовалось поведение $w(x, y, 0)$ в зависимости от угла η на границе плиты Γ . Для малых ε ($\varepsilon \leq 0.1$) перемещения на контуре плиты можно считать постоянными. Зависимость w от η усиливается с ростом ε . На фиг. 5 приведен график $w(x, y, 0)$ при $n = 0$ в зависимости от η при $\lambda = 0.05$, $\Omega = 0.2$ для $\varepsilon = 0.4$, 0.5 (кривые 1 и 2 соответственно).

Поступила 27 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
2. Аксентян О. К., Селезнева Т. Н. Определение частот собственных колебаний круглых плит. ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.
3. Аксентян О. К., Воронич И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
4. Устинов Ю. А. О некоторых особенностях асимптотического метода при применении его к изучению колебаний тонких неоднородных упругих плит. Материалы Всес. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Гегечкори, ГрузССР, 1974.
5. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
6. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Анализ динамической напряженности и частотных характеристик круглой пластины в рамках трехмерной теории упругости. Тр. VIII Всес. конф. по теории оболочек и пластин (Ростов-на-Дону, 1971). М., «Наука» 1973.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М., «Наука», 1967.